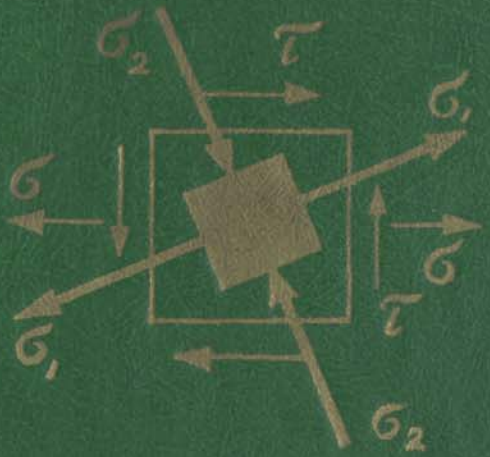
VISIT…

И. А. БИРГЕР • Р. Р. МАВЛЮТОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ



И. А. БИРГЕР,
Р. Р. МАВЛЮТОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов машиностроительных
и авиационных вузов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 30.121
Б 64
УДК 539.3/, 6

Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. **Сопротивление материалов:** Учебное пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 560 с.

Изложен курс сопротивления материалов, дополненный элементами теории упругости, пластичности, ползучести и разрушения. Представлены современные методы расчета прочности элементов конструкций, в частности метод конечных элементов. Рассмотрены задачи прочности и устойчивости, колебаний стержней, элементы теории пластинок и оболочек. Даны примеры построения моделей прочностной надежности при разных условиях нагружения.

Для студентов, аспирантов втузов и инженеров, работающих в авиа- и машиностроении.

Табл. 3. Ил. 474.

Рецензенты:
кафедра сопротивления материалов Киевского политехнического института;
доктор технических наук *И. И. Трапезин*

Исаак Аронович Биргер

Рыфат Рахматуллович Мавлютов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Редактор *Н. П. Рябенькая*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *О. М. Березина, И. Я. Кришталь*

ИБ № 12812

Сдано в набор 20.06.85. Подписано к печати 09.03.86. Формат 60×90/16. Бумага № 3. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 35. Усл. кр.-от. 35. Уч.-изд. л. 34,58. Тираж 34 000 экз. Заказ № 801. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25

Б $\frac{2105000000-164}{053(02)-86}$ 174-85

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Глава 1. **Введение** 7

1. Сопротивление материалов — наука о прочности и надежности конструкций 7
2. Модели прочностной надежности 9

Глава 2. **Напряжения** 23

3. Нормальные и касательные напряжения 23
4. Напряженное состояние в точке 29
5. Плоское напряженное состояние 32
6. Объемное напряженное состояние 40
7. Дифференциальные уравнения равновесия элемента тела и краевые условия 47

Глава 3. **Деформации** 57

8. Перемещения и деформации 57
9. Связь перемещений и деформаций 60
10. Линейная деформация в произвольном направлении. Главные деформации, тензор деформаций 63
11. Уравнения совместности деформаций 67

Глава 4. **Механические свойства конструкционных материалов** . . . 70

12. Диаграммы деформирования, пределы текучести и прочности 70
13. Деформации и характеристики пластичности 76
14. Истинные диаграммы деформирования и их схематизация . . . 82
15. Ползучесть и длительная прочность 87
16. Усталость материала и элементов конструкций 92
17. Малоцикловая усталость 100

Глава 5. **Модели упругости, пластичности и ползучести** 107

18. Модели упругости 107
19. Модели пластичности 116
20. Модели ползучести и вязкоупругости 130

Глава 6. **Растяжение и сжатие стержней** 141

21. Растяжение и сжатие стержней сосредоточенными и распределенными силами 141
22. Статически неопределимые задачи растяжения и сжатия стержней 150
23. Стержневые системы (фермы) 159

24. Статически неопределимые стержневые системы 166
25. Гибкие нити 175

Глава 7. **Кручение стержней** 183

26. Кручение круглых валов 183
27. Общая задача кручения стержней и концентрация напряжений 196
28. Кручение тонкостенных стержней 210

Глава 8. **Изгиб стержней** 220

29. Гипотеза плоских сечений и нормальные напряжения изгиба 220
30. Упруго-геометрические характеристики сечения стержня при изгибе. Главные оси, главные моменты инерции 231
31. Условия равновесия элемента стержня и касательные напряжения изгиба 244
32. Изгиб и растяжение стержней с учетом деформации пластичности и ползучести 259
33. Прочностные модели надежности при изгибе 274
34. Прогибы стержней 282

Глава 9. **Потенциальная энергия деформации, вариационные методы расчета конструкций, общие свойства упругих систем** 305

35. Потенциальная энергия деформации 305
36. Вариационные методы 318
37. Вариационные методы и общие свойства упругих систем . . . 334

Глава 10. **Сложные модели стержней** 345

38. Тонкостенные стержни 345
39. Полупространственные модели стержня 376

Глава 11. **Кольца** 382

40. Изгиб колец 382
41. Осесимметричная деформация колец 387

Глава 12. **Динамика и устойчивость стержней** 392

42. Изгибные и продольные колебания стержней 392
43. Критические частоты вращения и крутильные колебания валов 413
44. Устойчивость стержней 425

Глава 13. **Модели разрушения** 443

45. Модели статического и длительного разрушения 443
46. Модели усталостного и малоциклового разрушения 460

Глава 14. **Цилиндры и диски** 467

47. Прочностные модели толстостенных труб и цилиндров. Напряжения и деформации 467
48. Прочностные модели дисков 482

Глава 15. Балки на упругом основании, криволинейные стержни и пружины 497
49. Изгиб балок на упругом основании 497
50. Криволинейные стержни и пружины 503

Глава 16. Пластинки и *оболочки* 518
51. Пластинки 518
52. Цилиндрические оболочки 533
53. Приближенные методы расчета прочности и устойчивости оболочек вращения при осесимметричном нагружении 541

Глава 17. Метод конечных элементов 550
54. Введение в метод конечных элементов 550
55. Основные уравнения метода конечных элементов 553

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов является одной из основных технических дисциплин, формирующих мышление инженера.

Многие выдающиеся ученые — С. П. Тимошенко, Н. М. Беляев, В. И. Феодосьев и другие посвятили свои усилия созданию курсов сопротивления материалов.

Можно отметить следующие особенности предлагаемого учебного пособия. Более полно изложены основные физические модели сплошной среды — модели упругости, пластичности и ползучести, методы решения упругопластических задач и задач ползучести применительно к стержням и другим элементам конструкций.

Достаточно широко представлены модели разрушения при действии статического, усталостного и малоциклового нагружения. Более обстоятельно описаны вариационные и другие численные способы, матричные и интегральные методы, методы начальных параметров.

Современный этап развития технических наук можно охарактеризовать как переход «от расчета к модели». Создаются математические модели конструкций, машин, отражающие их функциональное назначение, работоспособность, условия надежности.

В книге даны примеры построения прочностных моделей надежности, в которых напряжения и деформации сопоставляются с условиями разрушения при действующих нагрузках. В этом состоит одна из главных особенностей предлагаемого учебного пособия.

Авторы надеются, что книга окажется полезной для студентов, аспирантов и молодых инженеров при изучении проблем прочности и динамики машин и конструкций.

Авторы выражают благодарность Т. Н. Мардимасовой и Ю. А. Кувшинову за помощь при подготовке рукописи к печати.

И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Сопротивление материалов — наука о прочности и надежности конструкций

Проблемы прочности и надежности, задачи сопротивления материалов. Современный этап научно-технической революции характеризуется быстрым совершенствованием технических параметров изделий, интенсификацией рабочих процессов, повышением надежности и ресурса. Каждые пять-семь лет создаются новые поколения машин, отражающие достижения научно-технического прогресса. Происходит быстрая смена конструкционных материалов, внедряются новые технологические процессы.

Решающее влияние на инженерную науку и технику оказывает поразительно быстрое развитие и совершенствование ЭВМ. В ближайшие десятилетия проектирование и производство изделий авиационной техники и ряда других областей машиностроения станет автоматизированным с основополагающим участием ЭВМ. При проектировании с помощью ЭВМ создаются математические модели изделий, их машинный образ, которые затем служат основой разработки технологии и производства на станках с программным управлением.

В настоящее время задача состоит не только в разработке конструкции и технологического процесса, но и в оптимизации их параметров.

В современной технике возрастает значение проблем прочности. Это объясняется увеличением сложности технических изделий, необходимостью повышения эффективности, качества, надежности и долговечности.

На рис. 1.1 показана фотография самолета ИЛ-86, перевозящего 350 пассажиров. Понятно, что требования к прочности и надежности конструкции имеют первостепенную важность.

Сопротивление материалов — наука о прочности и надежности элементов конструкций. В ее задачи входят обобщение инженерного опыта создания машин и сооружений, разработка научных основ проектирования и конструирования надежных изделий, совершенствование методов оценки прочностной надежности и долговечности конструкций.

Основным содержанием сопротивления материалов является разработка моделей прочностной надежности элементов конструкций. С помощью таких моделей инженер может выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкции, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям.

Для практической деятельности инженеру необходимо выработать навыки создания простых и ясных моделей явлений и реальных объектов, отбрасывая второстепенные факторы.

Сопротивление материалов — инженерная наука, и для нее характерно использование приближенных методов, опирающихся на

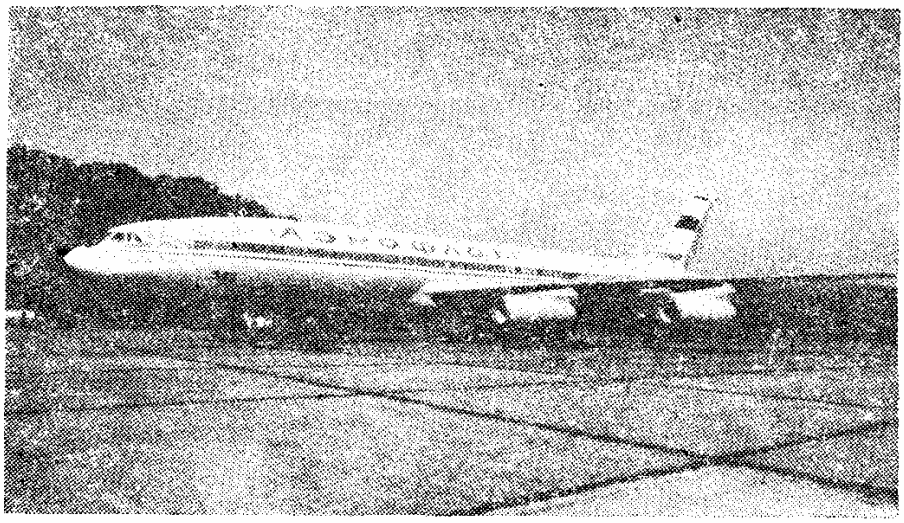


Рис. 1.1. Самолет ИЛ-86

опыт и экспериментальные исследования. Содержание курса сопротивления материалов непрерывно изменяется в связи с развитием техники. Если в прежних курсах сопротивления материалов преобладали вопросы прочности строительных конструкций, то в последние десятилетия важное значение получили проблемы прочности, динамики, жесткости и устойчивости объектов машиностроения, турбостроения, авиационной и космической техники и др.

В последние годы идет быстрый процесс математизации инженерных знаний. В сопротивлении материалов все большее место занимают методы, которые ранее применялись лишь в дисциплинах математического характера. Это стало возможным благодаря все возрастающему влиянию ЭВМ и созданию на основе их применения математических моделей прочностной надежности элементов конструкций.

Связь сопротивления материалов с другими научными дисциплинами. Сопротивление материалов опирается на математические науки, откуда заимствуется математический аппарат исследования, а также на методы теоретической механики (механики абсолютно твердого тела).

Сопротивление материалов примыкает к механике твердого деформируемого тела (теории упругости, пластичности и разрушения). Из этих наук сопротивление материалов черпает общие методы, более полные и точные решения отдельных задач.

Общие методы построения моделей прочностной надежности, разрабатываемые в сопротивлении материалов, получают дальнейшее развитие и уточнение в таких специальных технических дисциплинах, как прочность летательных аппаратов, расчеты на прочность и т. п.

Сопротивление материалов играет выдающуюся роль в инженерном образовании, выполняя связующую роль между теоретическими науками (математикой, механикой и др.) и конкретными техническими дисциплинами.

2. Модели прочностной надежности

Моделью называется совокупность представлений, зависимостей, условий, ограничений, описывающих процесс, явление. Модель — отображение объективной реальности — может иметь разные природу, структуру, язык и форму представления. Наиболее часто используются математические модели, отображающие реальный процесс, явление с помощью установления зависимостей между параметрами в виде различного рода уравнений, ограничений.

Надежностью называется свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени или наработки.

Существенно, что надежность, безотказность изделия (машины, конструкции, детали) связывается с определенным сроком службы. В большинстве случаев под сроком службы понимается время работы изделия под нагрузкой или число циклов нагружений. Например, для самолетных конструкций срок службы определяется числом полетных циклов. Число полетов является важным показателем для оценки работоспособности конструкции, так как наибольшие нагрузки на ряд элементов самолета возникают при посадке.

Допустимый срок службы изделия называется *ресурсом*. Ресурс указывается в виде общего времени наработки или числа циклов нагружений.

В ряде случаев в связи с возможностью коррозии и старения материала ограничивается календарное время хранения или эксплуатации изделия.

Прочностной надежностью называется отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

Отказом называется нарушение работоспособности изделия.

Критерии прочностной надежности, запасы прочности. Основной количественной характеристикой надежности является вероятность безотказности изделия. Вероятностью события называется число, характеризующее возможность появления события. Вероятность достоверного события принимают равной единице, вероятность невозможного события — равной нулю.

Вероятность события P можно определить путем проведения достаточно большого числа испытаний, и тогда

$$P = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m — число испытаний, при которых событие наблюдалось; n — общее число испытаний.

Если в технических требованиях на изделие указывается вероятность безотказной работы $P = 0{,}99$, то это означает, что за ресурс (время эксплуатации) может отказать (в среднем) одно изделие из ста.

При оценке прочностной надежности часто определяется вероятность разрушения

$$F = 1 - P. \tag{2}$$

Нахождение вероятности разрушения или вероятности безотказной работы на стадии проектирования изделий представляет весьма сложную задачу. В настоящее время основным методом оценки прочностной надежности является определение запасов прочности. Пусть q — параметр работоспособности изделия (например, действующее усилие, напряжение и т. п.).

Запасом прочности называется отношение

$$n = \frac{q_{кр}}{q_{max}}, \tag{3}$$

где $q_{кр}$ — критическое значение параметра, нарушающее работоспособность изделия; q_{max} — наибольшее значение параметра в рабочих условиях.

Условие прочностной надежности записывается в виде

$$n \geqslant [n], \tag{4}$$

где $[n]$ — допустимое значение запаса прочности.

Значение $[n]$ зависит от стабильности условий нагружения, уровня технологии, методов определения запаса прочности и ряда других факторов. Например, при действии постоянных во времени нагрузок часто принимают $[n] = 1{,}3—2$, при переменных нагрузках случайного характера $[n] = 3—5$. Допустимые значения запасов прочности назначают с учетом инженерного опыта создания подобных конструкций.

В некоторых областях техники имеются нормы прочности, регламентирующие допустимые величины запасов прочности. Запасы прочности представляют собой критерии сопоставления прочностной надежности вновь создаваемой конструкции с подобными конструкциями, имеющими положительный опыт эксплуатации.

Модели прочностной надежности. Структура модели прочностной надежности показана на рис. 1.2. Конечной целью, которая должна быть достигнута с помощью модели, является определение запасов

прочности и (или) вероятности разрушения. Для определения критериев прочностной надежности следует разработать или принять четыре вспомогательные модели — материала, формы, нагружения и разрушения. Построение указанных частных моделей является

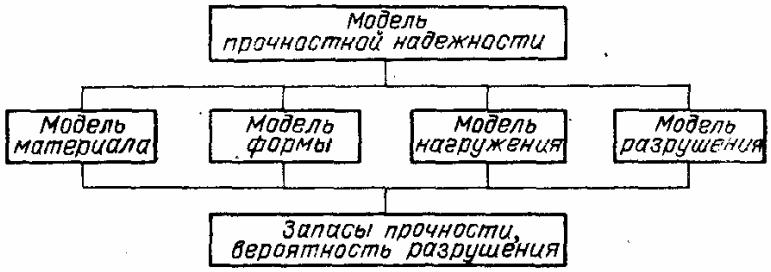


Рис. 1.2. Структура модели прочностной надежности элемента конструкций

важным этапом, существенно влияющим на достоверность оценки прочностной надежности.

При разработке моделей приходится идти на компромисс между достаточно полным и адекватным описанием материала, формы, условий работы и нагружения элемента и сложностью самой модели. Рассмотрим более подробно построение частных моделей и начнем с моделей материала.

Конструкционные материалы. В качестве материала машиностроительных конструкций используются в основном металлы и их сплавы, а также различные неорганические и органические материалы (полимеры, пластмассы, волокна, керамика и др.). В последнее время нашли применение композиционные материалы, состоящие из высокопрочных нитей стекла, бора, углерода и связующего (полимеров и металлов). В строительных конструкциях используются бетон (смесь крупных и мелких каменных частиц, скрепленных цементом), железобетон (бетон, усиленный стальными стержнями), кирпич, дерево и другие материалы.

Основными конструкционными материалами в машиностроении являются сплавы черных и цветных металлов.

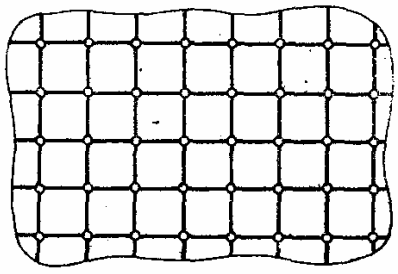


Рис. 1.3. Схема кристаллической решетки металлов

Металлы имеют кристаллическое строение, представляющее регулярную структуру (рис. 1.3), в которой в определенном порядке размещены атомы вещества. Многие металлы имеют кубическую объемноцентрированную структуру (железо, хром, молибден), кубическую гранецентрированную структуру (алюминий, медь)

(рис. 1.4). Атомный радиус — половина расстояния между ближайшими атомами в кристаллической структуре — составляет 1—2 Å (Å — ангстрем — 10^{-8} см). Реальные металлы и их сплавы имеют обычно поликристаллическое (зернистое) строение (рис. 1.5). Образование кристаллов в процессе охлаждения сплава начинается из очень большого числа центров. Каждое зерно — это кристалл,

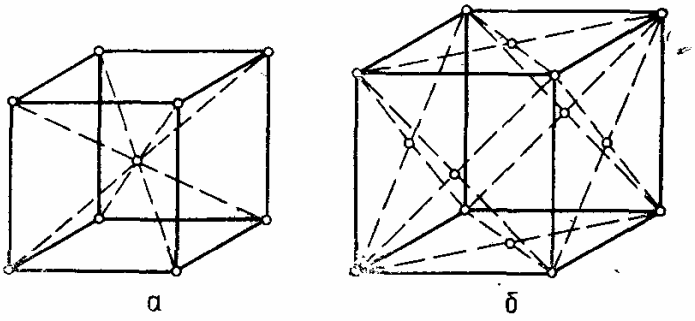


Рис. 1.4. Структура элементов кристаллической решетки: *а* — кубическая объемноцентрированная структура; *б* — кубическая гранецентрированная структура

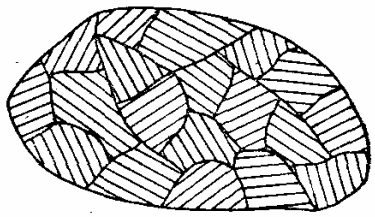


Рис. 1.5. Зернистое строение металлов и сплавов

принявший неправильную форму, так как его дальнейшему росту помешали соседние кристаллы.

Прочность сплавов определяется не только прочностью зерен, но и прочностью их границ. Например, при работе сплава при высоких температурах разрушение проходит по границам зерен.

Три уровня моделей материала. В настоящее время исследования материала ведутся на различных уровнях с использованием разных моделей материала. Условно можно выделить три уровня моделей материала (рис. 1.6).

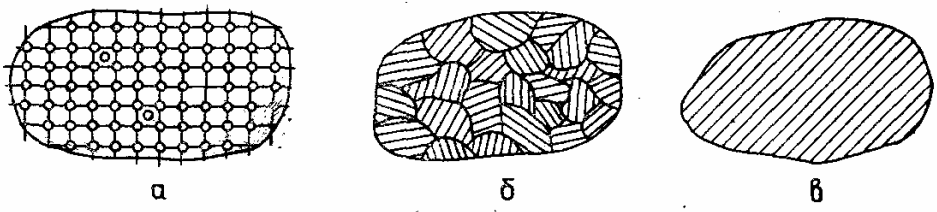


Рис. 1.6. Три уровня моделей материала: *а* — физические модели; *б* — инженерно-физические модели; *в* — инженерные модели (модель сплошной среды)

Физические модели изучаются в физике твердого тела. Для описания поведения материалов под действием напряжений и других физических свойств рассматривается модель в виде кристаллической решетки атомов.

В реальных материалах кристаллические решетки имеют различного рода дефекты, снижающие прочность (теоретическая прочность металлов приблизительно в 10 раз выше практически достигнутой). В решетке могут быть точечные дефекты — вакансии (от-

сутствие атома в одном из узлов решетки), внедрения (один из атомов сместился или внедрился в другую ячейку) (рис. 1.6, *а*).

Встречаются и другие несовершенства кристаллических решеток.

В настоящее время с помощью электронных микроскопов и других приборов можно наблюдать тонкую структуру металлов, что дает возможность изучать на физическом уровне сопротивление материалов внешним воздействиям. На рис. 1.7 показана фотография структуры материала ВТЗ-1 в месте разрушения при увеличении в 6600 раз, полученная на электронном микроскопе. На

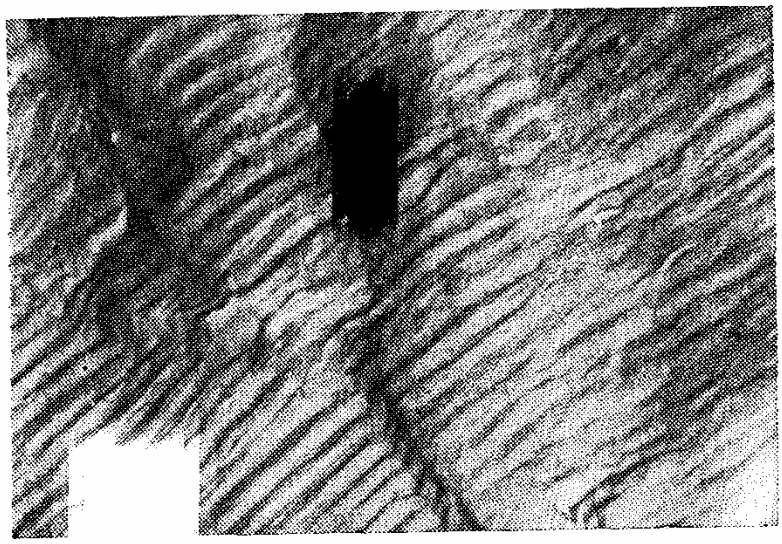


Рис. 1.7. Фотография излома материала

фотографии видны следы отдельных нагружений в виде «бороздок» по мере развития трещины.

Физические модели направлены на изучение влияния несовершенств кристаллической решетки на их прочность, на исследования возможностей повышения прочности и пластичности металлов и сплавов, но они не дают оценки механических свойств реальных материалов.

Инженерно-физические модели рассматривают материал как совокупность зерен с различной ориентированной кристаллической структурой (рис. 1.6, *б*). Для описания свойств реальных тел учитывается случайный характер размеров зерен и направлений кристаллографических плоскостей. Подобные модели позволяют объяснить ряд важных особенностей поведения материала, но еще не могут служить основой практической оценки прочности материалов. Основное назначение инженерно-физических моделей — выработать научные основы статистического описания механических и других свойств материала.

Инженерные модели сплошной среды рассматривают материал как сплошное и однородное тело. Такие модели осредняют свойства в объемах материала, содержащих достаточно большое число струк-

турных элементов (например, зерен материала). Однородность понимается в том смысле, что все неоднородные дискретные структурные элементы заменяются «осредненной» непрерывной средой. Замена материала дискретного, разнородного строения (например, мелкозернистого) однородной средой имеет практический смысл лишь в том случае, если осреднение возможно в пределах объема материала, малого по сравнению с объемом всего элемента конструкции.

Вопрос о допустимости применения модели сплошной среды для конкретного конструкционного материала решается на основании экспериментальных исследований. Проведенные опыты с образцами металлов и других конструкционных материалов показали, что применение модели сплошной однородной среды вполне оправданно. Инженерные модели материала широко применяются в задачах прочностной надежности в сочетании с системой экспериментальных исследований.

Модели материала в общей модели прочностной надежности. При построении моделей прочностной надежности в сопротивлении материалов используется модель сплошного однородного тела.

Материал рассматривается как сплошное однородное деформируемое тело. Деформируемым называется тело, которое после приложения внешних нагрузок изменяет свою форму и размеры. Учет деформируемости является весьма важным, так как позволяет решить вопрос о распределении силового потока внутри тела.

Обычно в сопротивлении материалов принимают, что изменение формы тела под действием внешних нагрузок невелико. Это в большинстве случаев соответствует реальной ситуации при работе материала в элементах конструкций.

Модель сплошной среды позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять при этом методы математического анализа.

Учитывая физические свойства, присущие в той или иной мере всем конструкционным материалам, модель материала наделяют свойствами упругости, пластичности и ползучести. *Упругостью* называется свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок. Это свойство материалов знакомо каждому из жизненного опыта (например, прогиб доски или ветки дерева, прогиб моста, железнодорожного полотна и т. п.). *Пластичностью* называется свойство тела сохранять после прекращения действия нагрузки полностью или частично полученную при нагружении деформацию. Это свойство также хорошо известно (изменения формы тел из глины при давлении, проволоки при большом изгибе и т. п.). *Ползучестью* называется свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках (осадка фундаментов под действием веса, постепенное удлинение каната, несущего груз, ослабление затяжки болтов вследствие их удлинения со временем и т. д.).

Свойства упругости, пластичности и ползучести и некоторые другие физические свойства будут в дальнейшем рассмотрены более подробно.

Модели формы. Геометрическая форма элементов конструкций часто бывает весьма сложной. На рис. 1.8, *а* показан вал винта самолета, передающий крутящий момент от двигателя к винту, на рис. 1.8, *б* приведено зубчатое колесо, сидящее на валу редуктора.

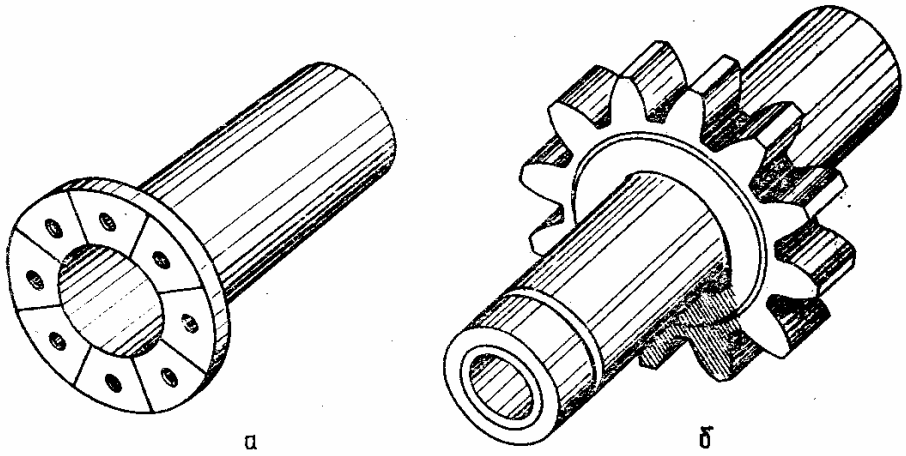


Рис. 1.8. Геометрическая форма элементов конструкций

Учет всех особенностей геометрической формы часто невозможен или нецелесообразен, так как приводит к сложным моделям.

Для определения напряженного и деформированного состояний применяют упрощенные, схематизированные модели формы элементов конструкций. Основными моделями формы в моделях прочной надежности являются: стержни, пластинки, оболочки, пространственные тела (массивы) (рис. 1.9). Модели формы элемента

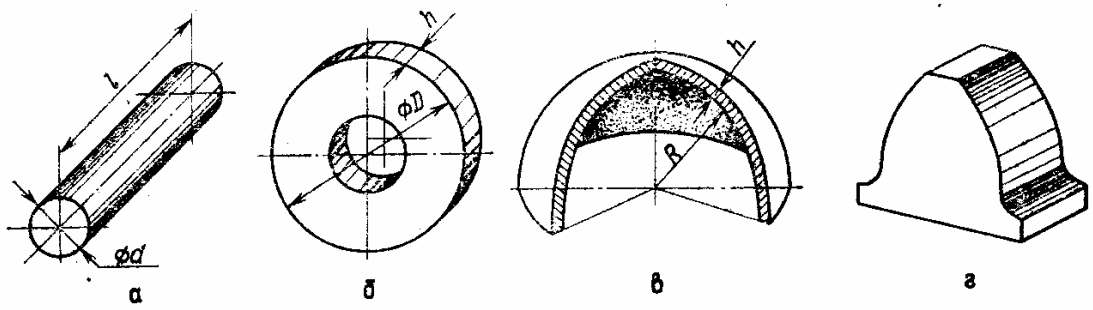


Рис. 1.9. Основные модели формы в моделях прочностной надежности

конструкции представляют собой схематизированное описание геометрии элемента с помощью стандартных, типовых элементов. Это позволяет применять для расчета более простые методы, использующие особенности геометрической формы типовых элементов. Стержни являются основной геометрической моделью сопротив-

ления материалов. *Стержнем* называется тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной (рис. 1.10). Образование стержня можно представить как результат движения вдоль пространственной кривой (оси стержня) плоской фигуры (поперечного сечения стержня). Центр тяжести фигуры остается при движении на оси стержня, плоскость фигуры перпендикулярна оси. Поперечное сечение стержня может быть переменным по длине (рис. 1.11).

Если при движении вдоль оси поперечное сечение поворачивается, то стержень называется закрученным. На рис. 1.12 показана лопатка осевого компрессора, которая может рассматриваться как закрученный стержень переменного сечения. В авиационной и строительной технике часто применяют тонкостенные стержни, у которых один размер сечения мал по отношению к другому и оба они малы по сравнению с длиной стержня (рис. 1.13). Экспериментальные исследования показали возможность применения теории стержней к элементам конструкций, не вполне удовлетворяющим условию малости размеров сечения по сравнению с длиной. Для приближенной оценки общего напряженного состояния крыло самолета, корпус ракеты, зуб шестерни и др. могут рассматриваться на основе теории стержней (рис. 1.14).

Пластинки ограничиваются двумя плоскими или слабоизогнутыми поверхностями. На рис. 1.15 показаны прямоугольная и круглая пластинки. Толщина пластинки много меньше двух других размеров, т. е. $h \ll a$, $h \ll b$, $h \ll D$. Диски компрессоров и турбин авиационных двигателей часто рассматриваются как пластинки переменной толщины.

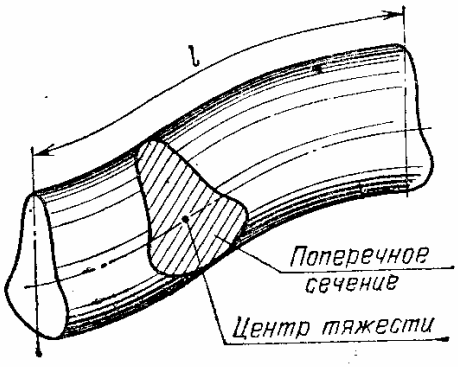


Рис. 1.10. Схема образования стержня

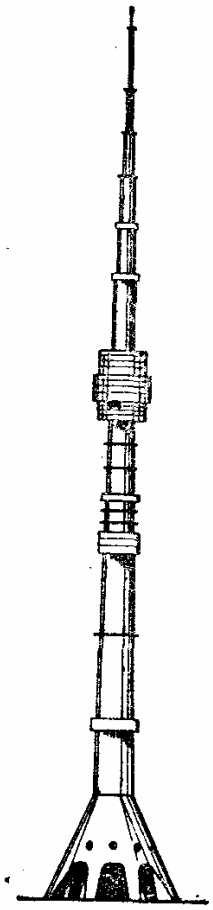


Рис. 1.11. Пример стержня переменного сечения (телевизионная башня Центрального телевидения)

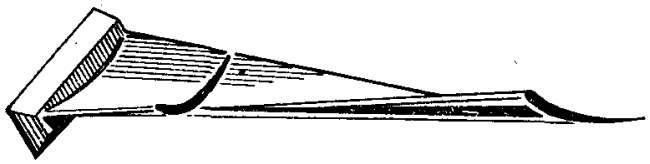


Рис. 1.12. Лопатка компрессора как закрученный стержень переменного сечения

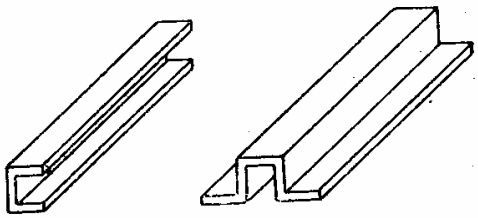


Рис. 1.13. Тонкостенные стержни

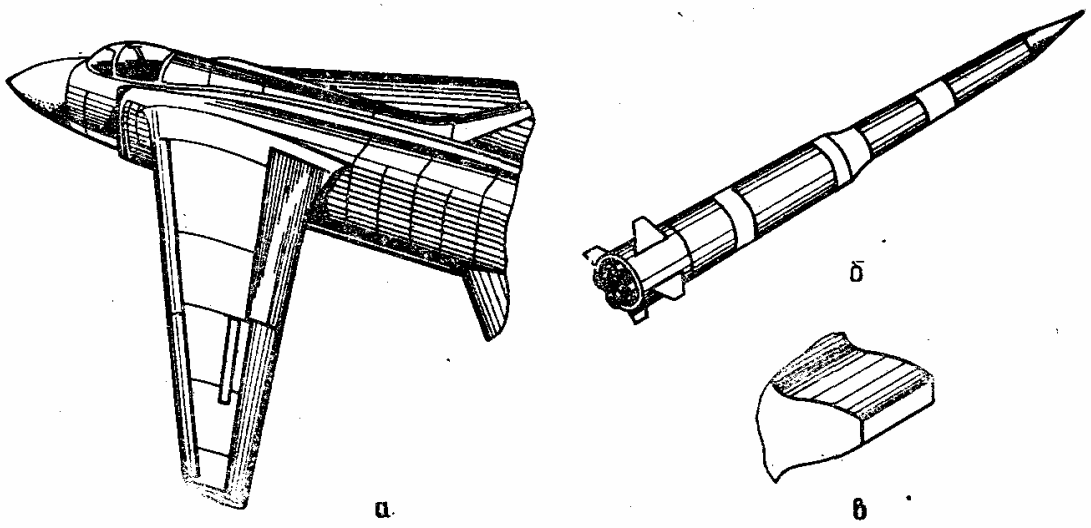


Рис. 1.14. Стержневые модели конструкций: *а* — крыло самолета; *б* — корпус ракеты; *в* — зуб шестерни

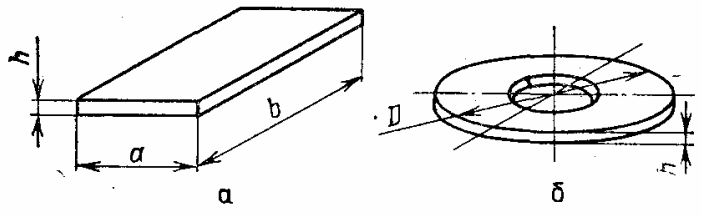


Рис. 1.15. Тонкие пластинки: *а* — прямоугольные; *б* — круглые

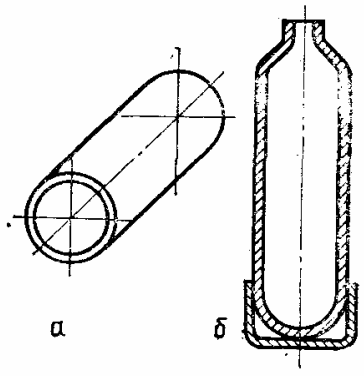


Рис. 1.16. Оболочки: *а* — цилиндрическая оболочка (корпус двигателя); *б* — оболочка сосуда высокого давления

Оболочки представляют собой тела, ограниченные двумя близкими поверхностями. Расстояние между поверхностями (по нормали) — толщина оболочки — мало по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. На рис. 1.16 приведены цилиндрическая оболочка и оболочка сосуда высокого давления.

Пространственное тело (массив) — модель элемента конструкции, в котором все размеры тела соизмеримы. Пространственные

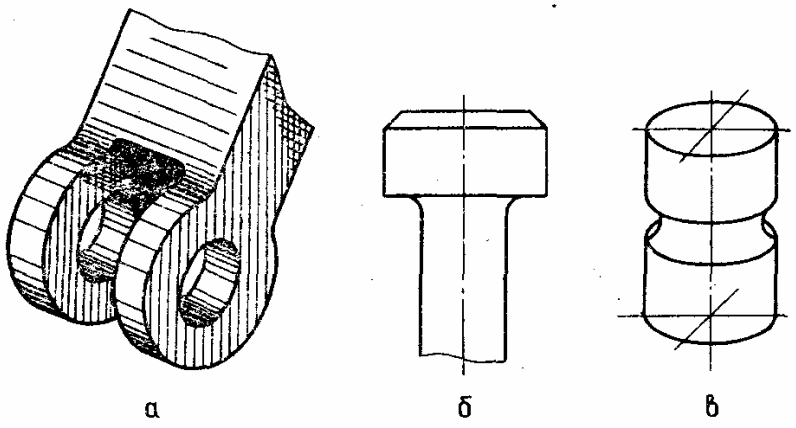


Рис. 1.17. Пространственные тела как элементы конструкций: *а* — соединительный элемент в виде проушины; *б* — головка болта (стержня), работающего на растяжение; *в* — стержень с выточкой

элементы часто вводятся для учета концентрации усилий (напряжений), возникающих в концевых областях простых моделей или в местах резкого изменения сечений (отверстия, выточки и т. п.; рис. 1.17).

Реальные детали машин, элементы конструкций могут быть с достаточной точностью представлены сочетанием более простых

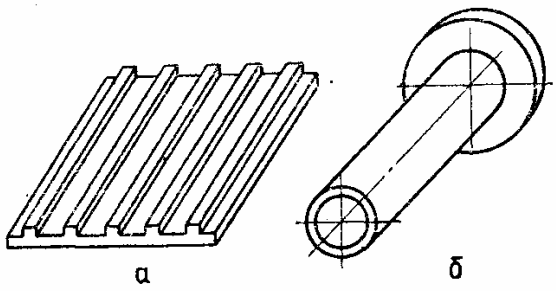


Рис. 1.18. Сочетание моделей стержней и пластинок, дающее достаточно полное отображение геометрической формы элементов конструкций: *а* — подкрепленная панель обшивки самолета; *б* — вал с фланцем

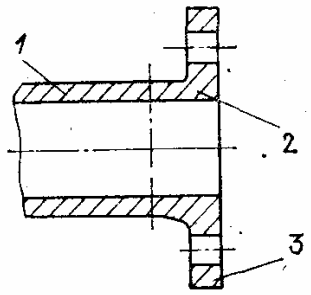


Рис. 1.19. Модель формы фланца: *1* — оболочка; *2* — пространственное тело; *3* — пластинка

моделей формы. На рис. 1.18 показаны примеры сочетания моделей стержней и пластинок, приводящие к достаточно полному отображению геометрической формы элементов некоторых конструкций. Часто оказывается целесообразным использовать разные уровни

(степени сложности) моделей. Например, в месте перехода от трубы к фланцу возникает концентрация напряжений, зависящая от радиуса скругления r (рис. 1.19).

Модель формы более высокого уровня можно образовать сочетанием моделей стержня, пластинки и пространственного тела.

Расчет модели более низкого уровня (см. рис. 1.18, *б*) дает общее напряженное состояние, которое используется для оценки напряжений на сопрягаемых границах пространственного тела. Модели формы и их синтез имеют существенное значение для автоматизированного проектирования и конструирования.

Модели нагружения. Внешние силы, действующие на элемент конструкции, подразделяют на три группы: 1) сосредоточенные силы, 2) распределенные силы, 3) объемные или массовые силы.

Сосредоточенные силы — силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т. п.).

Распределенные силы приложены к значительным участкам поверхности (например, давление воздуха на крыло самолета, давление жидкости или газа на стенки сосуда).

Объемные или массовые силы приложены к каждой частице материала (например, силы тяжести, инерционные усилия).

При построении модели нагружения внешние нагрузки схематизируются в виде одной из указанных групп, причем принимаемая модель зависит также от задач описания. Например, для расчета

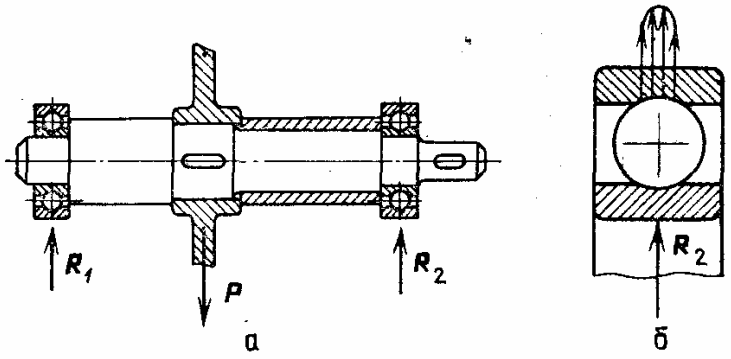


Рис. 1.20. Различные модели нагружения для расчета вала и шарика шарикоподшипника

вала шестерни реакция усилия на опоре может рассматриваться как сосредоточенная нагрузка (рис. 1.20, *а*); для расчета долговечности шарика то же усилие взаимодействия схематизируется в виде распределенного контактного давления (рис. 1.20, *б*).

Важным моментом при разработке модели нагружения является учет величин внешних нагрузок и характера их изменения по времени. Величины нагрузок определяются в основном параметрами рабочего процесса изделия (например, мощностью, грузоподъемностью, давлением среды, числом оборотов вращающихся деталей

и т. п.). Для приближенных моделей учитываются только наибольшие, опасные для прочности нагрузки. При построении уточненных моделей принимается во внимание вся «история нагружения».

Довольно часто величины нагрузок имеют случайный характер, и для их оценки применяют вероятностные методы. Нагрузки разделяют на *стационарные* (постоянные, статические) и *нестационарные* (переменные).

Статическая нагрузка возрастает от нуля до своей номинальной величины и остается постоянной во всем процессе нагружения. Примеры статической нагрузки — нагружение строительных конструкций (каркаса жилого дома) весом здания, нагружение корпуса ракеты одноразового действия внутренним давлением и т. п. В действительности представление о статической нагрузке дает упрощенную модель нагружения. На реальные конструкции действуют дополнительные силы (например, динамические и др.). Однако модель статического нагружения приводит к простым и полезным методам анализа, широко используемым в моделях прочностной надежности.

Переменное нагружение — нагружение, изменяющееся во времени. Наиболее важный класс нестационарных нагружений — циклические нагружения. Если циклы образуются за счет запуска и остановки машины, то нагружение обычно не превышает 10^4—10^5 циклов и такое нагружение называется малоцикловым. При нагружении, связанном с упругими колебаниями элементов конструкций, число циклов нагружения часто превышает 10^5—10^6 (многоцикловое нагружение). Обычно частота колебаний нагрузки при многоцикловом нагружении составляет 10^2—10^4 в секунду.

Нередко многоцикловое нагружение имеет случайный характер. Тогда модель нагружения должна содержать распределение плотности вероятности нагрузок или другие статистические модели нагружения. Часто встречается динамическое ударное нагружение (соударения элементов конструкций, взрывное нагружение и т. п.). Ударное нагружение характеризуется очень высокой скоростью возрастания нагрузки, что влияет на характеристики деформирования материала.

Модели нагружения должны учитывать воздействие полей и сред. Наиболее часто встречается в современной технике воздействие температурного поля. Это воздействие проявляется двояким образом. Пониженная и повышенная температуры влияют на механическую прочность материала. При неравномерном нагреве тела создаются температурные напряжения, величина которых часто оказывается соизмеримой с напряжениями от внешних сил. В некоторых случаях приходится учитывать влияние нейтронного излучения на свойства материала, влияние электромагнитного поля и др.

Прочностная надежность существенно зависит от воздействия коррозионных сред.

Итак, модели нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, по распределению, во времени, а также по воздействию внешних полей и сред.

Модели разрушения. В соответствии с общей схемой моделей прочностной надежности (см. рис. 1.2) модели разрушения являются завершающими. После обоснованного выбора моделей формы, материала, нагружения переходят к непосредственной оценке надежности с помощью моделей разрушения.

Модели разрушения представляют собой уравнения (условия), связывающие параметры работоспособности изделия (элемента конструкции) в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность. Подразумевается начало перехода от состояния прочности к началу разрушения. Эти условия часто называют *условиями прочности.* Обычно рассматриваются четыре модели разрушения в зависимости от условий нагружения: 1) статического разрушения, 2) длительного статического разрушения, 3) малоциклового разрушения, 4) усталостного разрушения.

На рис. 1.21 показан характер разрушения в зависимости от числа циклов нагружения. При малом числе циклов ($N < 10^2$) развиваются значительные пластические деформации (рис. 1.21, *а*)

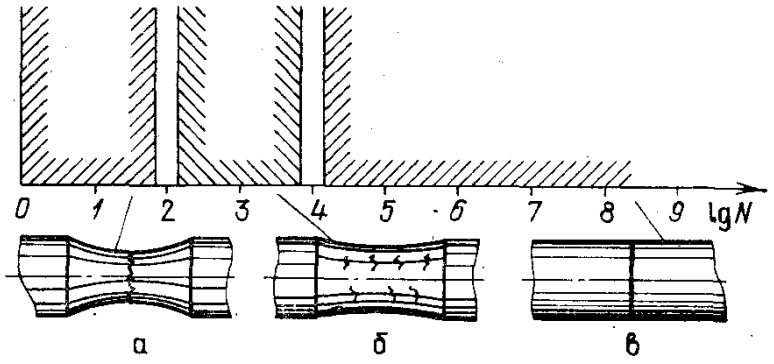


Рис. 1.21. Характер разрушения в зависимости от числа циклов нагружений; *а* — статическое разрушение; *б* — малоцикловое разрушение; *в* — усталостное разрушение

(статическое разрушение), при большом числе циклов ($N > 10^5$) пластические деформации отсутствуют (рис. 1.21, *в*) (усталостное разрушение). В промежуточной области ($10^2 < N < 10^5$) разрушение носит смешанный характер (рис. 1.21, *б*) (малоцикловое разрушение).

Если на элемент конструкции действует высокая температура (для алюминиевых сплавов свыше 200°С, для стальных и титановых сплавов свыше 400°С, для жаропрочных сплавов свыше 600°С), то в этом случае рассматривается так называемая *длительная прочность материала.* Сопротивление материала зависит не только от величины действующего усилия, но и от длительности самого воздействия.

На структуру моделей разрушения (выбор параметров работоспособности) оказывают влияние свойства материала, из которых очень важным является его пластичность. При недостаточной пластичности возникают хрупкие разрушения, для которых условия разрушения носят особый характер.

Сложность разработки моделей разрушения часто требует проведения дополнительных экспериментальных исследований образцов материала или самих элементов конструкций в условиях, близких к реальным.

Замечание. Конечной целью инженерного проектирования является создание работоспособной и надежной конструкции.

Для оценки надежности детали, элемента конструкции или всего изделия в целом разрабатываются модели прочностной надежности, которые завершаются определением запасов прочности и вероятности разрушения. Конечно, в практических расчетах не все этапы построения модели прочностной надежности прорабатываются достаточно полно. Общая расчетная схема часто выбирается по сложившимся традициям; многое зависит от опыта и интуиции инженера. Однако повышение ответственности технических систем (особенно в авиационной, ракетной и ядерной технике, в химическом и энергетическом машиностроении и других областях техники) требует создания достаточно обоснованных моделей прочностной надежности.

Для сложных элементов конструкции модели прочностной надежности реализуются в виде пакетов программ на ЭВМ.

Условия разработки и создания моделей прочностной надежности, включая необходимый объем экспериментальных исследований, часто регламентируются нормами прочности.

ГЛАВА 2

НАПРЯЖЕНИЯ

Во время работы на элементы конструкции действуют внешние усилия, создающие напряжения и деформации. Рассмотрим общие методы анализа напряженного состояния.

3. Нормальные и касательные напряжения

Метод сечений. Пусть на элемент конструкции, условно изображенный на рис. 2.1, *а*, действуют внешние силы (сосредоточенные или распределенные на участках поверхности). Считаем, что элемент конструкции под действием указанных сил находится в равновесии. Проведем плоскость П, которая рассечет элемент на две части, и рассмотрим одну из частей, например левую (рис. 2.1, *б*).

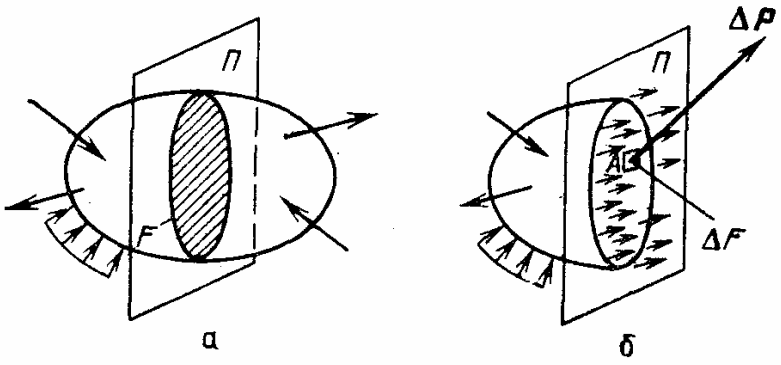


Рис. 2.1. Напряжения в сечении элемента

Приложим к поверхности сечения П силы взаимодействия между обеими частями элемента. Когда тело находится в равновесии, то и любая часть тела также будет в равновесии, если к поверхности сечения приложить силы взаимодействия между частями. Силы, действующие в сечении, представляют собой силы взаимодействия между частицами материала, вызванные внешней нагрузкой на элемент. Из условия равновесия рассматриваемой части тела можно определить главный вектор и главный момент внутренних сил, действующих по сечению П. В этом состоит сущность метода сечений — одного из важных методов механики деформируемых сред. Распределение внутренних усилий по сечению заранее неизвестно и составляет одну из главных задач дальнейшего изучения.

Понятие напряжения. Оказывается необходимым ввести характеристику интенсивности сил взаимодействия — напряжения, которые в разных точках сечения могут быть, разумеется, различными.

Пусть на малую площадку ΔF, расположенную в окрестности точки A (рис. 2.1, *б*), действует сила $\Delta \mathbf{P}$.

Назовем напряжением $\mathbf{p}$ в точке A рассматриваемого сечения предел отношения

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta F} \tag{1}$$

при условии, что ΔF стремится к нулю.

Вектор напряжения совпадает по направлению с вектором усилия $\Delta \mathbf{P}$. Отметим, что напряжения в сечении элемента не могут быть определены только из уравнений статики (уравнений равновесия). Для их нахождения, как будет ясно из дальнейшего, необходимо разобраться в характере деформаций элемента. Однако в ряде случаев можно сделать некоторые обоснованные предположения о распределении напряжений, что позволит найти их величину и без рассмотрения деформаций. Использование предположений (гипотез), основанных на результатах экспериментальных исследований и дающих достаточную точность при решении инженерных задач, составляет примечательную черту прикладных технических дисциплин, в частности сопротивления материалов.

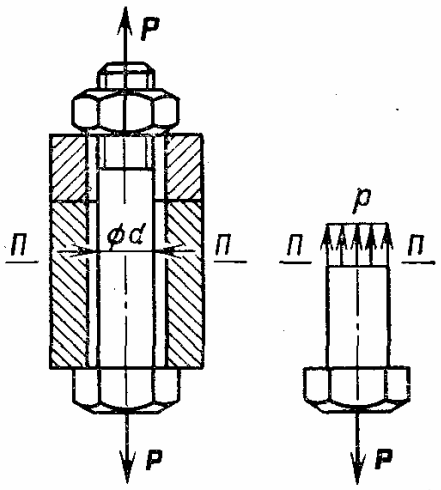


Рис. 2.2. Напряжения растяжения в сечении болта

При растяжении болта усилием P (рис. 2.2) есть все основания предположить, что напряжения в сечении II (поперечное сечение стержня болта) направлены нормально к плоскости сечения и распределены равномерно. Тогда значение растягивающего напряжения

$$p = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{2}$$

Из последнего равенства очевидно, что напряжение имеет размерность

$$\dim p = \left[\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}\right].$$

Размерность обозначается символом dim (начальные буквы слова «dimension» — размерность).

В международной системе единиц СИ для измерения напряжения (давления) применяется специальная единица — паскаль: 1 Па = 1 Н/м^2. Это — очень маленькая величина, и практические расчеты ведут, измеряя напряжения в мегапаскалях (МПа), причем

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

В технической литературе напряжения часто измеряют в системе

МКС. Связь единиц измерения такова: 1 МПа = 0,1 кгс/мм². В общем случае напряжения в разных точках сечения могут быть различными.

Еще одно важное обстоятельство состоит в том, что напряжение в точке зависит также и от положения плоскости сечения. Поэтому надо всегда указывать не только точку тела, где определяется напряжение, но и ориентацию сечения (площадки), проходящего через рассматриваемую точку.

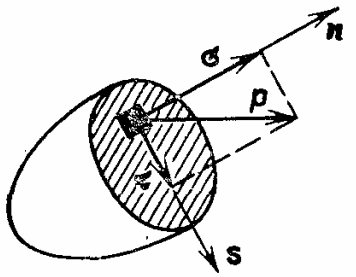


Рис. 2.3. Нормальное и касательное напряжения в площадке

Нормальные и касательные напряжения. Напряжение **p** есть вектор и как всякий вектор может быть представлен нормальной (по отношению к площадке) и касательной составляющими (рис. 2.3). Нормальную составляющую вектора напряжений будем обозначать σ, касательную τ. Экспериментальными исследованиями установлено, что влияние нормальных и касательных напряжений на прочность материала различно, и потому в дальнейшем окажется необходимым всегда раздельно рассматривать составляющие вектора напряжений.

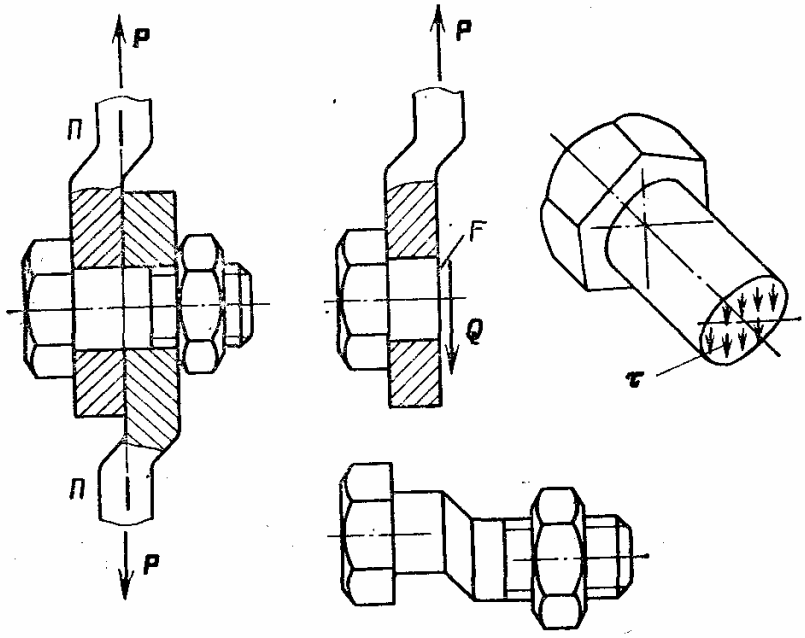


Рис. 2.4. Касательное напряжение при срезе болта

При растяжении болта (см. рис. 2.2) в поперечном сечении действует нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2}. \qquad (3)$$

При работе болта на срез (рис. 2.4) в сечении П должно возникать усилие, уравновешивающее усилие P.

Из условий равновесия следует, что

$$Q = P. \tag{4}$$

Если приближенно считать, что касательные напряжения во всех точках сечения одинаковы, то они будут равны

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{5}$$

В действительности последнее соотношение определяет некоторое среднее напряжение по сечению, которым иногда пользуются для приближенных оценок прочности. На рис. 2.4 показан вид болта после воздействия значительных усилий. Началось разрушение болта, и одна его половина сместилась относительно другой: произошла деформация сдвига или среза.

Примеры определения напряжений в элементах конструкций. Разберем простейшие примеры, в которых предположение о равномерном распределении напряжений можно считать практически приемлемым. В таких случаях величины напряжений определяются с помощью метода сечений из уравнений статики (уравнений равновесия).

Кручение тонкостенного круглого вала. Тонкостенный круглый вал (труба) передает крутящий момент (например, от авиационного двигателя на воздушный винт). Требуется определить напряжения в поперечном сечении вала (рис. 2.5, *а*). Проведем плоскость сечения П перпендикулярно оси вала и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 2.5, *б*).

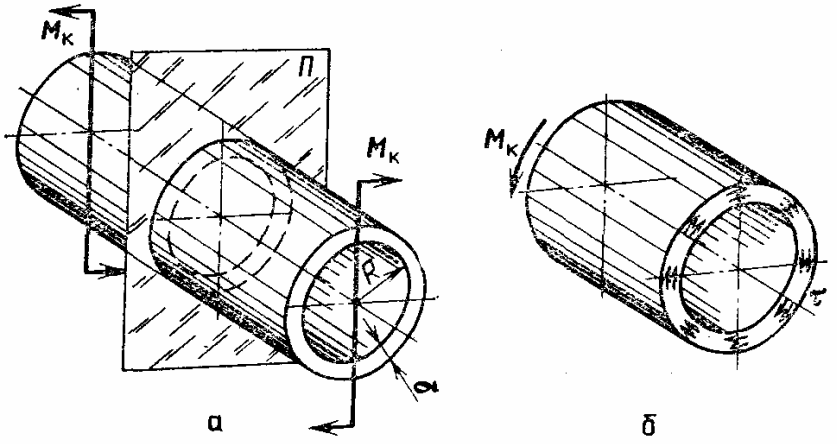


Рис. 2.5. Кручение тонкостенного круглого вала

Из условия осевой симметрии, учитывая малую толщину стенки, можно принять, что напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы. Строго говоря, такое предположение справедливо только при очень малой толщине стенки, но в практических расчетах

его используют, если толщина стенки δ

$$\delta \leqslant 0{,}2\ R_{ср},$$

где $R_{ср}$ — средний радиус сечения.

Внешние силы, приложенные к отсеченной части вала, сводятся только к крутящему моменту, и потому нормальные напряжения в поперечном сечении должны отсутствовать. Крутящий момент уравновешивается касательными напряжениями, момент которых равен

$$\tau \cdot 2\pi R_{ср}^2 \delta = M_к.$$

Из последнего соотношения находим касательное напряжение в сечении вала:

$$\tau = \frac{M_к}{2\pi R_{ср}^2 \delta}. \qquad (6)$$

Напряжения в тонкостенном цилиндрическом сосуде (трубе). В тонкостенном цилиндрическом сосуде действует давление p

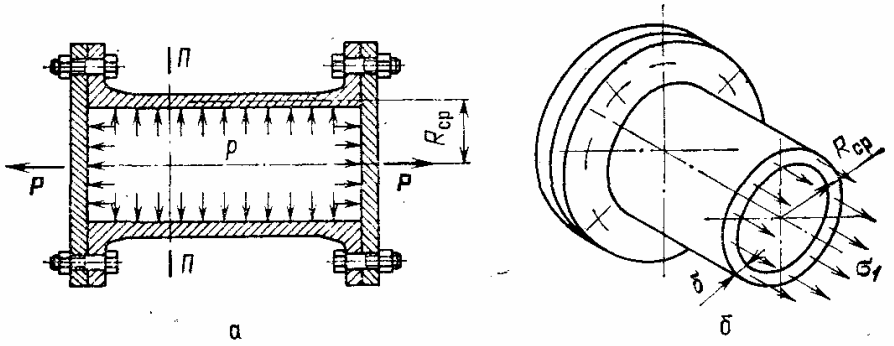


Рис. 2.6. Напряжения в продольном направлении в стенке цилиндрической трубы

(рис. 2.6, *а*). Проведем сечение плоскостью П, перпендикулярной оси цилиндрической оболочки, и рассмотрим равновесие отсеченной части. Давление, действующее на крышку сосуда, создает усилие

$$P = \pi\left(R_{ср} - \frac{1}{2}\delta\right)^2 p \approx \pi R_{ср}^2 p. \qquad (7)$$

Это усилие уравновешивается силами, возникающими в поперечном сечении оболочки, и интенсивность указанных сил — напряжение σ_1 — будет равна

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi R_{ср}\delta} = \frac{\pi R_{ср}^2 p}{2\pi R_{ср}\delta} = p\frac{R_{ср}}{2\delta}. \qquad (8)$$

Толщина оболочки δ предполагается малой по сравнению со средним радиусом $R_{ср}$, напряжения σ_1 считаются равномерно распределенными во всех точках поперечного сечения (рис. 2.6, *б*).

Однако на материал трубы действуют не только напряжения в продольном направлении, но и окружные (или кольцевые) напряжения в перпендикулярном направлении. Для их выявления выделим двумя сечениями кольцо длиной l (рис. 2.7), а затем проведем диаметральное сечение, отделяющее половину кольца.

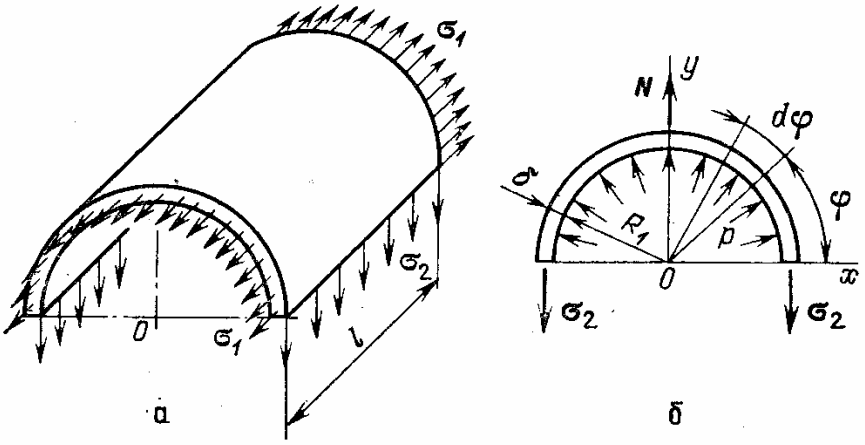


Рис. 2.7. Напряжения в стенке цилиндрической трубы в окружном направлении

На рис. 2.7, *а* показаны напряжения на поверхностях сечения. На внутреннюю поверхность трубы радиусом R_1 действует давление p.

Рассмотрим теперь равновесие половины кольца (рис. 2.7, *б*). Найдем сначала равнодействующую силу давления, спроектировав силы на вертикальную ось. К элементу поверхности $lR_1d\varphi$ приложено усилие, вертикальная составляющая которого

$$plR_1d\varphi \sin\varphi.$$

Интегрируя по всей поверхности, найдем величину вертикального усилия:

$$N = \int_0^{\pi} plR_1 \sin\varphi d\varphi = 2plR_1.$$

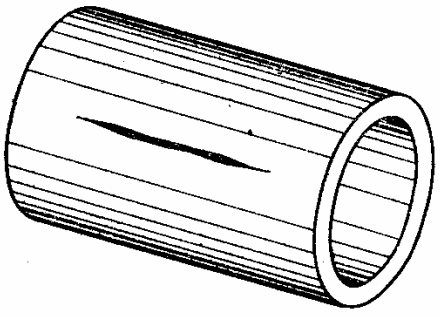


Рис. 2.8. Трещина в цилиндрической оболочке при действии разрушающего внутреннего давления

Из условия равновесия половины кольца получаем

$$2l\delta\sigma_2 = N,$$

что дает следующее равенство:

$$\sigma_2 = p\frac{R_1}{\delta}. \qquad (9)$$

В приближенных расчетах полагают $R_1 \approx R_{ср}$, и тогда

$$\sigma_2 = p\frac{R_{ср}}{\delta}. \qquad (10)$$

Сопоставляя равенства (10) и (8), заключаем, что в тонкостенной цилиндрической оболочке окружные напряжения σ_2 в два раза больше продольных.

На рис. 2.8 показан общий вид разрушения оболочки (трубы) от значительного внутреннего давления. Трещина возникает под действием растягивающих напряжений σ_2.

4. Напряженное состояние в точке

Для оценки надежности элемента конструкции следует рассмотреть наиболее напряженные места, а в них наиболее опасные точки. Именно в таких точках при неблагоприятных условиях будет начинаться разрушение. Надо знать напряжения во всех площадках, проходящих через опасную точку, т. е. знать напряженное состояние в точке.

В рассматриваемой точке тела поместим начало системы координат x, y, z (рис. 2.9) и бесконечно близкими параллельными сечениями выделим параллелепипед, размеры ребер которого равны dx, dy и dz. Действие остального тела на параллелепипед заменим соответствующими напряжениями.

Обозначение напряжений и правило знаков. На рис. 2.9 показаны нормальные и касательные напряжения по граням параллелепипеда. Нормальные напряжения в площадке обозначаются σ, касательные τ. Нижний индекс в обозначении нормальных напряжений указывает направление нормали к площадке (σ_x, σ_y, σ_z). В обозначениях касательных напряжений содержится два нижних индекса: первый указывает направление нормали к площадке, второй — направление вектора касательных напряжений.

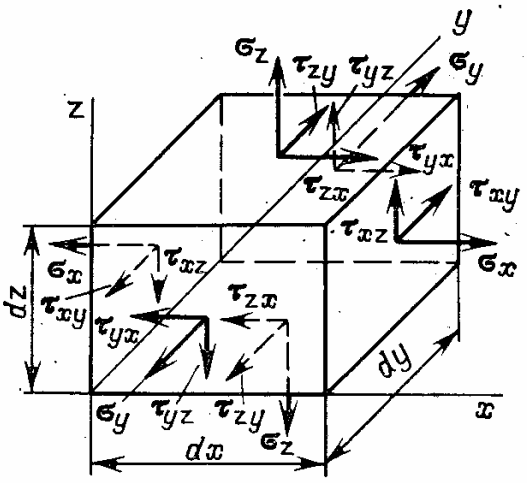


Рис. 2.9. Напряжения, действующие на гранях элемента

Нормальные напряжения растяжения считаются положительными. Векторы растягивающих нормальных напряжений направлены в сторону внешней нормали (от внутренних частиц параллелепипеда — наружу). Знак и, следовательно, направление нормальных напряжений весьма существенны — многие материалы значительно лучше сопротивляются напряжениям сжатия, чем напряжениям растяжения. Растягивающие напряжения понижают сопротивление материала действию повторных нагрузок, тогда как сжимающие напряжения повышают его.

Условимся о следующем правиле знаков для касательных напряжений: если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением одной из осей координат, то положительное касательное напряжение направлено вдоль соответствующей оси. В противоположном случае (внешняя нормаль к площадке идет по отрицательному направлению оси) положительное касательное напряжение имеет обратное направление.

На рис. 2.9, 2.10 сплошными линиями показаны положительные векторы напряжений на «видимых» гранях прямоугольного элемента. На грани, нормаль к которой идет вдоль оси x, векторы положительных касательных напряжений направлены вдоль осей y и z соответственно. Для передней грани (направление внешней нормали противоположно направлению оси y) положительное касательное напряжение направлено противоположно оси x. Разумеется, векторы напряжений приложены по всем шести граням элемента. Элементарный параллелепипед часто необходимо рассматривать в цилиндрической системе координат (r, θ, z). На рис. 2.10 показаны обозначения напряжений в цилиндрической системе координат. Нормальные напряжения σ_r называются радиальными, σ_θ — окружными напряжениями.

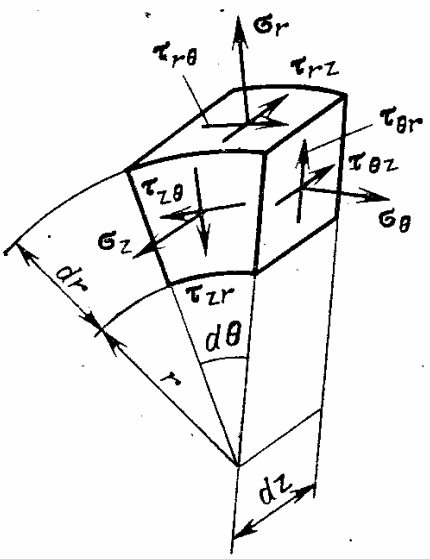


Рис. 2.10. Напряжения на гранях элемента тела в цилиндрической системе координат

Отметим, что по двум параллельным граням элемента (рис. 2.9, 2.10) действующие напряжения могут различаться только на бесконечно малые величины, так как расстояния между площадками бесконечно малы, а направления площадок одинаковы (см. рис. 2.9).

В силу этого следует считать, что напряжения на гранях элементарного параллелепипеда — это напряжения в площадках, проходящих через рассматриваемую точку.

Если направления площадок, проходящих через одну и ту же точку, различны, то различными (в общем случае) будут и действующие в них напряжения. Например, в тонкостенной оболочке (см. рис. 2.7) нормальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках различаются в два раза.

Свойства парности касательных напряжений. Так как элемент тела находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно любой оси должна обращаться в нуль. Как известно из теоретической механики, для равновесия достаточно выполнения этих условий относительно любых трех осей, не лежащих в одной плоскости (три составляющие вектора главного момента обраща-

ются в нуль). Рассмотрим условия равновесия моментов. Силы, распределенные по граням параллелепипеда, будем заменять равнодействующими, приложенными в центре грани (см. рис. 2.9). Строго говоря, последнее допущение не обязательно, и можно показать, что учет изменения напряжений в пределах бесконечно малой грани дает добавки более высокого порядка малости. Последнее относится и к массовым распределенным усилиям, которые будем считать приложенными в центре тяжести элемента (составляющие массовой силы обозначаются X, Y, Z).

Рассмотрим сумму моментов относительно оси x. Отличные от нуля моменты дают векторы τ_{zy} (верхняя грань) и τ_{yz} (задняя грань):

$$-(\tau_{zy}dxdy)\,dz + (\tau_{yz}dxdz)\,dy - (\rho Y dxdydz)\cdot\frac{1}{2}dz + \\ + (\rho Z dxdydz)\cdot\frac{1}{2}dy = 0, \qquad (11)$$

где ρ — плотность материала.

Два последних слагаемых в левой части уравнения (11) можно отбросить, так как они имеют более высокий порядок малости.

В результате получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \qquad (12)$$

Подобным образом получаем *три условия парности касательных напряжений*:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \qquad (13)$$

Общий вывод таков: касательные напряжения в точке, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, одинаковы. Взаимно перпендикулярные площадки всегда имеют общее ребро. Касательные напряжения в силу свойства парности направлены оба вместе или к ребру, или от ребра. Принятое ранее правило знаков для касательных напряжений (см. рис. 2.9 и 2.10) обеспечивает выполнение указанного условия. Свойство парности касательных напряжений справедливо для взаимно перпендикулярных площадок элементарного объема в любой ортогональной системе координат, например в цилиндрической.

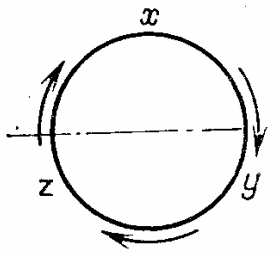


Рис. 2.11. Иллюстрация правила перестановки индексов

Замечания. 1. При выводе уравнения (11) учитывалось направление векторов напряжений по рис. 2.9 и соответствующим образом определялся знак момента (положительное направление — вращение против часовой стрелки). Выводы уравнений с помощью чертежа (рисунка) будут часто встречаться в дальнейшем.

2. Вывод одного из трех уравнений (13) позволяет записать два недостающих с помощью правила круговой перестановки индексов. Иллюстрация правила дана на рис. 2.11: при круговой перестановке индекс x замещается индексом y, индекс y замещается z, а последний — снова индексом x. Например, подобным образом из условия (12) могут быть получены все соотношения (13).

Правило круговой перестановки индексов применяется во многих разделах механики сплошной среды (гидродинамике, теории упругости и др.) во всех случаях, когда векторные соотношения записываются с помощью трех скалярных в прямоугольной (декартовой) системе координат.

5. Плоское напряженное состояние

Определения. Рассмотрим тонкую пластинку под действием сил, лежащих в плоскости пластинки (рис. 2.12). В этой плоскости расположим систему координат (x, y). Торцевые (фасадные) поверхности пластинки свободны от напряжений, и потому

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0. \qquad (14)$$

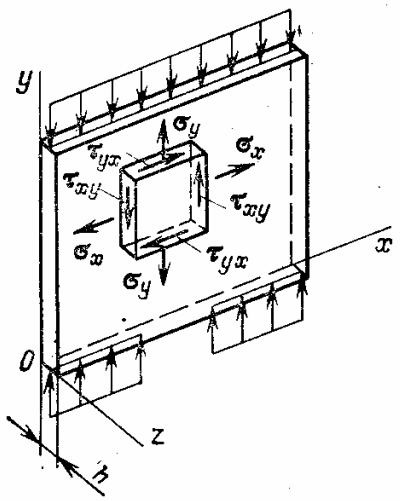


Рис. 2.12. Плоское напряженное состояние

Так как пластинка тонкая, то допустимо считать справедливыми условия (14) для всех площадок, нормальных к оси z (лежащих в плоскости пластинки)*).

Векторы напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} лежат в одной плоскости, и напряженное состояние называется *плоским*. Отметим, что все точки пластинки находятся в плоском напряженном состоянии. В общем случае понятие «плоское напряженное состояние» относится к рассматриваемой точке элемента конструкции.

Если в данной точке A существует площадка, в которой отсутствуют (нормальное и касательное) напряжения, то напряженное состояние в точке является плоским. Например, в точках свободной поверхности детали (рис. 2.13) напряженное состояние будет плоским (ось z в точке A направлена по нормали к поверхности).

Особая важность плоского напряженного состояния связана с тем, что оно реализуется в точках поверхности элементов конструкции, которые часто являются «опасными точками» (точками с наибольшими напряжениями в поверхностном слое).

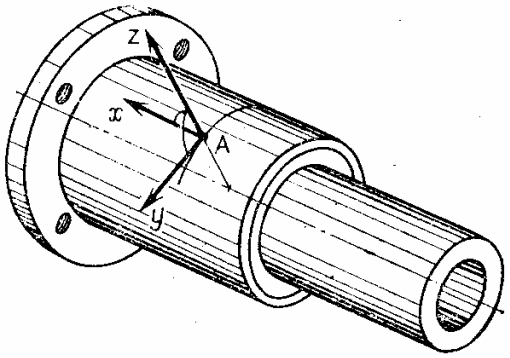


Рис. 2.13. Плоское напряженное состояние в точках свободной поверхности детали

Напряжения в косых площадках при плоском напряженном состоянии. Изучим напряжения в косых площадках, перпендикулярных плоскости пластинки (рис. 2.14).

*) Строгое доказательство вытекает из того, что на малом участке функция обращается в нуль по концам участка, а производная функции ограничена.

Условный термин «косая» или «наклонная» площадка означает, что нормаль к площадке не совпадает ни с одной из осей выбранной системы координат.

В площадке BC, нормаль к которой ν составляет угол α с осью x, действуют нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения. Напряжения распределены равномерно по толщине пластинки h, торцевые грани элемента ABC не загружены. Ближайшая задача состоит в определении величин σ_ν и τ_ν из условий равновесия элемента ABC. Проектируя все усилия на направление нормали ν, найдем

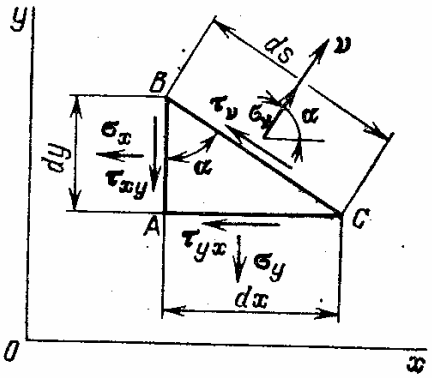


Рис. 2.14. Напряжения в косой площадке при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_\nu ds \cdot h = \sigma_x dy \cos\alpha \cdot h + \sigma_y dx \sin\alpha \cdot h + \tau_{xy}(dy \sin\alpha + dx \cos\alpha) h. \quad (15)$$

Массовые силы, действующие на элемент,

$$\rho X \cdot \frac{1}{2} dxdy \cdot h, \quad \rho Y \cdot \frac{1}{2} dxdy \cdot h,$$

составляют усилия второго порядка малости, и в уравнении (15) они отсутствуют. Учитывая, что из рис. 2.14 следует

$$\frac{dx}{ds} = \sin\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha, \quad (16)$$

получим из соотношения (15)

$$\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (17)$$

Проектируя все усилия на направление вектора τ_ν, найдем

$$\tau_\nu ds \cdot h = \sigma_y dx \cos\alpha \cdot h - \sigma_x dy \sin\alpha \cdot h + \tau_{xy}(dy \cos\alpha - dx \sin\alpha) h, \quad (18)$$

или

$$\tau_\nu = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (19)$$

Формулы (17) и (19) дают значение нормальных и касательных напряжений в косой площадке.

Замечания. 1. Следует строго уяснить, что при выводе уравнений (15) и (18) рассматриваются условия равновесия не напряжений (таких условий не существует!), а действующих усилий по граням элемента.

2. Напряжения по граням элементарного объема (рис. 2.14) распределяются равномерно. Косую площадку можно рассматривать как косое сечение в элементарном параллелепипеде (рис. 2.15), и те же результаты (равенства (17) и (19)) вытекают из условий равновесия заштрихованной части параллелепипеда.

3. Неизвестные векторные величины, для которых принято определенное правило знаков, при выводе следует принимать положительно направленными. Например, σ_ν на рис. 2.14 направлено как растягивающее напряжение.

Направление τ_ν выбрано таким, чтобы при $\alpha = 0$ (рис. 2.16) оно совпадало с направлением для τ_{xy} (см. рис. 2.9). Впрочем, знак касательного напряжения в отличие от нормального обычно несуществен.

4. Кроме рассмотренных косых площадок, можно с помощью дополнительных сечений образовать и другие косые площадки.

Метод определения напряжений в косых площадках остается всегда одним и основывается на условиях равновесия малого элемента.

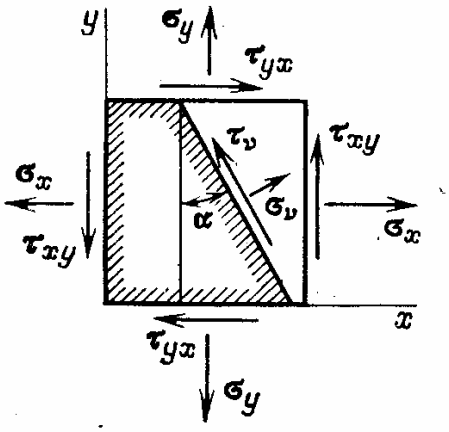


Рис. 2.15. Косая площадка как сечение в элементарном параллелепипеде

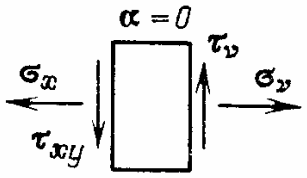


Рис. 2.16. Косая площадка при $\alpha = 0$

Главные площадки при плоском напряженном состоянии. Главными площадками называются площадки, в которых отсутствуют касательные напряжения; нормальные напряжения в таких площадках называются *главными напряжениями.*

При плоском напряженном состоянии одну из главных площадок в точке тела можно указать сразу — это площадка, нормаль к которой направлена по оси z (см. рис. 2.12) (площадка, лежащая на свободной торцевой поверхности). В такой площадке отсутствуют и касательное, и нормальное напряжения (главное напряжение равно нулю). Найдем главные площадки в точке A среди серии площадок, перпендикулярных основной плоскости.

Как уже указывалось, грани треугольного элемента на рис. 2.14 как раз представляют такие площадки.

Из условия $\tau = 0$ получим с помощью соотношения (19)

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{20}$$

где α^* — угол, который составляет нормаль ν главной площадки с осью x.

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ — периодическая функция с периодом π, то уравнению (20) будут удовлетворять углы

$$2\alpha_n^* = 2\alpha^* + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом,

$$\alpha_0^* = \alpha^*, \quad \alpha_1^* = \alpha^* + \pi/2, \quad \alpha_2^* = \alpha^* + \pi, \quad \alpha_3^* = \alpha^* + 3\pi/2,$$
$$\alpha_4^* = \alpha^* + 2\pi, \ldots \tag{21}$$

Из рис. 2.17 видно, что существуют всего два взаимно перпендикулярных направления, которые составляют с осью x углы α^* и $\alpha^* + \pi/2$. Эти направления называются *главными*.

Проведенный анализ показывает: среди рассматриваемых площадок (нормали к площадкам лежали в плоскости действия напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}) имеются две главные площадки; касательные напряжения в таких площадках отсутствуют. Если учесть еще главную площадку, перпендикулярную оси z, то имеются всего три

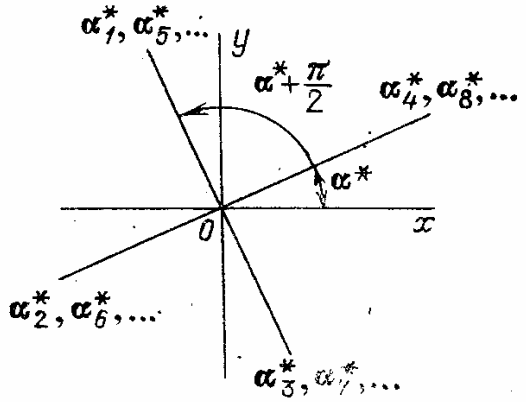


Рис. 2.17. Главные направления при плоском напряженном состоянии

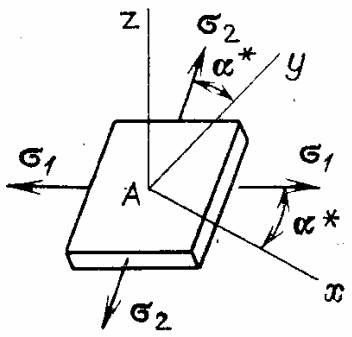


Рис. 2.18. Главные площадки при плоском напряженном состоянии

главные площадки (рис. 2.18). Нормальные напряжения в главных площадках (главные напряжения) обозначаются σ_1, σ_2, σ_3. При плоском напряженном состоянии $\sigma_3 = 0$.

В дальнейшем будет показано, что в любой точке тела при действии произвольной системы внешних сил в общем случае имеются всего три главные площадки, или, что то же самое, три взаимно перпендикулярных главных направления.

Замечание. При анализе уравнения (20) исключался из рассмотрения случай, когда

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad \tau_{xy} = 0. \tag{22}$$

Такое напряженное состояние создается в пластине, равномерно растягиваемой одинаковыми усилиями в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

При условии (22) из уравнения (19) вытекает, что в любой косой площадке касательные напряжения отсутствуют и главных площадок бесчисленное множество. Поэтому более строгое утверждение таково: или существуют три главные площадки, или (в отдельных частных случаях) их может быть бесчисленно много.

Случай, когда главных направлений бесконечно много, встречается, конечно, редко (например, всестороннее сжатие или растяжение) и не содержит каких-либо трудностей для анализа напряженного состояния. Важно, что не может быть одного, двух, четырех, пяти и т. п. главных направлений: их или три, или бесконечно много.

Главные напряжения при плоском напряженном состоянии. Главные напряжения могут быть определены из уравнения (17) при $\alpha = \alpha^*$:

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2 \alpha^* + \sigma_y \sin^2 \alpha^* + \tau_{xy} \sin 2\alpha^* =$$
$$= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha^* + \tau_{xy} \sin 2\alpha^*. \quad (23)$$

Учитывая равенства

$$\cos 2\alpha^* = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha^*}}, \quad \sin 2\alpha^* = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha^*}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha^*}} \quad (24)$$

и соотношение (20), получим после нескольких громоздких, но простых выкладок выражение

$$\sigma_v = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (25)$$

Последнее равенство дает два значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (26)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (27)$$

Третье главное напряжение при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_3 = 0. \quad (28)$$

Так как корень в равенствах (26) и (27) имеет арифметическое (положительное) значение, то $\sigma_1 > \sigma_2$ (в алгебраическом смысле с учетом знака напряжения).

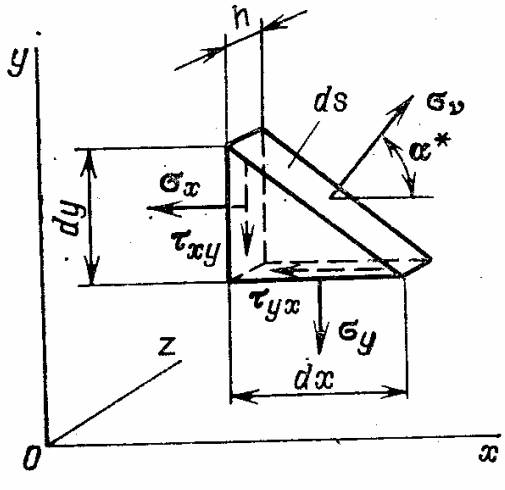


Рис. 2.19. Определение главных напряжений из равновесия элементарной треугольной призмы, одной из граней которой является главная площадка

Приведем теперь другой способ нахождения главных напряжений, который будет использоваться в дальнейшем и для объемного (неплоского) напряженного состояния.

Рассмотрим равновесие элементарной треугольной призмы (рис. 2.19), одной из граней которой является главная площадка. На главной площадке действует нормальное напряжение σ_v; касательное напряжение отсутствует.

Нормаль к главной площадке составляет с осями x, y углы соответственно α^* и $\pi/2 - \alpha^*$. Косинусы углов нормали (они называются направляющими косинусами) обозначаются l и m:

$$l = \cos \alpha^*, \quad m = \cos(\pi/2 - \alpha^*) = \sin \alpha^*. \quad (29)$$

Площадь косой площадки равна $ds\,h$, площади прямых площадок

составляют

$$ds_x = ds\,hl = ds\,h\cos\alpha^*,$$
$$ds_y = ds\,hm = ds\,h\cos(\pi/2 - \alpha^*) = ds\,h\sin\alpha^*. \tag{30}$$

Проектируя все силы на направления осей x и y, найдем

$$\sigma_x\,ds\,l + \tau_{xy}\,ds\,m = \sigma_\nu\,ds\,l,$$
$$\tau_{xy}\,ds\,l + \sigma_y\,ds\,m = \sigma_\nu\,ds\,m. \tag{31}$$

Из уравнений (31) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин l и m:

$$(\sigma_x - \sigma_\nu)\,l + \tau_{xy}m = 0,$$
$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_\nu)\,m = 0. \tag{32}$$

При любом значении σ_ν (оно заранее тоже неизвестно) система (32) не может иметь нулевых решений относительно l и m, так как $l^2 + m^2 = \cos^2\alpha^* + \sin^2\alpha^* = 1$.

По известной теореме линейной алгебры детерминант системы (32)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_\nu & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_\nu \end{vmatrix} = (\sigma_x - \sigma_\nu)(\sigma_y - \sigma_\nu) - \tau_{xy}^2 = 0. \tag{33}$$

Записав уравнение (33) в виде

$$\sigma_\nu^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\,\sigma_\nu + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0, \tag{34}$$

находим два корня уравнения, выражаемые равенствами (26) и (27).

Уравнения (32) позволяют достаточно просто указать расположение площадок, в которых действуют напряжения σ_1 и σ_2.

Для того чтобы найти направляющие косинусы нормали площадки, в которой действует напряжение σ_1, достаточно внести значение σ_1 в любое из двух уравнений (32), например в первое. Тогда получим

$$\frac{m_1}{l_1} = \operatorname{tg}\alpha^*_{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \tag{35}$$

Аналогично для напряжения σ_2

$$\frac{m_2}{l_2} = \operatorname{tg}\alpha^*_{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \tag{36}$$

В последних соотношениях α_1^* и α_2^* — углы с осью x площадок, где действуют напряжения σ_1 и σ_2 соответственно. Величины σ_1 и σ_2 определяются равенствами (26) и (27).

Если направления линий, соответствующих углам α_1^* и α_2^*, взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg}\alpha^*_{(1)} \cdot \operatorname{tg}\alpha^*_{(2)} = \frac{\sin\alpha^*_{(1)}}{\cos\alpha^*_{(2)}} \cdot \frac{\sin\left(\alpha^*_{(1)} + \pi/2\right)}{\cos\left(\alpha^*_{(1)} + \pi/2\right)} = -1. \tag{37}$$

Учитывая зависимости (35), (36), (26) и (27), находим

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -1, \tag{38}$$

что доказывает взаимную перпендикулярность главных площадок.

Замечания. 1. Были найдены значения главных напряжений, но не было указано, какое именно главное направление соответствует большему напряжению σ_1 и какое — меньшему σ_2. Это будет сделано чуть позже.

2. Были даны два различных вывода главных напряжений и два доказательства ортогональности главных напряжений.

Различные параллельные способы вывода характерны для технического анализа, в котором прежде всего необходима достоверность. Никогда не следует жалеть времени на то, чтобы получить дополнительное подтверждение результата!

Разберем вопрос о наибольших нормальных напряжениях в рассматриваемых площадках. Нормальное напряжение, как следует из формулы (17), зависит от угла наклона площадки α. Для отыскания максимума или минимума функции приравняем нулю производную:

$$\frac{d\sigma_\nu}{d\alpha} = -2\sigma_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \tag{39}$$

Теперь получим значение угла, при котором достигается экстремум (максимум или минимум функции).

Из равенства (39) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{40}$$

Сопоставляя формулу (40) с формулой (20), заключаем: нормальные напряжения достигают наибольшего или наименьшего значения в главных площадках.

Для различения максимума или минимума функции составим выражение второй производной:

$$\frac{d^2\sigma_\nu}{d\alpha^2} = -2\left[(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha\right]. \tag{41}$$

Последнее равенство представим так:

$$\frac{d^2\sigma_\nu}{d\alpha^2} = -2\cos 2\alpha\left[\sigma_x - \sigma_y + 2\tau_{xy}\operatorname{tg} 2\alpha\right] =$$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{\sigma_x - \sigma_y}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2\right]. \tag{42}$$

Условие существования максимума

$$\frac{d^2\sigma_\nu}{d\alpha^2} < 0$$

реализуется в двух случаях:

$$\cos 2\alpha > 0, \quad \sigma_x > \sigma_y,$$
$$\cos 2\alpha < 0, \quad \sigma_x < \sigma_y.$$

В первом случае ($\sigma_x > \sigma_y$) нормаль к площадке, где действует напряжение σ_1, составляет с осью x угол $0 < |2\alpha| < \pi/2$ или $-\pi/4 < \alpha^* < \pi/4$. Во втором случае ($\sigma_x < \sigma_y$) угол лежит в пределах $\pi/4 < |\alpha^*| < 3\pi/4$. В перпендикулярной главной площадке напряжение равно σ_2.

Наибольшие касательные напряжения. Выясним вопрос о максимальных касательных напряжениях в косых площадках. С помощью зависимости (19) находим

$$\frac{d\tau_\nu}{d\alpha} = (\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha.$$

Приравнивая нулю производную, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \tag{43}$$

где α_τ — угол нормали к площадке с осью x.

Внося зависимость (43) в равенство (19) и учитывая формулы (24), приходим к следующей величине экстремальных касательных напряжений:

$$\tau_\nu = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{44}$$

Максимальное и минимальное значения касательного напряжения равны по величине и различаются только знаком, что, как указывалось ранее, несущественно для обычных конструкционных материалов.

Вспоминая формулы (26) и (27) для главных напряжений, находим

$$\tau_{\max} = |\tau_\nu(\alpha_\tau)| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|. \tag{45}$$

Максимальная величина касательных напряжений равна абсолютному значению полуразности главных напряжений.

Подобно проведенному анализу для главных напряжений, можно установить, что площадки с наибольшими (по абсолютной величине) касательными напряжениями взаимно перпендикулярны. Такой вывод следует также из свойства парности касательных напряжений.

Как же расположены площадки с максимальными касательными напряжениями по отношению к главным площадкам?

Сопоставляя равенства (20) и (43), находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau \cdot \operatorname{tg} 2\alpha^* = -1. \tag{46}$$

Из этого условия следует, что стороны углов $2\alpha_\tau$ и $2\alpha^*$ — взаимно перпендикулярны: $2\alpha_\tau = 2\alpha^* + \pi/2$, и потому $\alpha_\tau = \alpha^* + \pi/4$.

Плоскость площадок с наибольшими (максимальными) касательными напряжениями делит пополам прямой угол между плоскостями главных площадок. Этот вывод оказывается справедливым и для любого (не только плоского) напряженного состояния.

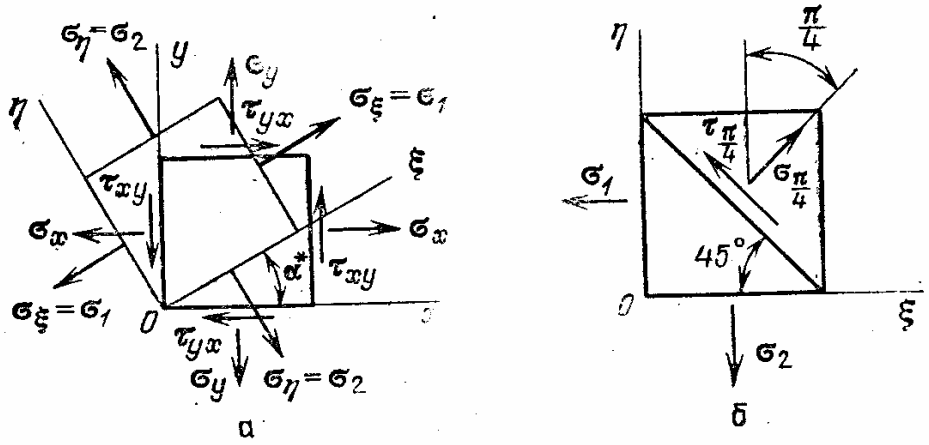


Рис. 2.20. Главные направления ξ и η и площадки с максимальными касательными напряжениями

На рис. 2.20 показаны главные направления ξ и η, которые можно рассматривать как оси координат, повернутые на угол α^* к основной системе координат.

По граням элементарного параллелепипеда, построенного на осях ξ, η, будут действовать только нормальные напряжения $\sigma_\xi = \sigma_1$, $\sigma_\eta = \sigma_2$.

Рассмотрим теперь напряжения в площадке, составляющей угол $\pi/4 = 45°$ с главными осями (рис. 2.20, *б*). В этой площадке должны действовать максимальные касательные напряжения. Из условия равновесия треугольной призмы аналогично выводам уравнений (27) и (19) находим

$$\sigma_{\pi/4} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \tag{47}$$

$$\tau_{\pi/4} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{48}$$

Равенство (48) подтверждает сделанный ранее вывод о величине максимального касательного напряжения. Примечательно, что в площадках, где действует τ_{max}, имеются и нормальные напряжения.

6. Объемное напряженное состояние

Определения. Ранее указывалось, что в любой точке нагружаемого тела существуют три главные площадки, в которых действуют главные (нормальные) напряжения, а касательные напряжения отсутствуют.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние в точке называется *объемным* или *трехмерным*. При условии равенства нулю одного из главных напряжений напряженное состояние считается *плос-*

ким или *двумерным*. Наконец, при отличии от нуля только одного главного напряжения напряженное состояние будет *линейным* или *одномерным*.

Для анализа объемного напряженного состояния необходимо рассмотреть площадки произвольной ориентации, проходящие через данную точку тела.

Произвольная наклонная площадка. Ранее при исследовании напряжений в наклонных (косых) площадках рассматривались площадки определенного вида — нормаль к ним лежала в плоскости x, y. Для плоского напряженного состояния этого было почти достаточно, но в общем случае требуется знание напряжений в произвольной наклонной площадке, заданной в выбранной системе координат.

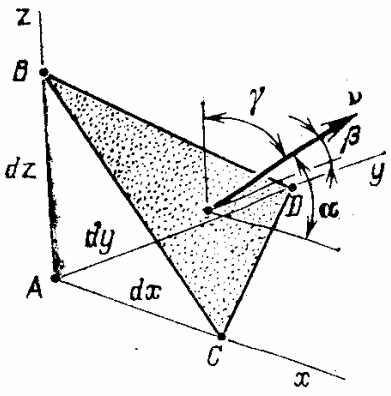


Рис. 2.21. Произвольная косая площадка

Рассмотрим теперь элементарный четырёхгранник (тетраэдр), построенный на осях прямоугольной системы координат с центром в точке A (рис. 2.21).

Произвольная косая площадка BCD характеризуется единичным вектором нормали $\boldsymbol{\nu}$. Составляющие вектора по осям x, y и z равны l, m, n:

$$\boldsymbol{\nu} = (l, m, n). \qquad (49)$$

По физическому смыслу величины l, m и n являются косинусами углов вектора нормали $\boldsymbol{\nu}$ с осями координат:

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma. \qquad (50)$$

Величины l, m и n часто называются направляющими косинусами.

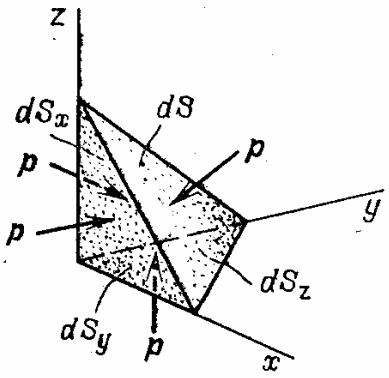


Рис. 2.22. Частный случай равновесия тетраэдра: по всем граням действует одинаковое давление p

Если обозначить площадь наклонной грани dS, то площадь грани ABD

$$dS_x = l\,dS. \qquad (51)$$

Для граней ABC и ACD

$$dS_y = m\,dS, \quad dS_z = n\,dS. \qquad (52)$$

Подобные соотношения в частном случае использовались ранее (уравнения (30)), а сейчас установим их с помощью наглядных физических представлений.

Из повседневного опыта ясно, что если поместить в жидкость тетраэдр из материала с тем же удельным весом, то он будет находиться в равновесии при любом давлении столба жидкости.

Так как размеры тетраэдра бесконечно малы, можно считать, что давление по всем его граням одинаково (рис. 2.22).

Проектируя все силы на направление x, находим

$$p\,dS_x - pl\,dS = 0, \quad dS_x = l\,dS. \qquad (53)$$

Аналогично по другим осям

$$p\,dS_y - pm\,dS = 0, \quad dS_y = m\,dS,$$

$$p\,dS_z - pn\,dS = 0, \quad dS_z = n\,dS.$$

Конечно, последние соотношения можно было установить из чисто геометрических соображений, но проведенный анализ дает дополнительную информацию.

Если по трем взаимно перпендикулярным площадкам действуют одинаковые нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют, то в любой наклонной площадке действует то же нормальное напряжение и так же отсутствует касательное напряжение. Это пример, когда главных площадок оказывается бесконечно много.

Напряжения в произвольной косой площадке. В наклонной площадке, нормаль к которой ν (рис. 2.23), действуют нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения, подлежащие определению. По грани ABC приложены известные напряжения σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}; по двум другим граням — соответственно σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} и σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}. Так как размеры элементарного тетраэдра бесконечно малы, то напряжения по граням представляют, в сущности, напряжения в различных площадках, проходящих через точку A (или какую-либо другую точку тетраэдра,— разницы нет).

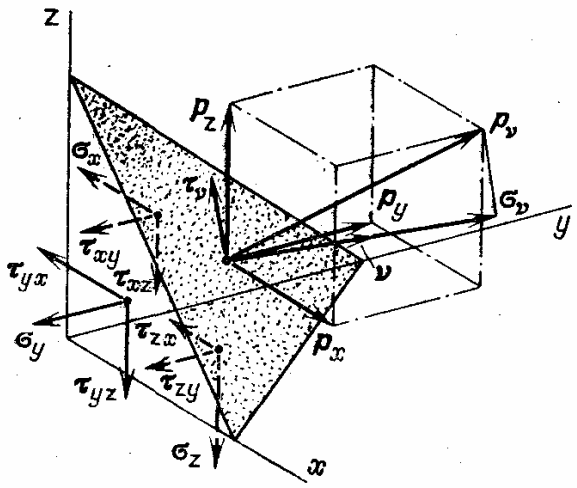


Рис. 2.23. Нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения в косой площадке; p_ν — вектор полного напряжения в площадке $\left(p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2\right)$; p_x, p_y, p_z — проекции полного напряжения на оси x, y, z

Бесконечно малые размеры четырехгранника (тетраэдра) дают так же возможность пренебречь массовыми силами по сравнению с поверхностными, приложенными по его граням.

Для определения напряжений в наклонной площадке проще всего найти сначала составляющие полного напряжения по осям. Проектируя силы (а не напряжения!), действующие по граням тетраэдра, на направления осей, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x dS_x + \tau_{yx} dS_y + \tau_{zx} dS_z &= p_x dS, \\ \tau_{xy} dS_x + \sigma_y dS_y + \tau_{zy} dS_z &= p_y dS. \\ \tau_{xz} dS_x + \tau_{yz} dS_y + \sigma_z dS_z &= p_z dS. \end{aligned} \tag{54}$$

Учитывая зависимости (51), (53), получаем важные соотношения

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \tag{55}$$

$$p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \tag{56}$$

$$p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \tag{57}$$

Напомним, что в силу парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{58}$$

Для того чтобы найти величину нормального напряжения, надо спроектировать каждую из составляющих вектора $\mathbf{p}_\nu$ на направление $\boldsymbol{\nu}$ и образовать их сумму

$$\sigma_\nu = p_x l + p_y m + p_z n.$$

Ссылаясь на соотношения (55)—(57), можно утверждать

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \tag{59}$$

В частном случае плоского напряженного состояния, когда рассматривается наклонная площадка, параллельная оси z, будем иметь $n = 0$, и тогда

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm. \tag{60}$$

Так как в разбираемом случае

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha,$$

то формула (60) совпадает с аналогичной формулой (17). Касательное напряжение в косой площадке равно

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2} = \{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (p_x l + p_y m + p_z n)^2\}^{1/2}. \tag{61}$$

Направление τ_ν можно определить из условия, что линия действия касательного напряжения является линией пересечения плоскости, содержащей векторы $\mathbf{p}_\nu$ и $\boldsymbol{\sigma}_\nu$. Однако направление τ_ν для дальнейшего несущественно, и детализацию вопроса опустим.

Замечания. 1. Знание напряжений (нормальных и касательных) по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку тела, дает возможность определить напряжения в любой другой площадке, также проходящей через эту точку.

2. После получения общей формулы для нормальных напряжений в косой площадке она была применена для уже известного частного случая (плоского напряженного состояния). Такая процедура всегда желательна, а при исследовании новых вопросов просто необходимо проверять результат на известных ранее случаях.

Главные площадки и главные напряжения при объемном напряженном состоянии. Пусть косая площадка (рис. 2.24) является главной. Тогда полное напряжение в площадке совпадает с нормальным напряжением, касательное напряжение отсутствует. Для главной площадки

$$p_x = \sigma_\nu l, \quad p_y = \sigma_\nu m, \quad p_z = \sigma_\nu n, \tag{62}$$

где $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$.

Теперь из (55)—(57) получаем систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma_\nu)\,l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n&=0,\\ \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma_\nu)\,m+\tau_{zy}n&=0,\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma_\nu)\,n&=0.\end{aligned}\qquad(63)$$

Основными неизвестными в этой системе являются величины l, m, n, характеризующие положение главной площадки. Они связаны соотношением

$$l^2+m^2+n^2=1,\qquad(64)$$

так как являются проекциями на оси x, y, z единичного вектора нормали ν ($|\nu|=1$).

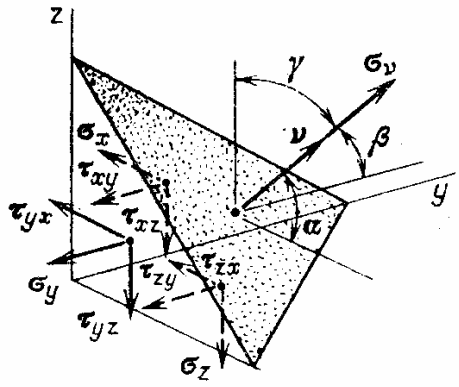


Рис. 2.24. Определение главных площадок и главных напряжений

В силу равенства (64) величины l, m и n не могут все одновременно быть равными нулю.

Из линейной алгебры известно, что однородная система уравнений может обладать ненулевым решением только в том случае, когда детерминант системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma_\nu & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_\nu & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_\nu\end{vmatrix}=0.\qquad(65)$$

Развертывая определитель и учитывая свойства парности касательных напряжений, находим

$$(\sigma_x-\sigma_\nu)(\sigma_y-\sigma_\nu)(\sigma_z-\sigma_\nu)+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-(\sigma_x-\sigma_\nu)\tau_{yz}^2-$$
$$-(\sigma_y-\sigma_\nu)\tau_{zx}^2-(\sigma_z-\sigma_\nu)\tau_{xy}^2=0.\qquad(66)$$

Последнее уравнение представляет уравнение третьей степени относительно σ_ν, которое запишем в виде

$$\sigma_\nu^3-\sigma_\nu^2J_1-\sigma_\nu J_2-J_3=0,\qquad(67)$$

$$J_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,\qquad(68)$$

$$J_2=-\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_x+\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2,\qquad(69)$$

$$J_3=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2.\qquad(70)$$

Уравнение (67) называется характеристическим уравнением напряженного состояния. Корни характеристического уравнения (значения σ_ν) представляют величины главных напряжений. В частном

случае плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{yz} = 0$ оно соответствует уравнению (34). Для плоского напряженного состояния коэффициент $J_3 = 0$ и один из корней характеристического уравнения равен нулю, т. е. одно из главных напряжений обращается в нуль.

В случае линейного напряженного состояния два главных напряжения равны нулю, и, следовательно, в уравнении (67) должно быть $J_2 = J_3 = 0$.

В общем случае характеристическое уравнение (67) имеет три действительных корня: σ_1, σ_2, σ_3 — три главных напряжения.

Внося значения σ_1 в любые два уравнения (63) и присоединяя уравнение (64), получаем систему уравнений для определения значений $l_{(1)}$, $m_{(1)}$ и $n_{(1)}$, определяющих положение главной площадки с напряжением σ_1. Подобным образом находятся направляющие косинусы двух других главных площадок.

Корни уравнения (67) могут быть найдены по точным формулам для решения кубических уравнений (формулам Кардано). Во многих случаях удобно воспользоваться численным методом Ньютона, представив уравнение (67) в виде

$$f(\sigma_v) = \sigma_v^3 - \sigma_v^2 J_1 - \sigma_v J_2 - J_3 = 0. \qquad (71)$$

Если $\sigma_{v(i)}$ — i-е приближение для значения корня, то следующее приближение

$$\sigma_{v(i+1)} = \sigma_{v(i)} - \frac{f(\sigma_{v(i)})}{\frac{df}{d\sigma_v}(\sigma_{v(i)})} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots); \qquad (72)$$

производная

$$\frac{df}{d\sigma_v}(\sigma_{v(i)}) = 3\sigma_{v(i)}^2 - 2\sigma_{v(i)} J_1 - J_2.$$

Схема численного решения показана на рис. 2.25. Для выбора исходного приближения полезно предварительно определить приближенно области перемены знака функции $f(\sigma_v)$. Расчет по формуле (72) заканчивается, когда исходное и последующее приближения достаточны близки.

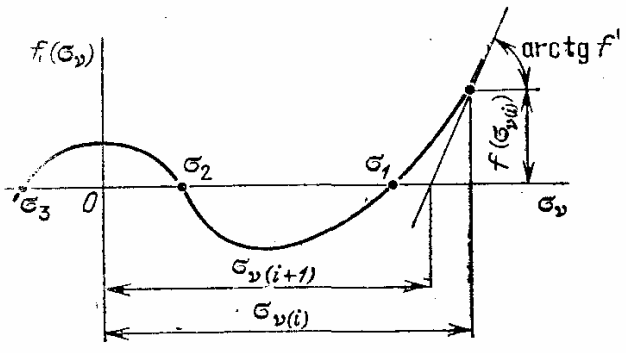


Рис. 2.25. Схема численного решения характеристического уравнения $f(\sigma_v) = 0$ методом Ньютона

Инварианты напряженного состояния в точке. Расположение главных площадок и значения главных напряжений в точке зависят от геометрии детали, действующих на нее нагрузок и других факторов. Например, при растяжении трубы одна из главных площадок в точке поперечного сечения будет лежать в плоскости сечения; при кручении трубы такая пло-

щадка не будет главной, так как в ней будут действовать касательные напряжения.

Понятно, что расположение главных площадок и значения главных напряжений не могут зависеть от того или иного выбора системы координат или принятого направления осей. Тогда коэффициенты характеристического уравнения напряженного состояния (уравнения (67)) не должны зависеть от выбора системы координат, т. е. быть инвариантными при изменении системы координат (например, при повороте системы координат). Коэффициенты характеристического уравнения называются инвариантами напряженного состояния. Величина J_1 называется линейным, J_2 — квадратичным и J_3 — кубичным инвариантами (по отношению к компонентам напряжений).

Понятие о тензоре напряженного состояния. В механике много фундаментальных понятий связано с векторными величинами (сила, скорость, ускорение и т. п.). Вектор в обычной (трехмерной) системе координат можно представить в виде столбца

$$a = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \tag{73}$$

где a_x, a_y и a_z — три скалярные величины — проекции вектора на оси координат. Для векторных величин определены аналитические операции: сложение, вычитание, умножение. Например, сумма двух векторов **a** и **b** равна

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix}. \tag{74}$$

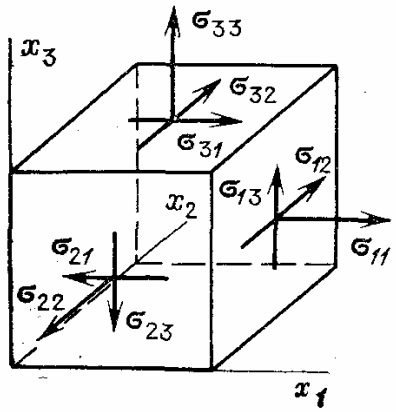


Рис. 2.26. Обозначения напряжений при тензорном описании напряженного состояния

Однако существуют физические величины более сложной природы, например напряженное состояние в точке нагруженного тела, которое нельзя описать с помощью какой-либо векторной величины. Тогда вводится понятие «тензор», который образуется из трех векторных величин подобно тому, как сам вектор образуется из трех скалярных величин. Таким образом, тензор характеризуется девятью скалярными величинами — компонентами тензора, которые записываются в виде таблицы. Например, тензор напряжений записывается в следующем виде:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{75}$$

Понятно, что тензор напряжений может полностью характеризовать напряженное состояние, так как его таблица включает компоненты напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам. Из предыдущего нам известно, что этих данных достаточно, чтобы выяснить напряжения в произвольной площадке.

Тензор напряжений является симметричным, так как таблица (матрица) тензора симметричная. Симметрия тензора напряжений является следствием

парности касательных напряжений. Симметричный тензор характеризуется не девятью, а шестью скалярными величинами. К более компактной записи векторов и тензоров ведет несколько иной способ обозначения осей, если вместо x, y, z обозначить оси x_1, x_2, x_3. Компоненты напряженного состояния в осях x_1, x_2, x_3 (рис. 2.26) обозначаются σ_{11}, σ_{12}, ...

Тензор напряжений в компактной записи будет таким:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix} = \{\sigma_{ij}\},\ i, j = 1, 2, 3. \qquad (76)$$

Тензор, к сожалению, не имеет геометрического образа, однако по отношению к тензорным величинам определен ряд операций. Например, сумма двух тензорных величин $T_\sigma^{(1)}$ и $T_\sigma^{(2)}$ есть тензор, причем

$$T_\sigma = T_\sigma^{(1)} + T_\sigma^{(2)} = \{\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}\}. \qquad (77)$$

Действия над тензорами во многих случаях совпадают с действиями над матрицами.

Тензор напряжений имеет компоненты с двумя индексами, пробегающими значения от 1 до 3. В силу этого он называется тензором второго ранга. Существуют тензоры более высоких рангов; с другой стороны, вектор можно назвать тензором первого ранга.

При повороте системы координат компоненты тензора изменяются, так как по физическому смыслу они представляют собой напряжения в координатных площадках. Однако величины J_1, J_2 и J_3 (см. формулы (68) — (70)) являются инвариантами тензора напряжений.

7. Дифференциальные уравнения равновесия элемента тела и краевые условия

Вводные замечания. Ранее при анализе напряженного состояния рассматривались условия равновесия элементов тела для определения напряжений в различных площадках. Изменение напряжений по граням элементов в связи с приращением координат не учитывалось.

Учет указанных изменений приводил к бесконечно малым более высокого порядка малости, т. е. был несущественным. По этой же причине исчезли из уравнений и массовые силы (силы тяжести, силы инерции и др.).

При анализе напряжений в косых площадках достаточно было считать, что на параллельных гранях основного параллелепипеда (рис. 2.27) с точностью до бесконечно малых первого порядка напряжения одинаковы. Сейчас приступаем к дальнейшим уточнениям, необходимым для анализа распределения напряжений в различных точках тела.

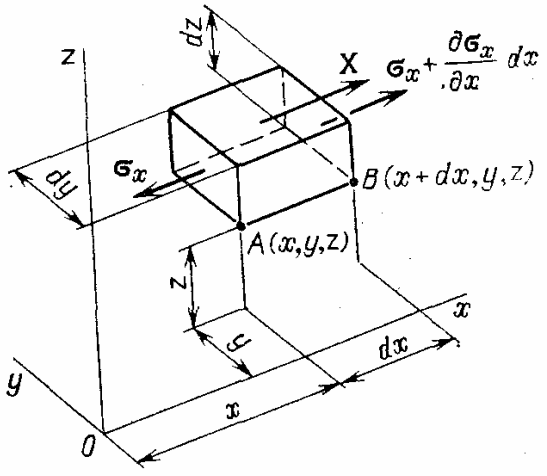


Рис. 2.27. К выводу дифференциального уравнения равновесия элемента в случае одноосного напряженного состояния — растяжения вдоль оси

Уравнение равновесия элемента тела в случае одноосного растяжения. В точке $A(x, y, z)$ выделен элементарный параллелепипед (см. рис. 2.27) с размерами ребер dx, dy, dz. Будем считать, что

на грани, проходящей через точку A, действует нормальное напряжение σ_x.

Так как рассматривается только растяжение (сжатие) вдоль оси x, то по другим граням нормальных напряжений нет, а касательные напряжения по всем координатным граням отсутствуют.

В элементарных площадках, перпендикулярных оси x, но проходящих через различные точки тела, напряжения σ_x будут в общем случае также различными, т. е.

$$\sigma_x = f(x, y, z).$$

Тогда следует заключить, что на грани, проходящей через точку B, действует нормальное напряжение

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tag{78}$$

где $\partial\sigma_x/\partial x = \partial f(x, y, z)/\partial x$ — частная производная функции $\sigma_x = f(x, y, z)$ (дифференцирование ведется по переменной x; переменные y и z условно считаются постоянными величинами).

Например, если напряжение σ_x является линейной функцией координат

$$\sigma_x = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \tag{79}$$

то

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = C_1. \tag{80}$$

На тело действует массовая сила (на единицу массы) X (центробежная сила, сила тяжести и т. п.). Массовая сила, приложенная к элементарному объему,

$$\rho X\, dx\, dy\, dz, \tag{81}$$

где ρ — плотность материала.

Из условия равновесия элемента получаем

$$-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \rho X dxdydz = 0, \tag{82}$$

или в окончательной форме

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho X = 0. \tag{83}$$

Замечание. При выводе условия равновесия напряжение σ_x в пределах грани считалось постоянным. Можно показать, ссылаясь на бесконечно малые размеры граней, что учет изменения напряжений в различных точках грани дал бы слагаемые более высокого (четвертого) порядка малости.

Пример 1. Определить распределение растягивающих напряжений в бурильной штанге под действием собственного веса. Схема бурильной установки показана на рис. 2.28. Штанга рассматривается как стержень постоянного сечения. Распределение растягивающих напряжений по поперечному сечению предполагается постоянным. Ось x направляем вдоль оси стержня. На штангу действует усилие веса.

Если γ — удельный вес материал штанги $\left(\dim \gamma = \left[\frac{\text{вес материала}}{\text{объем материала}}\right],\right.$ например Н/см^3$\left.\right)$, то на единицу массы приходится усилие

$$X = \frac{\gamma}{\rho}. \tag{84}$$

Из условия равновесия (83) следует выражение

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho X = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \gamma = 0. \tag{85}$$

Из последнего уравнения получаем $\sigma_x(x) = -\gamma x + C$.

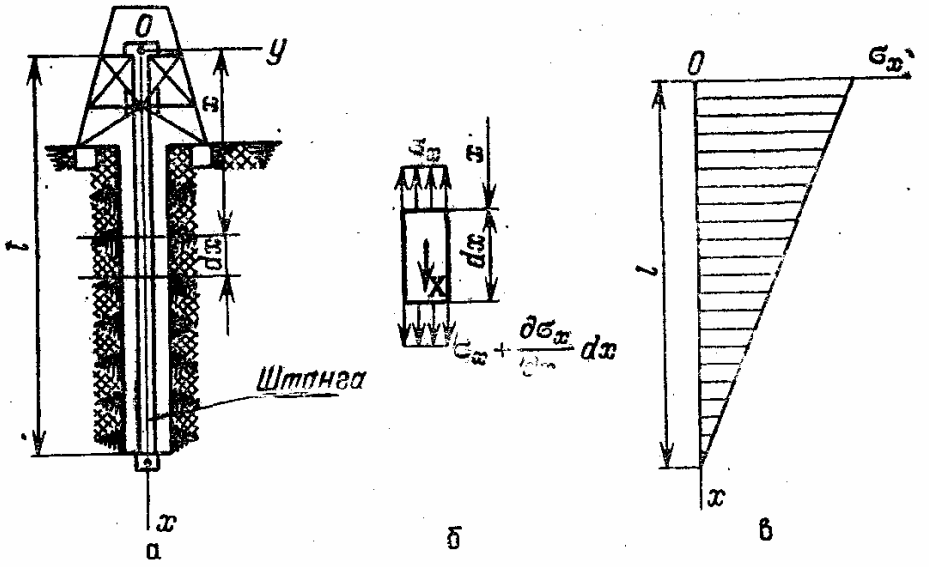


Рис. 2.28. Расчетная схема бурильной штанги: *а* — общая схема; *б* — элемент штанги; *в* — эпюра распределения растягивающих напряжений по длине штанги

Произвольная постоянная C находится из краевого условия: при $x = l$

$$\sigma_x(l) = -\gamma l + C = 0.$$

Определяя C, находим

$$\sigma_x(x) = \gamma(l - x). \tag{86}$$

Наибольшее напряжение получается в сечении $x = 0$:

$$\sigma_{x\,max} = \gamma l. \tag{87}$$

Из формулы (87) вытекает, что длина штанги не может быть беспредельной: она ограничивается прочностью материала на растяжение.

Если допустимое напряжение на растяжение

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_b}{n}, \tag{88}$$

где σ_b — предел прочности, n — запас прочности (обычно $n = 1{,}5$—$2{,}5$), то

предельная длина штанги постоянного сечения по равенству (87)

$$l_{\text{пр}} = \frac{[\sigma]_p}{\gamma} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_b}{\gamma}. \tag{89}$$

Из последней формулы вытекает, что для штанги наиболее подходящими будут материалы, обладающие высоким пределом прочности и малым удельным весом. Отношение

$$\frac{\sigma_b}{\gamma} = \bar{\sigma}_b \tag{90}$$

иногда называют удельным пределом прочности ($\dim(\sigma_b/\gamma) = [\text{длина}]$). Эта характеристика чрезвычайно важна для авиационных материалов, так как вес авиационной конструкции является одним из ее основных показателей; обычно $\bar{\sigma}_b = 15$—40 км.

Пример 2. Определить распределение растягивающих напряжений по длине вращающегося стержня. На рис. 2.29 показана расчетная схема. Направим ось y по оси вращения, ось x — по оси стержня. В точке $A(x, y, z)$, находящейся от оси вращения на расстоянии r, на элемент материала действует центробежная сила

$$dC = \rho\omega^2 r \cdot dx\, dy\, dz,$$

где ρ — плотность материала $\left(\dim\rho = \left[\frac{\text{масса}}{\text{объем}}\right]\right.$, например кг/см^3); ω — угловая скорость вращения $\left(\dim\omega = \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right], \text{с}^{-1}\right)$.

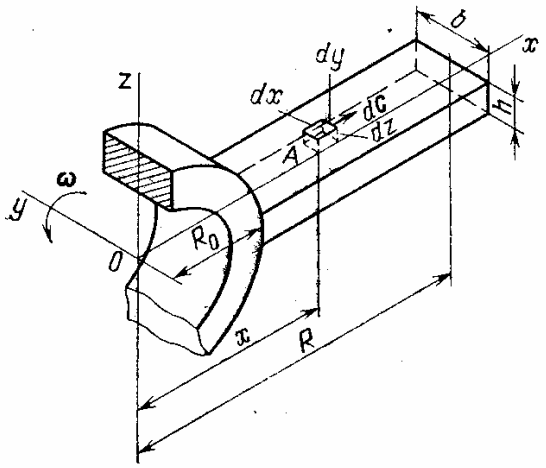


Рис. 2.29. Растяжение быстровращающегося стержня (лопатки)

Размеры поперечного сечения считаем малыми по сравнению с продольными размерами, полагая $r \approx x$. Предполагается, что растягивающие напряжения распределены равномерно по поперечному сечению. Массовая сила от действия центробежных сил

$$X = \omega^2 x.$$

Из условия равновесия получаем

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \rho\omega^2 x = 0,$$

откуда

$$\sigma_x(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C.$$

Определяя произвольную постоянную из условия

$$\sigma_x(R) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 + C = 0,$$

находим распределение растягивающих напряжений:

$$\sigma_x(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 (R^2 - x^2). \tag{91}$$

Если радиус корневого (заделанного) сечения равен R_0, то наибольшее напряжение

$$\sigma_{x\max} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2\left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\rho u_R^2(1 - \xi^2), \qquad (92)$$

где $u_R = \omega R$ — окружная скорость на внешнем радиусе стержня; $\xi = R_0/R$ — относительный радиус корневого сечения.

Из формулы (92) видно, что окружные скорости вращающегося стержня ограничены прочностью материала. Предельная допустимая окружная скорость при малом радиусе втулки ($\xi = 0$) соответствует условию

$$\sigma_{x\max} = \frac{\sigma_b}{n} = \frac{1}{2}\rho u_R^2,$$

откуда

$$u_R = \sqrt{\frac{2\sigma_b}{n\rho}} = \sqrt{\frac{2g\sigma_b}{n\gamma}}. \qquad (93)$$

В равенстве (93) g — ускорение силы тяжести ($g = 981$ см/с^2); σ_b, n, γ — предел прочности, запас прочности и удельный вес. Для стали с $\sigma_b = 90\,000$ Н/см^2, $\gamma = 0{,}08$ Н/см^3, $n = 2$

$$u_R = \sqrt{\frac{2\cdot 981\cdot 9\cdot 10^4}{2\cdot 0{,}08}} =$$

$$= 340\cdot 10^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 340\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия элемента тела. Рассмотрим равновесие элемента тела, примыкающего к точке $A(x, y, z)$ (рис. 2.30); размеры ребер dx, dy, dz. На гранях элемента, содержащих точку A, напряжения имеют следующие значения:

$ADEF$: σ_x, τ_{xy}, τ_{xz};
$ABCD$: σ_y, τ_{yx}, τ_{yz};
$ABGF$: σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}.

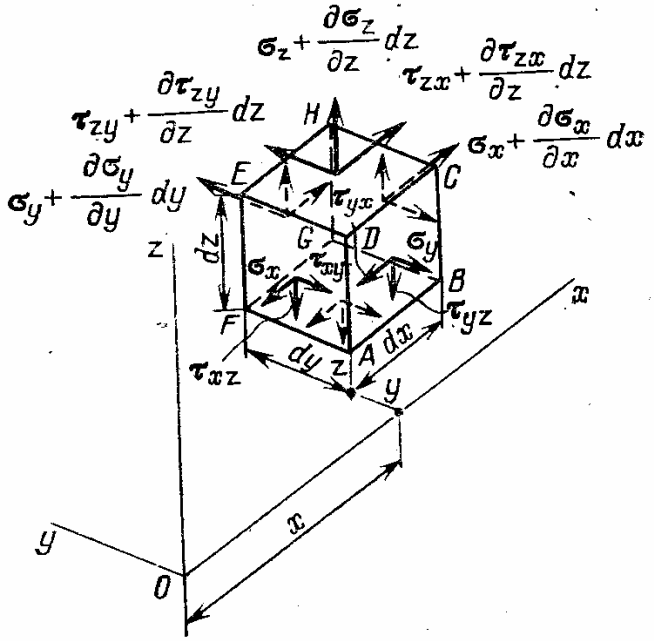


Рис. 2.30. Условия равновесия элемента тела

На рис. 2.30 показаны или обозначены не все напряжения, чтобы излишне не загромождать чертеж. На других гранях будем иметь:

$$HGBC: \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\quad \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx,\quad \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx;$$

$$HGFE: \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy,\quad \tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy,\quad \tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy;$$

$$HCDE: \sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz,\quad \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz,\quad \tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz.$$

Приращение напряжений по отношению к другой параллельной грани связано с приращением одной из координат. Кроме напряжений на гранях элемента, на него действует массовая сила, компоненты которой обычно обозначают X, Y, Z.

Составим суммы проекций всех сил на оси координат. Удобно сразу рассматривать две параллельные грани, так как напряжения на них направлены в разные стороны. Рассмотрим проекцию сил на ось x. На гранях $ADEF$ и $BCHG$ составляющие по оси x имеют только нормальные напряжения:

$$-\sigma_x\,dy\,dz+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz.$$

Среди сил, действующих по граням $ADCB$ и $FEHG$, проекцию на ось x дают касательные напряжения

$$-\tau_{yx}\,dx\,dz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right)dx\,dz.$$

Силы на гранях $ABGF$ и $DCHE$ составляют проекцию на ось x

$$-\tau_{zx}\,dx\,dy+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy.$$

Сумма проекций всех сил с учетом массовой силы дает следующее условие:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho X=0, \tag{94}$$

и аналогично для других осей:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho Y=0, \tag{95}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0. \tag{96}$$

Уравнения (94)—(96) представляют собой три *дифференциальных уравнения равновесия* элемента тела в прямоугольных (декартовых) координатах.

Из механики известно, что в общем случае для любого тела, находящегося в равновесии, должны выполняться шесть условий равновесия (три — относительно составляющих усилия и три — для составляющих момента). Три условия для моментов были рассмотрены ранее, и они не изменяются при учете приращения напряжений по граням элемента. Эти три условия представляют свойства парности касательных напряжений

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}. \tag{97}$$

Пример. Покажем, что для случая плоского напряженного состояния, когда

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{zx}=0,\quad \tau_{zy}=0 \tag{98}$$

и массовые силы отсутствуют ($X=Y=Z=0$), условия равновесия будут

удовлетворены, если положить

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}, \tag{99}$$

$\Phi(x, y)$ — произвольная непрерывная функция координат. Действительно, надо позаботиться только об условиях (94) и (95), так как уравнение (96) удовлетворяется в силу равенства (98). Подстановка соотношений (90) в уравнения (94) и (95) приводит к тождествам

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x\, \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y\, \partial x\, \partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y\, \partial x^2} &= 0, \end{aligned} \tag{100}$$

так как частные производные непрерывных функций не зависят от порядка дифференцирования.

Замечание. Не следует думать, что равенства (99) дают полное решение плоской задачи. Используя соотношения (99), удается удовлетворить только уравнения равновесия, однако, как будет ясно из дальнейшего, для полного решения задачи функция $\Phi(x, y)$ должна еще удовлетворить условия совместности деформаций всех элементов.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента в тензорной форме. Вспоминая тензорные обозначения и учитывая свойство парности касательных напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, можно записать уравнения равновесия в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho X_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho X_3 &= 0. \end{aligned} \tag{101}$$

Числовая индексация осей позволяет применить приемы сокращенной записи. Три уравнения (101) запишем в виде

$$\sigma_{ij,\,j} + \rho X_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{102}$$

В уравнении (102) запятая в индексе означает дифференцирование по координате, указываемой следующим за запятой индексом. Далее в тензорной записи используется правило Эйнштейна: по двум одинаковым индексам проводится суммирование от 1 до 3. В уравнении (102) такое суммирование проводится по индексу j. Давая индексу i значения 1, 2, 3, получаем каждый раз одно из уравнений (101).

Краевые условия для напряжений. Уравнения равновесия (94) — (96) справедливы для всех внутренних элементов. Равновесие элементов, примыкающих к поверхности тела, обеспечивается выполнением краевых условий (рис. 2.31, *а*, *б*).

Допустим, что на поверхности тела заданы внешние распределенные нагрузки (напряжения на поверхности). Вектор напряжения

$$\mathbf{p}_\nu(p_x, p_y, p_z)$$

имеет составляющие по осям x, y и z соответственно p_x, p_y, p_z. Элемент поверхности dS, нормаль к которому ν, можно рассматривать как косую площадку и записать аналогично соотношениям (55) — (57):

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= p_x, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= p_y, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_z, \end{aligned} \qquad (103)$$

где l, m, n — составляющие единичного вектора нормали (направляющие косинусы нормали); σ_x, ..., τ_{yx}, ... — компоненты напряженного состояния в точках поверхности.

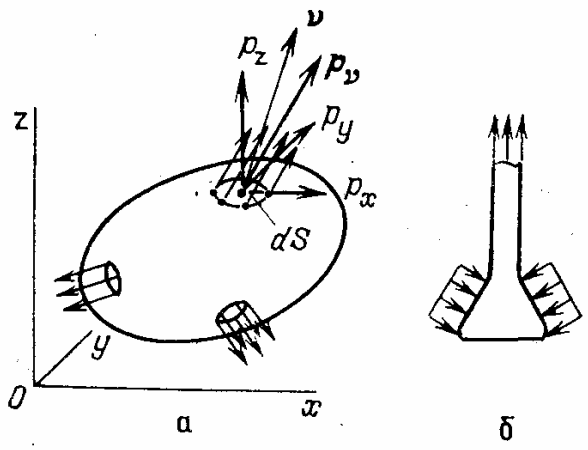


Рис. 2.31. Краевые условия для напряжений: *а* — общий случай действия распределенной по поверхности нагрузки; *б* — поверхностные нагрузки, действующие на хвостовик лопатки компрессора газотурбинного двигателя

Если часть поверхности свободна от действия внешней нагрузки, то для точек этой части поверхности

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0. \qquad (104)$$

Действие сосредоточенных сил. В конструкциях встречаются внешние нагрузки, приложенные к небольшим участкам поверхности (рис. 2.32). В таких случаях удобно ввести понятие (модель) «сосредоточенное воздействие» или «сосредоточенная сила».

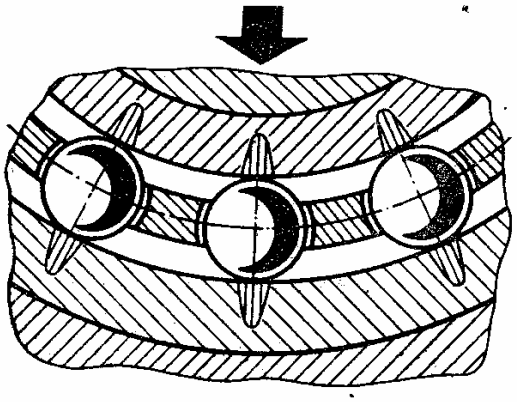


Рис. 2.32. Пример действия сосредоточенных сил (взаимодействие вала и шарикоподшипника)

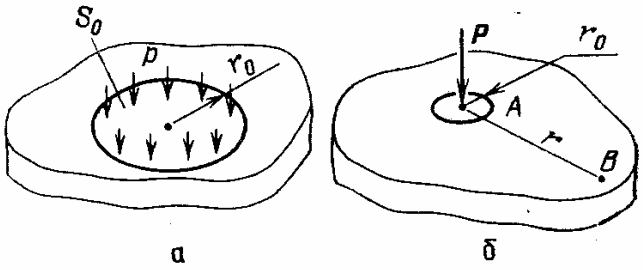


Рис. 2.33. Сосредоточенная сила как результат предельного перехода: *а* — поверхностная распределенная нагрузка; *б* — замена распределенной нагрузки сосредоточенной силой

Пусть на участке поверхности S_0 (рис. 2.33) приложены внешние распределенные нагрузки, интенсивность которых (напряжение) равна p. Если площадь S_0 мала, а напряжения p велики, то их действие можно заменить сосредоточенным усилием

$$P = pS_0. \qquad (105)$$

На достаточном удалении от малой площадки S_0 в двух схемах действия внешней нагрузки напряжения будут практически одинаковыми, что дает основания для использования представления о сосредоточенном воздействии внешней нагрузки. Точнее, под сосредоточенным усилием понимается предел

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ S_0\to 0}} (pS_0) = P. \qquad (106)$$

В местах приложения сосредоточенных усилий интенсивность поверхностной нагрузки стремится к бесконечности. Это заключение в соответствии с равенствами (103) относится и к компонентам напряженного состояния в точке приложения силы (в некоторой малой области).

Следует всегда иметь в виду, что модель сосредоточенного воздействия является расчетной схемой, дающей достоверные результаты на некотором удалении от точки приложения силы. Однако представление о сосредоточенном воздействии часто очень удобно, и оно широко применяется в технических расчетах.

Принцип Сен-Венана для краевых условий. Рассмотрим тело, которое нагружается на одном из небольших участков распределенными усилиями. В одном случае (рис. 2.34, *а*) нагрузка рас-

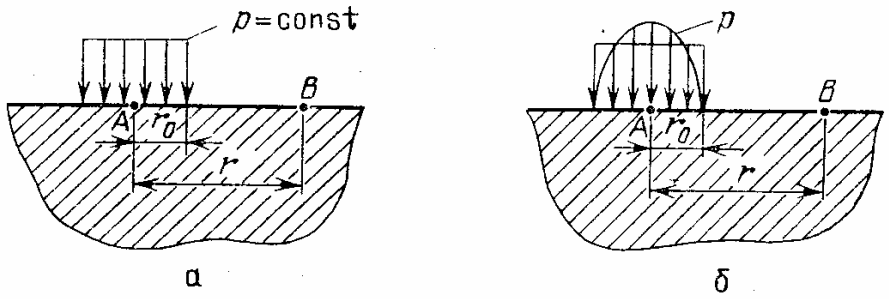


Рис. 2.34. Принцип Сен-Венана

пределена в пределах участка равномерно, в другом (рис. 2.34, *б*) — неравномерно. Равнодействующие двух распределенных нагрузок

$$P = \int_{S_0} p\, dS_0 \qquad (107)$$

одинаковы.

Отметим, что системы внешних сил на участке, имеющие одинаковые значения равнодействующего усилия, называются статически эквивалентными. В двух случаях нагружения напряженные состояния в детали в пределах участка нагружения будут, конечно, различными, но на некотором удалении от рассматриваемого участка окажутся практически одинаковыми.

Сущность принципа Сен-Венана состоит в следующем. На удалении от нагруженного участка поверхности порядка наибольшего

линейного размера участка особенности распределения нагрузки в пределах участка несущественны, важна только величина равнодействующего усилия. Для нагружения, показанного на рис. 2.34, при $r \gg r_0$ напряжения и деформации в точке B будут практически одинаковыми. Принцип Сен-Венана имеет большое практическое значение, так как часто позволяет упростить краевые условия, если основной интерес представляют напряжения и деформации на некотором удалении от места приложения нагрузки.

Замечания. 1. Принцип Сен-Венана не доказан в общем случае, но во всех полученных точных решениях он соблюдался. Принципы, справедливые для широкого класса задач, но не доказанные в общем виде, называются эвристическими. Принцип Сен-Венана принадлежит к числу эвристических.

2. Принцип Сен-Венана не указывает конкретно то расстояние, на котором уже не сказываются отличия в распределении внешней нагрузки. В нем утверждается, что такие расстояния имеют порядок наибольшего размера участка приложения нагрузки.

Напомним, что в физике принято называть величинами одного порядка величины, различающиеся не более чем в десять раз.

Несмотря на некоторую неопределенность в количественном отношении, физическая сущность принципа Сен-Венана важна для инженерного анализа конструкций.

3. Принцип Сен-Венана распространяется на статически эквивалентные системы внешних нагрузок, приложенных на малых участках поверхности тела.

ГЛАВА 3

ДЕФОРМАЦИИ

Из опыта известно, что под действием внешних усилий элементы машин и конструкций изменяют свои первоначальные размеры и форму (удлинение болта, прогиб лопастей вертолета под действием собственного веса, прогиб труб и балок и т. п.).

В большинстве случаев изменения размеров и формы после приложения нагрузки невелики, но в ряде случаев могут препятствовать нормальной работе. Умение определять деформации, установление их допустимых значений имеют важное значение при проектировании и расчете конструкций. Рассмотрение деформаций необходимо также для выяснения закона распределения напряжений в элементах конструкций, для оценки работоспособности по условиям прочности.

В теории деформаций сопоставляются начальное и деформированное состояния тела. Время деформирования, траектории точек тела в процессе деформации, физические свойства тела оставляются в стороне. Изучается геометрическая задача — изменение длины и взаимных углов поворота линейных элементов тела.

8. Перемещения и деформации

Перемещения и деформации в случае простого растяжения. Если к стержню, закрепленному в корневом сечении (рис. 3.1), приложить на другом торце осевое усилие, то произойдет удлинение стержня — точка A перейдет в точку A^*.

Перемещение точки A в процессе деформации (отрезок AA^*) обозначается на рис. 3.1 величиной u. Чем длиннее будет стержень, тем больше перемещение его конца под действием нагрузки. Деформацию материала стержня характеризует отношение перемещения к первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{u}{l_0}. \qquad (1)$$

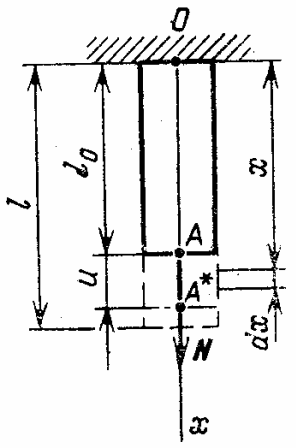


Рис. 3.1. Удлинение — деформация стержня при растяжении

Величина ε является безразмерной и называется линейной деформацией или, более кратко, *деформацией*. При сжатии стержня ($l < l_0$, $u < 0$) деформация становится отрицательной ($\varepsilon < 0$). Деформация в материале конструкции в рабочих условиях составляет сотые, редко десятые доли процента. При разрушении деформация конструкционных материалов достигает десятков процентов (обычно до 30%). Равенство (1) используют для определения малых деформаций ($\varepsilon < 0{,}1$). При больших деформациях следует рассмотреть весь процесс деформирования. Пусть в данный момент нагружения перемещение конца

стержня составляет u и происходит приращение перемещения du. Тогда приращение деформации

$$d\varepsilon = \frac{du}{l_0 + u}.$$

Деформация стержня при изменении его длины от l_0 до l составит

$$\varepsilon_и = \int_0^{l-l_0} \frac{du}{l_0 + u} = \int_{l_0}^{l} \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0}. \qquad (2)$$

Величина $\varepsilon_и$, определяемая из последнего равенства, называется истинной деформацией (или логарифмической деформацией). Разлагая в ряд выражение (2), находим

$$\varepsilon_и = \ln(1 + \varepsilon) = \frac{u}{l_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{l_0}\right)^2 + \ldots = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots$$

При малых ε формулы (1) и (2) совпадают, при $\varepsilon > 1\%$ расхождение может быть заметным, при $\varepsilon > 10\%$ — существенным. Причина расхождения очевидна: удлинение u в равенстве (1) относится к первоначальной длине l_0. Если относить удлинение к «средней длине», в процессе деформации полагая

$$\varepsilon_и \approx \frac{u}{l_0 + \frac{1}{2}u} \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad (3)$$

то совпадение с истинной деформацией будет вплоть до квадратичных членов. В дальнейшем основное значение имеет случай малых деформаций, что позволяет использовать наиболее простую зависимость (1).

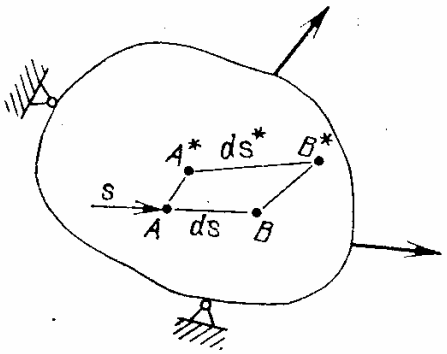


Рис. 3.2. Определение линейной деформации в точке A в заданном направлении

Погрешность равенства (1)

$$\Delta = \left|\frac{\varepsilon - \varepsilon_и}{\varepsilon}\right| < \frac{1}{2}|\varepsilon|. \qquad (4)$$

Например, если, как обычно, деформация в рабочих условиях меньше 0,5%, то погрешность формулы (1) меньше 0,25%; такая погрешность вполне допустима в технических расчетах, так как она меньше погрешности самих измерений.

Определение линейной деформации. Рассмотрим определение линейной деформации в точке A деформируемого тела (рис. 3.2). Линейная деформация в различных направлениях будет различна, и следует указать не только точку, в которой определяется деформация, но и ее направление. Пусть деформация определяется в направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{s}$ (см. рис. 3.2).

На указанной прямой рассматривается вторая, бесконечно близкая точка B и прослеживается изменение отрезка $AB = ds$ в результате деформации. После общей деформации тела точка A перешла в точку A^*, точка B — в точку B^*.

Будем называть *линейной деформацией* в точке A в направлении s следующую величину:

$$\varepsilon_s = \frac{A^*B^* - AB}{AB} = \frac{ds^* - ds}{ds}, \tag{5}$$

где $A^*B^* = ds^*$ — длина отрезка ds после деформации.

В дальнейшем будет показано, каким образом вычисляется линейная деформация, если известны перемещения точек в деформированном теле.

Определение угловой деформации. Линейная деформация не может полностью охарактеризовать изменение элемента тела при его деформировании, так как возможно не только изменение линейных размеров, но и скос граней. На рис. 3.3 показан общий случай деформации

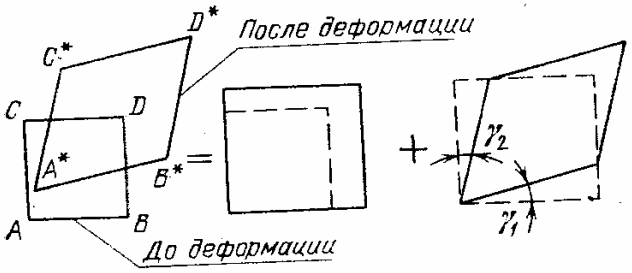


Рис. 3.3. Общая деформация элемента как сумма линейной и угловой деформаций

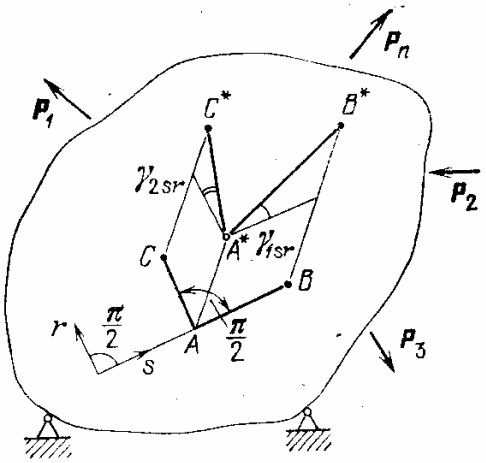


Рис. 3.4. Определение угловой деформации в точке между двумя взаимно перпендикулярными направлениями

плоского элемента. Переход от начального состояния $ABCD$ в конечное $A^*B^*C^*D^*$ (точки A и A^* условно совмещены) осуществляется за счет изменения длины (без изменения углов) и за счет изменения углов (без изменения длины).

Изменение угла между двумя взаимно перпендикулярными до деформации направлениями называется *деформацией сдвига*. В общем случае для определения деформации сдвига в точке A между направлениями s и r рассматриваются два бесконечно малых отрезка AB и AC вдоль указанных направлений (рис. 3.4). Деформация сдвига

$$\gamma_{sr} = \gamma_{1sr} + \gamma_{2sr}, \tag{6}$$

где γ_{1sr}, γ_{2sr} — углы поворота отрезков в плоскости sr относительно первоначальных направлений.

9. Связь перемещений и деформаций

Перемещения, составляющие перемещений. Допустим, что имеется система координат x, y, z (рис. 3.5), неподвижная в пространстве (например, жестко связанная с точками закрепления тела). Произвольная точка тела до деформации обладает координатами x, y, z.

После деформации точка A перейдет в точку A^*. Вектор A^*A представляет собой перемещение точки A. Перемещения точек тела

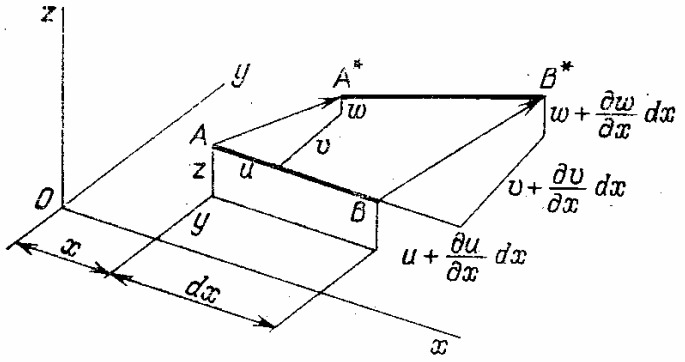


Рис. 3.5. Определение деформации ε_x

в результате деформации обычно считаются малыми относительно линейных размеров конструкции.

Замечание. Следует подчеркнуть, что порядок малости всегда предполагает наличие «эталонных» величин, относительно которых определяется порядок малости. Например, перемещения точек поверхности Земли в результате температурных напряжений могут составлять 50—100 км, однако эти перемещения являются малыми по сравнению с радиусом Земли $R \approx 6400$ км.

Составляющие перемещения точки A по осям x, y, z обозначим u, v, w. Рассмотрим отрезок AB, параллельный оси x. Длина отрезка равна dx. Составляющие перемещения точки B будут отличаться от составляющих в точке A, так как функции u, v, w получат приращения (координата вдоль оси x в точке B имеет значение $x+dx$). Составляющие перемещения в точке B будут такими:

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\quad v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\quad w+\frac{\partial w}{\partial x}dx.$$

В результате деформирования точки A и B перейдут в точки A^* и B^*. Координаты указанных точек A, B, A^*, B^*:

$$A(x,\ y,\ z),\quad B(x+dx,\ y,\ z),$$

$$A^*(x+u,\ y+v,\ z+w),$$

$$B^*\left(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\ y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\ z+w+\frac{\partial w}{\partial x}dx\right).$$

Формулы Коши для линейных деформаций. Линейная деформация в точке $A(x, y, z)$ в направлении оси x будет равна

$$\varepsilon_x = \frac{A^*B^* - AB}{AB}. \tag{7}$$

Из аналитической геометрии известно, что расстояние l между двумя точками с координатами (x_2, y_2, z_2) и (x_1, y_1, z_1) равно

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Применяя эту формулу для определения длины отрезка A^*B^*, получим

$$A^*B^* = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}.$$

Учитывая, что $AB = dx$, находим из равенства (7)

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай малой деформации, когда

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \ll 1. \tag{9}$$

Вспоминая, что при $\alpha \ll 1$

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \ldots,$$

из соотношения (8) находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{10}$$

Членами, стоящими в квадратных скобках, при малых деформациях (условие (9)) допустимо пренебречь, и тогда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{11}$$

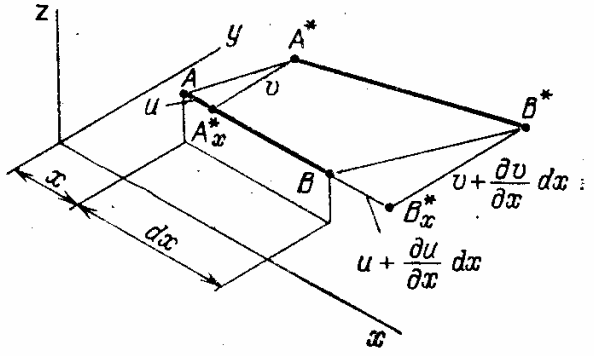


Рис. 3.6. Определение малой деформации ε_x

Соотношение (11), которое представляет первую формулу Коши можно получить сразу, если воспользоваться правилом, справедливым при малых деформациях: для определения линейной деформации в заданном направлении достаточно рассмотреть проекции перемещения точек на заданное направление. Иными словами, для определения малой деформации вдоль оси x достаточно принять во внимание только составляющие перемещения по оси x.

На рис. 3.6 показаны проекции точек A^* и B^* на направление AB, параллельное оси x. Отрезок A_x^*A равен u, а $B_x^*B = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$. Малая деформация в точке A в направлении оси x равна

$$\varepsilon_x = \frac{A_x^*B_x^* - AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичным образом можно найти следующие зависимости:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{13}$$

Соотношения (11)—(13) составляют три первые формулы Коши.

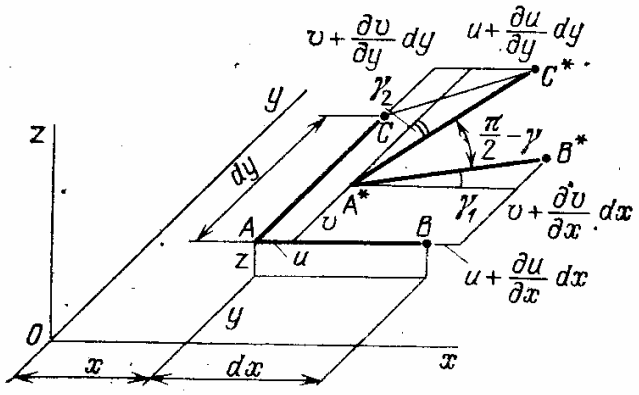


Рис. 3.7. Определение деформации сдвига в точке A в плоскости yOx

Формулы Коши для угловых деформаций. Рассмотрим определение деформации сдвига в точке A (рис. 3.7) в плоскости, параллельной плоскости yOx. Для этого проследим за изменением угла между отрезками AB и AC, составляющими первоначально прямой угол. Длина отрезков до деформации составляет $AB = dx$, $AC = dy$. Предполагая деформации малыми, достаточно рассмотреть проекции перемещений на плоскость xOy (условно считая $w = 0$).

Проекции отрезка A^*B^* на оси x и y будут $dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx, \frac{\partial v}{\partial x}dx$. Далее, находим

$$\operatorname{tg}\gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \approx \frac{\partial v}{\partial x},$$

так как $\partial u/\partial x \ll 1$.

Проекции отрезка A^*C^* на оси x и y соответственно равны $\frac{\partial u}{\partial y}dy, dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ и $\operatorname{tg}\gamma_2 \approx \gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$. Угол сдвига

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{14}$$

Аналогичным образом можно получить

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{15}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{16}$$

Формулы (14)—(16) представляют формулы Коши для малых деформаций сдвига.

Сводка результатов. При малых деформациях, когда производные перемещений по координатам значительно меньше единицы, связь перемещений и деформаций выражается формулами Коши

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{gathered} \tag{17}$$

10. Линейная деформация в произвольном направлении. Главные деформации, тензор деформаций

Линейная деформация в произвольном направлении. Часто при исследовании деформаций, например с помощью проволочных тензометров (тензорезисторов), необходимо определять линейную деформацию в направлении, составляющем произвольный угол α с осью x.

Рассмотрим случай плоской деформации, когда перемещение вдоль оси z отсутствует (рис. 3.8).

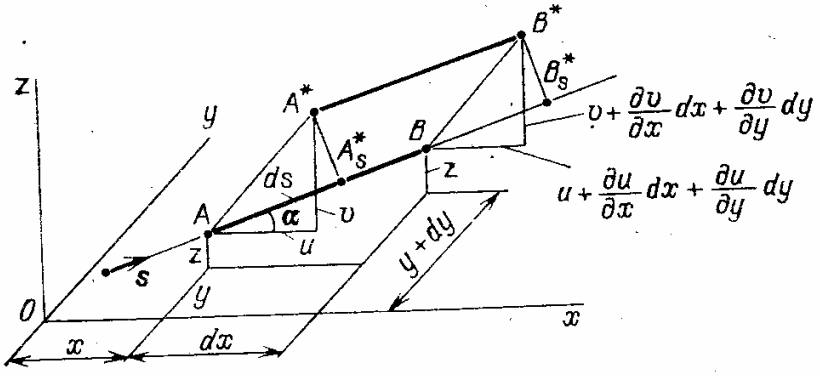


Рис. 3.8. Линейная деформация в произвольном направлении (при плоской деформации, $w = 0$)

Перейдем к определению линейной деформации вдоль прямой, проходящей через точку A. Прямая лежит в плоскости, параллельной плоскости yOx, и направлена под углом α к оси x. Направление характеризуется единичным вектором s. Рассмотрим отрезок $AB = ds$ (см. рис. 3.8), лежащий на указанном направлении.

Компоненты перемещения точки A в результате деформирования составляют u, v, компоненты перемещения точки B

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Так как теперь обе координаты точки B отличаются от координат точки A, то составляющие u и v получили приращения. Малая линейная деформация в направлении s будет равна

$$\varepsilon_s = \frac{A_s^*B_s^* - AB}{AB} = \frac{A_s^*B_s^* - ds}{ds}; \tag{18}$$

отрезок

$$A_s^*B_s^* = ds + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)l + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)m - ul - vm =$$

$$= ds + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)l + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)m, \tag{19}$$

где $l = \cos\alpha$, $m = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$ — направляющие косинусы направления s (проекции единичного вектора s на оси координат).

Из соотношений (18)—(19) получаем

$$\varepsilon_s = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)l + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)m. \tag{20}$$

Так как

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{21}$$

то

$$\frac{dx}{ds} = l, \quad \frac{dy}{ds} = m. \tag{22}$$

С учетом последних соотношений находим выражение для линейной деформации в направлении s:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial x}l^2 + \frac{\partial v}{\partial y}m^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)lm$$

или в силу зависимостей (11)

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm. \tag{23}$$

В другой форме имеем

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + \gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha. \tag{24}$$

Замечание. Последняя зависимость по своей структуре аналогична формуле для нормальных напряжений в направлении, составляющем угол α с осью x (формула (17) гл. 2).

Если заменить σ_x на ε_x, σ_y на ε_y и τ_{xy} на $\gamma_{xy}/2$, то выражения для линейной деформации или нормальных напряжений в заданном направлении будут одинаковыми.

Рассмотрим теперь общий случай, когда направление s характеризуется направляющими косинусами l, m и n и точка B имеет

координаты $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$. Повторяя вывод уравнения (24) для пространственного случая, найдем

$$\varepsilon_s = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) l + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) m + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) n.$$

Учитывая равенства

$$\frac{dx}{ds} = l, \quad \frac{dy}{ds} = m, \quad \frac{dz}{ds} = n,$$

получим

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \tag{25}$$

Главные направления и главные деформации. При определении главных направлений напряженного состояния в точке было показано, что в указанных направлениях нормальные напряжения обладают экстремальными свойствами (имеют наибольшие значения по отношению к напряжениям в других направлениях). Воспользуемся этими свойствами для нахождения главных направлений деформации. Ограничимся практически наиболее важным случаем плоской деформации (деформация в плоскостях, параллельных плоскости xOy; перемещение $w = 0$).

Найдем экстремальное значение ε_s в зависимости от угла α, характеризующего направление деформации. Приравнивая нулю производную, получим

$$\frac{d\varepsilon_s}{d\alpha} = -2\varepsilon_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\varepsilon_y \sin\alpha \cos\alpha + \gamma_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

что дает

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\varepsilon = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \tag{26}$$

Величина

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \tag{27}$$

называется тензорной компонентой сдвига.

Как уже указывалось, по аналогии между напряженным и деформированным состоянием величина ε_{xy} соответствует τ_{xy}.

Соотношение (26) определяет два главных направления при плоской деформации (третье направление к ним перпендикулярно, соответствует деформации $\varepsilon_3 = 0$).

Представляя соотношение (24) в виде

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma^{xy}\sin 2\alpha \tag{28}$$

и учитывая зависимости (26) и (27) гл. 2, найдем с помощью равенства (26) главные деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \tag{29}$$

Тензор деформаций. Тензор деформаций имеет структуру, полностью аналогичную тензору напряжений (см. разд. 6):

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}. \tag{30}$$

По аналогии с инвариантами напряженного состояния запишем инварианты деформированного состояния:

$$J_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{31}$$

$$J_{2\varepsilon} = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2; \tag{32}$$

$$J_{3\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Напомним, что инвариантами деформированного (или напряженного) состояния называются величины, не зависящие от выбора системы координат. Разберем физический смысл первого инварианта деформируемого состояния. Найдем изменение объема элемента тела (рис. 3.9) при деформации. Первоначальный объем элемента

$$dV = dx\,dy\,dz. \tag{34}$$

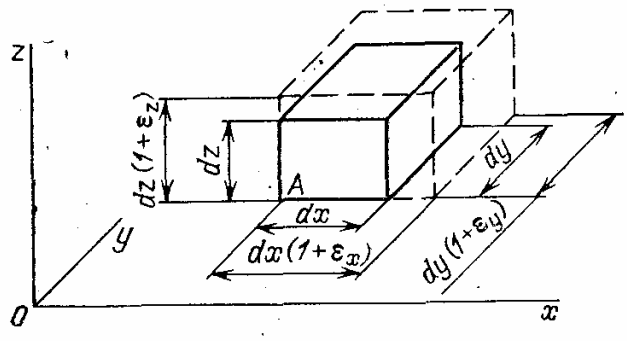


Рис. 3.9. Изменение объема элемента при деформации

После деформации ребра получили деформации ε_x, ε_y, ε_z. Новый объем можно вычислить, пренебрегая деформациями сдвига:

$$dV = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)\times \times(1+\varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz. \tag{35}$$

Объемная деформация составит

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \tag{36}$$

или в пределах малых деформаций

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{37}$$

Первый инвариант $J_{1\varepsilon}$ представляет объемную деформацию, т. е. относительное изменение объема частицы материала. Это изменение зависит от свойств материала и напряженного состояния и не может зависеть от выбора осей системы координат.

Отметим, что тензор деформаций является симметричным, так как по определению

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}. \tag{38}$$

Если применяются для осей x, y, z обозначения x_1, x_2, x_3, то тензор деформации имеет следующий вид:

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} = \{\varepsilon_{ij}\}, \tag{39}$$

где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$. Компоненты перемещения обозначаются u_1, u_2, u_3.

Преимущества тензорных обозначений легко видеть на примере тензорной записи уравнений Коши для компонентов тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{40}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по координате, указываемой следующим за запятой индексом. Например,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \text{ и т. д.}$$

11. Уравнения совместности деформаций

Первая группа уравнений. Деформация в окрестности точки деформированного тела описывается шестью скалярными величинами: линейными деформациями ε_x, ε_y и ε_z по трем взаимно перпендикулярным направлениям и угловыми деформациями γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}. Например, линейная деформация в произвольном направлении, характеризуемом направляющими косинусами l, m и n (формула (26)), может быть определена, если известны шесть указанных величин.

Вместе с тем из формул Коши следует, что шесть величин ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} выражаются через производные трех функций u, v и w. Следовательно, между компонентами деформаций должны существовать зависимости, вытекающие из условия, что для непрерывных дифференцируемых функций порядок дифференцирования не оказывает влияния на окончательный результат; например,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Возьмем для сопоставления следующие формулы Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя величину γ_{xy} по x и по y, найдем

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}. \tag{41}$$

Подобным образом или способом круговой перестановки индексов можно получить

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}. \tag{43}$$

Уравнения (41)—(43) образуют первую группу уравнений совместности деформаций.

Вторая группа уравнений. Существуют еще три тождества, которые получаются несколько более громоздким путем.

Выпишем выражения для деформаций сдвигов:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{44}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{45}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{46}$$

Для того чтобы связать производные деформаций сдвигов с производной от ε_x, попытаемся исключить из правых частей уравнений (44) функции v и w. Так как следует сохранить в правой части одну производную от u, то нужно продифференцировать уравнение (44) по z, а уравнение (46) — по y. Тогда получим

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}. \tag{48}$$

Из (47) и (48) найдем

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{49}$$

Сумма двух последних членов в правой части равенства в силу зависимости (45) равна

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x},$$

и тогда можно записать

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}. \tag{50}$$

Теперь, чтобы получить в правой части равенства производную от ε_x достаточно продифференцировать соотношение (50) по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z}. \tag{51}$$

С помощью круговой перестановки индексов получаем еще два тождества:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}. \tag{53}$$

Уравнения (51)—(53) составляют вторую группу уравнений совместности деформаций.

Замечание. Шесть уравнений совместности деформаций (уравнения (41)—(43), (51)—(53)) были установлены французским инженером Б. Сен-Венаном, одним из создателей современной теории упругости. Уравнения совместности часто называют тождествами Сен-Венана.

Физический смысл уравнений совместности деформаций. Компоненты деформации однозначно описывают деформацию элемента тела. В деформированном состоянии все элементы должны образовывать единое тело. Если условия совместности деформаций нарушаются, то из отдельных элементов нельзя составить тело без разрывов и пустот (рис. 3.10). В том случае, когда уравнения совместности удовлетворяются в каждой точке тела, перемещения u, v и w будут непрерывными функциями координат, что гарантирует непрерывное преобразование начальной формы тела в конечную (деформированную).

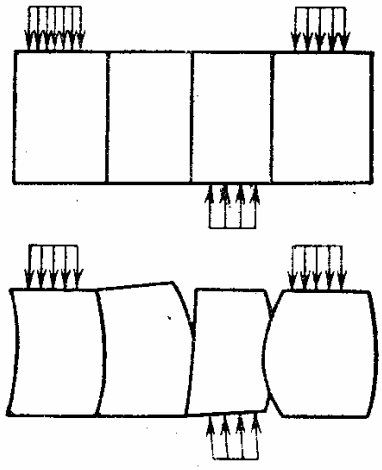


Рис. 3.10. Деформированное состояние тела при нарушении условий совместности деформаций

Если решение задачи о напряженном и деформированном состояниях сводится к отысканию перемещений u, v, w и последние выбираются среди класса непрерывных функций с непрерывными частными производными до третьего порядка, то уравнения совместности деформаций удовлетворяются тождественно.

ГЛАВА 4

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Вводные замечания. Для оценки прочностной надежности конструкций необходимо изучить поведение материала в служебных условиях при действии внешних нагрузок, температур и т. п.

В соответствии с принятой моделью материала — моделью сплошной среды — мы отказываемся от изучения внутренней микроструктуры материала (поведения кристаллической решетки, развития дислокаций и т. д.) и будем использовать *феноменологический* (описательный) подход. Такой подход означает, что, не вдаваясь в сущность внутренних процессов, явление (феномен) изучается по его внешним проявлениям при различных внешних воздействиях.

Не обсуждая общности подобного метода, используемого во многих областях науки и техники, укажем, что феноменологический подход предопределяет необходимость экспериментального изучения механических свойств материалов. Эти свойства изучаются в системе опытов с образцами материалов простой формы при воспроизведении основных особенностей нагружения.

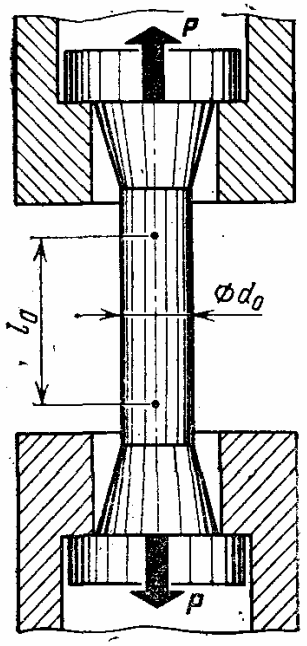


Рис. 4.1. Схема испытания круглых образцов на растяжение

12. Диаграммы деформирования, пределы текучести и прочности

Испытания на растяжение образцов материала. Основным опытом для определения механических свойств материала является получение зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении. На рис. 4.1 показана схема испытания образцов в специальных испытательных машинах. Головки образца размещаются в захватах машины, к которым прикладывается внешнее усилие P. В процессе испытания измеряется величина усилия и средняя деформация на определенной длине образца l_0. В результате строится зависимость между напряжениями и деформациями в образце материала:

$$\sigma = f(\varepsilon), \tag{1}$$

которая называется *диаграммой деформирования.*

Напряжение в цилиндрической испытуемой части образца

$$\sigma = P/F, \tag{2}$$

где P — внешнее усилие, F — площадь поперечного сечения образца ($F = \pi d^2/4$, d — диаметр образца).

Деформация

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}, \tag{3}$$

где l — длина контрольного участка образца после деформации.

Упругость, модуль упругости, пластичность, закон разгрузки и закон упрочнения. При проведении опытов с растяжением образцов выявляются общие свойства конструкционных материалов — свойства упругости и пластичности. На рис. 4.2 показаны типичные результаты опытов на растяжение. Если напряжение σ не превышает определенной величины — предела упругости σ_y, то зависимость между напряжением σ и деформацией ε оказывается линейной:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (4)$$

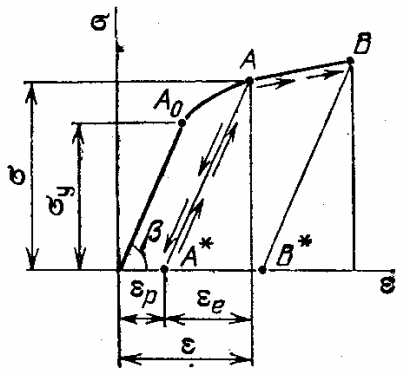


Рис. 4.2. Свойства упругости и пластичности материала при испытании на растяжение

В этой зависимости E — модуль упругости материала. Величина E является важной характеристикой материала. Так как деформация ε является безразмерной величиной, то размерность модуля упругости совпадает с размерностью напряжения.

В системе единиц СИ $\dim E =$ [сила/площадь] (например Н/мм^2, МПа — мегапаскаль).

В технической системе единиц величина E измеряется обычно в кгс/см^2.

Значение E для некоторых конструкционных материалов (Н/мм^2, МПа) таково: для сплавов на основе железа $E = 2 \cdot 10^5$, для титановых сплавов $E = 1 \cdot 10^5$, для алюминиевых сплавов $E = 0{,}78 \cdot 10^5$.

Значение E на кривой деформирования при определенных масштабах для σ и ε численно равно тангенсу угла наклона линейного участка

$$E = \operatorname{tg}\beta. \qquad (5)$$

Линейная зависимость между напряжениями и деформациями является важным проявлением упругости материала. Однако основное проявление упругости материала состоит в следующем.

Если в точке A ($\sigma < \sigma_y$) прекратить нагружение материала и снять внешнюю нагрузку, деформация материала исчезнет (точка, изображающая состояние материала, вернется в начало координат).

Напомним, что свойство упругости материала как раз и заключается в том, что после снятия внешнего воздействия все размеры детали (элемента конструкции) восстанавливаются. Для подавляющего большинства конструкционных материалов, как показывает опыт, свойство упругости сохраняется до определенного значения действующего напряжения.

При возрастании напряжений свыше предела упругости ($\sigma > \sigma_y$) зависимость σ от ε перестает быть линейной.

Если в некоторый момент нагружения A прекратить нагружение и снять нагрузку, то разгрузка пойдет по прямой AA^*, приблизи-

тельно параллельной начальному участку (закон разгрузки). Точка A перейдет в точку A^*, и в материале сохранится остаточная деформация ε_p, которая представляет собой пластическую деформацию в материале, образовавшуюся при его нагружении. Полная деформация ε в момент нагружения A

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \tag{6}$$

где упругая деформация

$$\varepsilon_e = \sigma/E. \tag{7}$$

Уравнение (6) справедливо для любого момента деформации. Упругая составляющая деформации не исчезает при появлении пластических деформаций, поэтому следует говорить об упругопластических деформациях материала. Однако если упругая деформация для металлов достигает значения примерно 0,2—0,8%, то пластическая деформация может быть 20—40%. В тех случаях, когда пластическая деформация значительно больше упругой (пластическое деформирование при технологических процессах и т. п.), упругими деформациями пренебрегают (модели жесткопластического тела).

Значение модуля упругости E в формуле (7) принимается в большинстве расчетов не зависящим от пластической деформации. Опыты показывают, что некоторое влияние пластических деформаций на значение E имеется: при $\varepsilon_p > 1\%$ возможно снижение E на 5—10%.

При повторном нагружении из точки A^* процесс нагружения пойдет по прямой A^*A, т. е. зона упругой деформации (по уровню напряжений) возрастет. После предварительной пластической деформации происходит упрочнение материала (закон упрочнения), при дальнейшем нагружении (переход от точки A к точке B) деформирование идет так же, как в случае однократного нагружения.

Замечание. Закон упрочнения прогнозирует повышение сопротивления материалов возникновению пластических деформаций при повторном нагружении — повышение предела упругости после предварительной пластической деформации. Существенно, что повторное деформирование идет в том же направлении. Если после пластической деформации растяжения провести деформирование в *противоположном направлении* (на сжатие), то упрочнение не наблюдается.

Предел текучести и предел прочности. На рис. 4.3 показана зависимость между условным напряжением σ и деформацией ε. Условное напряжение вычисляется по формуле,

$$\sigma = \frac{P}{F_0} = \frac{4P}{\pi d_0^2}, \tag{8}$$

где d_0 — первоначальный диаметр образца.

При значительных деформациях ($\varepsilon > 1\%$) заметна разность между условными и истинными напряжениями

$$\sigma_и = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}, \tag{9}$$

где d — диаметр образца в процессе нагружения (деформирования). Значение $\sigma_и$ на диаграмме деформирования показано штриховой линией.

Наиболее важными характеристическими сопротивлениями материала внешним нагрузкам являются пределы текучести и прочности. Предел текучести характеризует сопротивление материала возникновению пластических деформаций. Так как переход от участка упругости к зоне появления пластических деформаций для большинства материалов носит плавный характер, то условились назначить определенную границу, после которой пластические деформации признаются существенными. Такой границей выбрано значение остаточной деформации 0,2%.

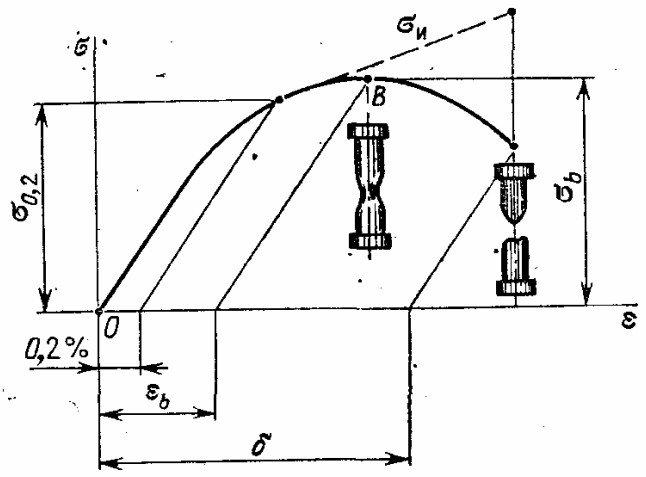


Рис. 4.3. Определение пределов пластичности и прочности на диаграмме деформирования

Пределом текучести $\sigma_{0,2}$ называется напряжение, которому соответствует остаточная (пластическая) деформация 0,2%. Часто предел текучести называется пределом пластичности; в технической литературе предел текучести $\sigma_{0,2}$ обозначается также $\sigma_т$, σ_s. Важнейшей характеристикой прочности является предел прочности. Он определяется как отношение

$$\sigma_b = \frac{P_{max}}{F_0}, \qquad (10)$$

где P_{max} — наибольшее растягивающее усилие в процессе испытания до разрушения; F_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца (для круглого образца $F_0 = \pi d_0^2/4$).

На последнем этапе растяжения образца в его цилиндрической части образуется местное сужение («шейка», см. рис. 4.3) и процесс разрушения идет при уменьшающемся внешнем усилии P. В точке B происходит потеря устойчивости равномерного пластического деформирования (пластическая деформация в этой точке ε_b), и на последнем этапе деформация происходит лишь в зоне шейки.

Наибольшее усилие при разрыве образца P_{max} (оно действует в точке B) легко определяется измерительным устройством, так как нарастание усилия идет плавно.

Поскольку величины P_{max} и F_0 определяются просто, учитывая, что истинное сопротивление в момент отрыва $\sigma_{ир} > \sigma_b$ (см. рис. 4.3), условились определять предел прочности по равенству (10).

Пределом прочности σ_b называется напряжение, соответствующее наибольшему усилию при разрушении образца, отнесенному к первоначальной площади поперечного сечения. Значения пределов текучести и пределов прочности для некоторых конструкционных материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения пределов прочности, текучести и удлинения при растяжении

Материал	σ_b, Н/мм^2	$\sigma_{0,2}$, Н/мм^2	δ, %
Низкоуглеродистые стали	300—400	180—250	20—40
Среднеуглеродистые стали	500—700	300—500	10—20
Легированные стали	800—1200	600—900	8—16
Титановые сплавы	900—1100	800—900	8—20
Алюминиевые сплавы	200—450	180—300	8—20

Обычно пределы текучести составляют $\sigma_{0,2} = (0{,}5—0{,}9)\sigma_b$, причем большие значения относятся к пределу прочности для легированных сталей и титановых сплавов.

Пределы текучести и прочности при сжатии. Построение диаграммы деформирования при сжатии связано с рядом трудностей. Первая из них состоит в том, что при сжатии стержня может наступить потеря устойчивости (искривление оси стержня). Проблема устойчивости стержней будет изучаться в дальнейшем, а сейчас отметим, что для устранения потери устойчивости надо применять образцы с малым отношением l/d. Однако по мере уменьшения этого отношения возрастает влияние на результаты опытов сил трения, возникающих между опорными поверхностями.

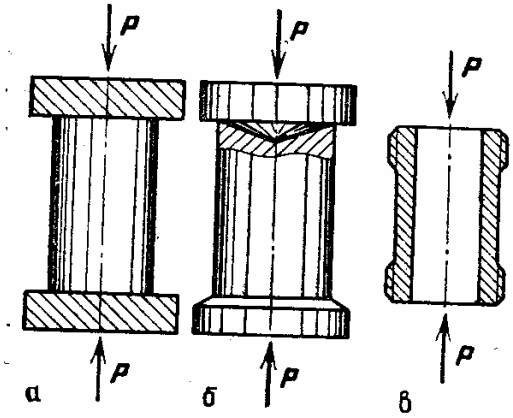


Рис. 4.4. Образцы материалов для испытания на сжатие

На рис. 4.4, *а* показаны образцы для испытаний на сжатие. Наиболее простой способ — передача усилия через плоские торцы. Образец должен быть обработан достаточно точно, с тем чтобы получить равномерное распределение напряжений сжатия по торцам. Для уменьшения влияния сил трения торцы смазываются консистентными смазками (вазелином, парафином и т. п.). Другой способ компенсации сил трения состоит в применении пологих конических поверхностей на торцах (рис. 4.4, *б*).

Для проведения последовательных испытаний на растяжение и сжатие используются трубчатые образцы (рис. 4.4, *в*), причем усилие на тело образца передается с помощью резьбы. Основная об-

ласть применения испытаний на сжатие — исследование прочности и деформации хрупких материалов, так как они используются в первую очередь для элементов конструкций, работающих на сжатие. Испытание на сжатие широко применяется для исследования строительных материалов (бетона, кирпича, камня и т. п.). В качестве образцов обычно применяют кубики размером ребра 30—40 мм.

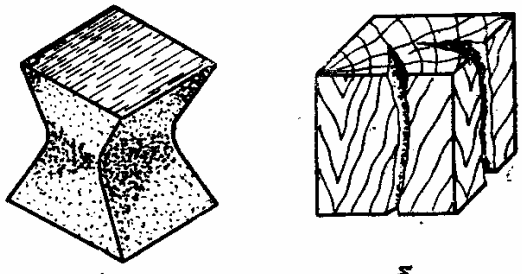


Рис. 4.5. Разрушение хрупких строительных материалов при сжатии: *а* — торцы образца не смазаны; *б* — торцы смазаны парафином

Для хрупких материалов разрушение происходит при деформации всего несколько процентов, и основное значение имеет предел прочности на сжатие. На рис. 4.5 приведены два типа разрушения строительных материалов при сжатии. В первом случае (рис. 4.5, *а*) (на торцах образца действуют силы трения) разрушение связано с действием касательных напряжений. Во втором случае (рис. 4.5, *б*) (силы трения по торцам малы) образуются продольные трещины, вызываемые деформацией растяжения в поперечном направлении. Следует отметить, что для хрупких материалов прочность на сжатие во много раз больше прочности на растяжение.

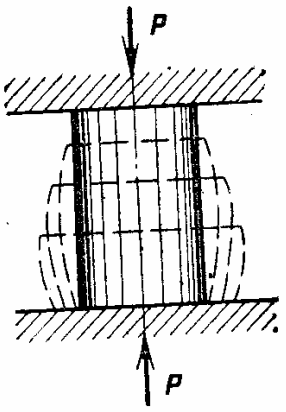


Рис. 4.6. Расплющивание пластичных материалов при сжатии

При испытании на сжатие пластичных материалов происходит увеличение поперечных сечений («расплющивание») образца (рис. 4.6). Четко определяется предел текучести, который для большинства пластичных конструкционных материалов оказывается таким же, как и при растяжении. Последнее объясняется тем, что ответственными за появление пластических деформаций являются касательные напряжения, которые при действии растягивающих и сжимающих усилий различаются только знаком.

Предел прочности при сжатии пластичных материалов при одноосном сжатии не выявляется. При всестороннем сжатии материалы выдерживают очень высокие давления, причем обычно хрупкие материалы (мрамор и др.) становятся пластичными.

Можно считать, что пластичные материалы выдерживают очень большие сжимающие напряжения, а разрушение может наступить в результате наличия в наклонных площадках касательных напряжений.

Определение предела прочности материала с помощью испытания твердости. В заводских условиях часто требуется определить прочность материала детали, например для проверки правильности

проведенной термообработки. Вырезка образца из окончательно изготовленной детали невозможна, и для косвенного определения прочности материала применяют испытания на твердость.

Наиболее распространенными являются пробы твердости по Бринелю и Роквеллу (рис. 4.7). Твердость по Бринелю, обозначаемая НВ, определяется диаметром отпечатка при вдавливании в материал твердого шарика диаметром 10 мм под нагрузкой 30 000 Н. Твердость по Бринелю принимается равной напряжению сжатия на поверхности полученного отпечатка

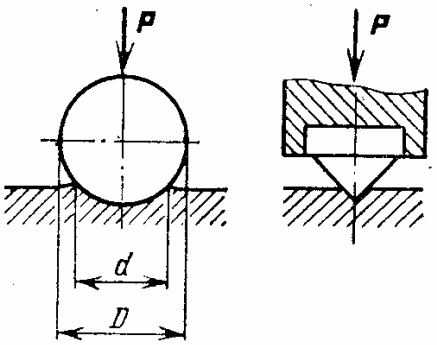


Рис. 4.7. Испытания на твердость по Роквеллу и по Бринелю

$$\text{НВ} = \frac{2P}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} \approx \frac{4P}{\pi d^2},$$

где D — диаметр вдавливаемого шарика, d — диаметр отпечатка. Чем выше твердость (прочность), тем меньше диаметр отпечатка. Например, для хромоникелевой стали с $\sigma_b = 1600$ МПа $d = 2{,}71$ мм, для той же стали при $\sigma_b = 1100$ МПа $d = 3{,}42$ мм. Диаметр отпечатка измеряется с помощью лупы. Твердость по Роквеллу (шкала C), обозначаемая HR_C, определяется как разность глубин проникновения алмазного конуса основной нагрузки (1500 Н) и предварительной (100 Н). Твердость по Роквеллу используют для контроля закаленных деталей (поверхности зубьев шестерен и т. п.).

13. Деформации и характеристики пластичности

Продольная деформация при растяжении образцов. Продольная деформация образца при растяжении, как уже указывалось, определяется по формуле (3)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Деформация измеряется тензометрами или оптическим методом (рис. 4.8).

Поперечная деформация, коэффициент Пуассона. Измерения показывают, что при растяжении происходит не только увеличение длины образца, но и уменьшение его поперечных размеров.

Деформация в поперечном направлении

$$\varepsilon_\perp = \frac{d - d_0}{d_0}, \qquad (11)$$

где d — диаметр цилиндрической части образца после растяжения. Экспериментально установлено, что при упругих деформациях

$$\varepsilon_\perp = -\mu\varepsilon, \qquad (12)$$

где μ — коэффициент Пуассона (постоянная материала).

Для большинства конструктивных материалов $\mu \approx 0{,}3$. Объемная деформация при растяжении

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_0}{V_0} = (Fl - F_0 l_0)\frac{1}{F_0 l_0}, \qquad (13)$$

где первоначальный объем материала $V_0 = F_0 l_0$. Учитывая соотношения (11)—(13), найдем при упругих деформациях

$$\varepsilon_V = (1 - \mu\varepsilon)^2(1 + \varepsilon) - 1. \qquad (14)$$

Пренебрегая малыми членами, получим следующее значение объемной деформации при растяжении:

$$\varepsilon_V = \varepsilon(1 - 2\mu). \qquad (15)$$

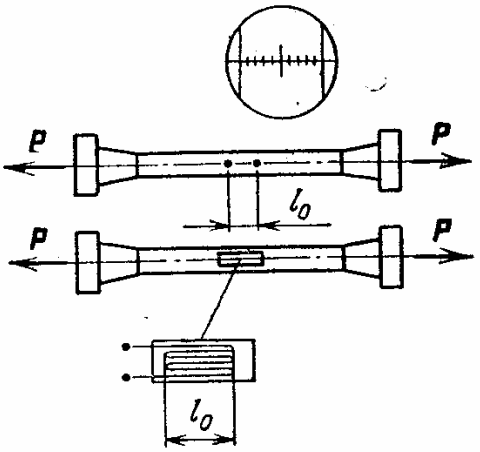


Рис. 4.8. Измерение деформаций с помощью тензометров или оптическим методом

Из физических соображений очевидно, что при растяжении объем материала не должен уменьшаться, и потому $\mu \leqslant 0{,}5$.

Для изотропного материала коэффициент Пуассона должен лежать в пределах $-1 < \mu \leqslant 0{,}5$.

Отрицательная нижняя граница связана с энергетическими соображениями, рассмотрение которых опускаем.

Практически отсутствуют материалы, имеющие отрицательное значение коэффициента Пуассона, и потому следует считать

$$0 < \mu \leqslant 0{,}5. \qquad (16)$$

Замечание. В принципе отрицательные значения μ, т. е. увеличение поперечных размеров при растяжении, могут иметь место, если процесс деформирования сопровождается обратимыми физико-химическими изменениями.

Коэффициент Пуассона в упругопластической стадии. Соотношение (12) справедливо и при появлении пластических деформаций, но при этом значение μ становится зависящим от величины деформации: $\varepsilon_\perp = -\mu(\varepsilon)\varepsilon$.

При возрастании деформации и появлении значительных пластических деформаций $\mu(\varepsilon) \to 0{,}5$.

Экспериментально установлено, что пластическая деформация протекает без изменения объема материала. Последнее обстоятельство становится физически понятным, если учесть, что деформация пластичности образуется за счет сдвига слоев материала.

Относительное удлинение при разрыве. Важной характеристикой пластичности материала является остаточное (относительное) удлинение при разрыве. На рис. 4.9 показан образец до и после разрушения. Для простого измерения удлинения на образец предварительно наносят две риски на расстоянии l_0; после деформации

определяют расстояние между рисками $l_к$, складывая вместе две половинки образца;

$$\delta = \frac{l_к - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \qquad (17)$$

остаточное удлинение принято измерять в процентах.

Так как после образования шейки удлинение материала происходит только в этом районе, то величина δ зависит от соотношения длины и диаметра образца. Для стандартных образцов применяют $l_0/d_0 = 5$ и $l_0/d_0 = 10$ и соответственно обозначают удлинение при разрыве δ_5 и δ_{10}.

Расположение сечения разрыва на образце в его цилиндрической части может быть случайным, связанным с некоторыми нарушениями однородности свойств материала по длине.

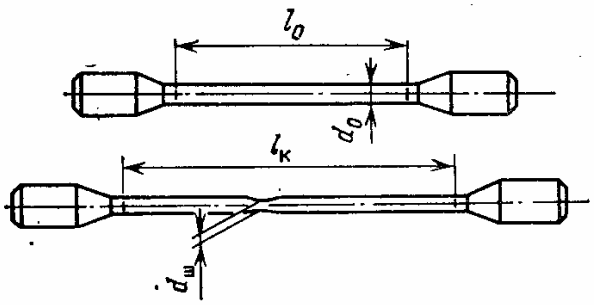


Рис. 4.9. Измерение удлинения образца и диаметра шейки при обрыве

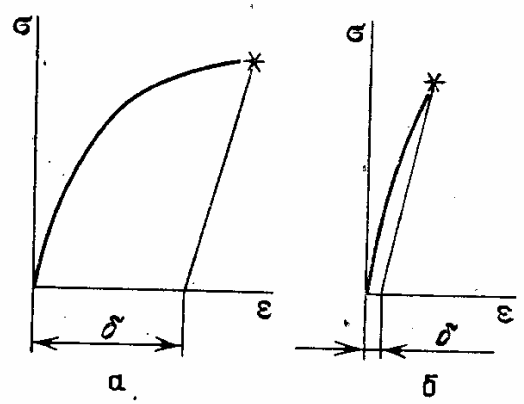


Рис. 4.10. Диаграммы деформирования для пластичного (*а*) и хрупкого (*б*) материалов

Если обрыв произошел в сечении, близком к головке, то развитие пластической деформации в шейке было затруднено и значение δ получилось заниженным. В подобных случаях либо повторяют испытание, либо используют для оценки δ ту часть образца, в которой пластическая деформация не была стеснена.

Пластичные и хрупкие материалы при испытаниях на растяжение. На рис. 4.10 показаны диаграммы деформирования для пластичных и хрупких материалов.

Материалы, обладающие к моменту разрушения значительной величиной δ ($\delta > 10\%$), называются *пластичными*. Значения δ для некоторых конструкционных материалов приведены в табл. 1. Материалы, для которых остаточное удлинение δ меньше 3%, относят к *хрупким* материалам. Для элементов конструкций в подавляющем большинстве случаев необходимо применять достаточно пластичные материалы.

Пластичные материалы обладают способностью повышенного сопротивления в условиях концентрации напряжений, ударных и

тепловых воздействий, при наличии трещин и поверхностных повреждений и т. п. Материалы с высокими характеристиками прочности часто не могут использоваться в конструкциях, если они являются хрупкими. Малейший поверхностный дефект в виде риски, царапины приводит к значительной потере прочности (достаточно привести пример резки стекла). Часто хрупкие материалы очень сложны в производстве, так как не позволяют использовать сварку, клепку, рихтовку, правку, не выдерживают перенапряжения при монтаже и т. п.

Замечание. Не следует считать, что в современной технике невозможно применение малопластичных материалов. Широкое использование жаропрочных литых материалов для лопаток турбин опровергает такое мнение. При правильном проектировании (в первую очередь, если исключены концентраторы напряжений и работа на растяжение) могут оказаться работоспособными конструкционные материалы с удлинением при разрыве в пределах 0,5—3%.

Относительное сужение поперечного сечения при разрыве. Второй важной характеристикой пластичности материала является сужение поперечного сечения образца при разрыве:

$$\psi = \frac{F_0 - F_к}{F_0} \cdot 100\%, \qquad (18)$$

где F_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца, $F_к$ — конечная площадь сечения в шейке образца после разрушения:

$$F_0 = \pi d_0^2/4, \quad F_к = \pi d_ш^2/4, \qquad (19)$$

где $d_ш$ — диаметр шейки образца.

Обычно величину ψ, которую называют *поперечным сужением*, измеряют в процентах. Величина ψ как характеристика пластичности имеет преимущество по сравнению с величиной δ — удлинением при разрыве, так как не зависит от геометрической формы цилиндрического образца (отношения l_0/d_0).

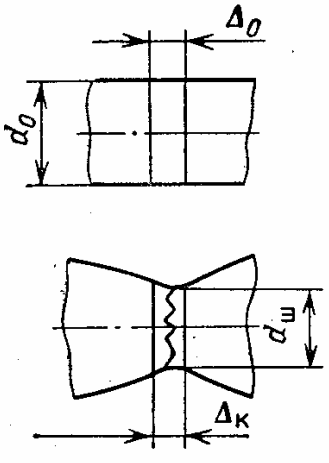


Рис. 4.11. Деформация материалов в зоне шейки

Естественно, что поперечное сужение связано с максимальной деформацией растяжения в шейке образца. Эту связь можно установить, принимая, что пластическая деформация протекает без изменения объема.

Рассмотрим слой материала образца толщиной Δ_0 (рис. 4.11), который в момент разрушения оказался в зоне шейки. Из условия постоянства объема находим

$$F_к \Delta_к = F_0 \Delta_0. \qquad (20)$$

Учитывая равенства

$$F_к/F_0 = 1 - \psi, \qquad (21)$$

$$\Delta_к/\Delta_0 = 1 + \varepsilon_к, \qquad (22)$$

где $\varepsilon_к = (\Delta_к - \Delta_0)/\Delta_0$ — относительное удлинение материала образца в зоне шейки, ψ — поперечное сужение, получим

$$1 - \psi = \frac{1}{1 + \varepsilon_к}. \tag{23}$$

Из последнего соотношения вытекает

$$\psi = \frac{\varepsilon_к}{1 + \varepsilon_к}, \tag{24}$$

$$\varepsilon_к = \frac{\psi}{1 - \psi}. \tag{25}$$

Следует отметить, что $\varepsilon_к$ существенно больше δ, так как выражает местную, а не среднюю деформацию на длине l_0.

Для большинства материалов

$$\delta < \psi < \varepsilon_к. \tag{26}$$

Дополнительные характеристики хрупкости и пластичности материала. Ранее отмечалась необходимость оценки хрупкости и пластичности для правильного выбора материала детали (элемента конструкции). Важное значение для этих целей имеет испытание на удар — определение ударной вязкости. Принципиальные схемы испытания на удар даны на рис. 4.12. Груз падает и ударяет по образцу; разность энергии груза до и после удара должна быть равна работе, поглощенной в процессе деформации образца, если пренебречь имеющим место небольшим рассеиванием энергии.

Если первоначальная длина образца l_0, то работа деформации может быть определена по формуле

$$A = \int_0^{u_к} P(u)\, du, \tag{27}$$

где u — перемещение головки образца, $u_к$ — перемещение в момент, предшествующий разрушению. Если известны диаграмма деформирования

$$\sigma = P/F_0 = f(\varepsilon) \tag{28}$$

и деформация $\varepsilon = u/l_0$, найдем из соотношений (27) и (28)

$$A = F_0 l_0 \int_0^{\delta} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = F_0 l_0 A_1, \tag{29}$$

где δ — предельная деформация при растяжении, $A_1 = \int_0^{\delta} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ — площадь диаграммы деформирования (работа деформации на единицу объема материала). Из соотношения (29) следует, что спо-

собность поглощать энергию удара за счет деформации зависит от площади диаграммы деформирования (рис. 4.13), т. е. от способности материала получать пластические деформации. Обычно при испытании на удар для выявления хрупкости материала образцы

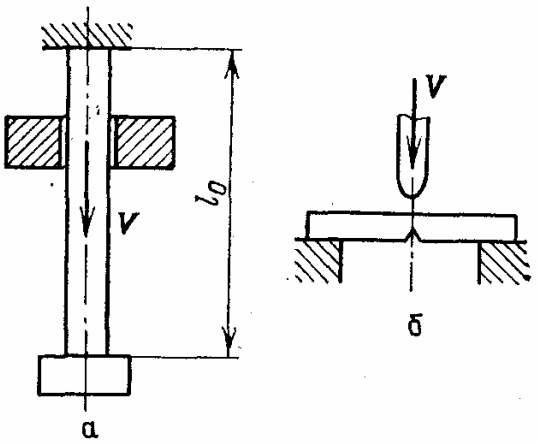


Рис. 4.12. Принципиальные схемы испытания на удар: *а* — испытание на ударное растяжение; *б* — испытание на ударный изгиб

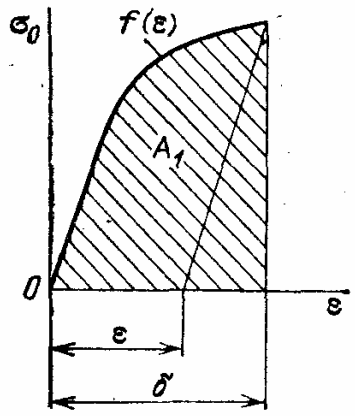


Рис. 4.13. Работа деформации при разрушении материалов

снабжают концентраторами напряжений. Тогда энергия удара поглощается в сравнительно небольшой области, и ее относят к поперечному сечению стандартного образца.

Ударной вязкостью называют величину

$$a_н = A/F, \tag{30}$$

где A — работа, идущая на разрушение образца, и F — площадь поперечного сечения.

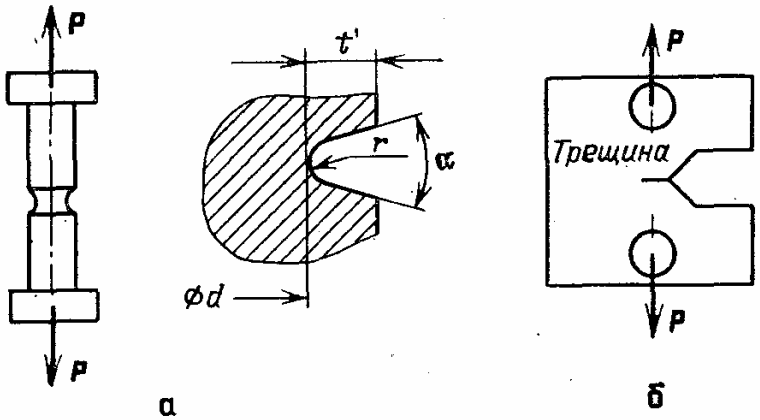


Рис. 4.14. Испытания образцов с концентрацией напряжений: *а* — образец с выточкой; *б* — образец с трещиной

Для сталей ударная вязкость лежит в пределах $a_н = 50$—100 Н · м/см^2. Материалы с ударной вязкостью $a_н < 30$ Н · м/см^2 относятся к числу хрупких.

Еще одной важной характеристикой хрупкости материала является чувствительность к концентрации напряжений. Для исследования применяются образцы с выточкой стандартного профиля (рис. 4.14) и образцы с предварительно нанесенной трещиной (до испытаний образец подвергается действию переменных напряжений для образования предварительной трещины). Если диаметр выточки стержня d, то предел прочности образца с концентрацией напряжений

$$\sigma_{bк} = \frac{4P_{max}}{\pi d^2}.$$

Материал может быть отнесен к числу хрупких, если

$$\sigma_{bк} \leqslant \sigma_b,$$

где σ_b — предел прочности гладкого образца.

14. Истинные диаграммы деформирования и их схематизация

Обычная кривая деформирования (диаграмма деформирования) строится как зависимость условного напряжения $\sigma = P/F_0$ от условной деформации $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, устанавливаемая в процессе испытания на растяжение. Истинная диаграмма деформирования представляет зависимость между величинами $\sigma_и = P/F$, $\varepsilon_и = \ln(l/l_0)$. При относительно небольших деформациях ($\varepsilon < 5\%$) различие между обычной и истинной диаграммами деформирования несущественно. Истинное удлинение при равномерной деформации меньше условного, так как приращения деформации

$$d\varepsilon_и = dl/l < dl/l_0 = d\varepsilon.$$

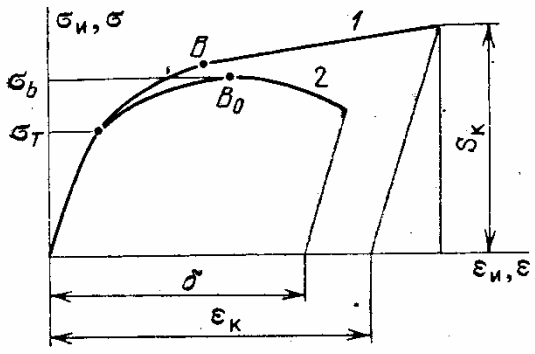


Рис. 4.15. Истинная (*1*) и обычная (*2*) диаграммы деформирования

На рис. 4.15 сопоставлены истинная и обычная (условная) диаграммы деформирования. Моменту действия максимального усилия соответствуют точка B_0 на обычной кривой деформирования и точка B на истинной кривой.

Усилие, растягивающее образец,

$$P = \sigma_и F. \tag{31}$$

В момент достижения максимума усилия

$$dP = d\sigma_и F + \sigma_и dF = 0. \tag{32}$$

Применяя условие постоянства объема, найдем

$$d(Fl) = dF\, l + F\, dl = 0,$$

или

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dl}{l} = -d\varepsilon_{и}; \tag{33}$$

теперь из соотношений (32) и (33) вытекает, что в точке B

$$\frac{d\sigma_{и}}{d\varepsilon_{и}} = \sigma_{иB}. \tag{34}$$

Точка B характеризует потерю устойчивости равномерной по длине образца пластической деформации и начало образования шейки. Равенство (34) показывает, что кривая истинных напряжений в точке B должна иметь определенный тангенс угла наклона касательной $\sigma_{иB}$. Приближенно, исходя из условия постоянства объема, получим

$$\sigma_{иB} = \sigma_b(1 + \varepsilon_b), \tag{35}$$

где ε_b — относительное удлинение материала, соответствующее пределу прочности (обычно $\varepsilon_b \approx (0{,}1—0{,}4)\,\delta$).

Истинное сопротивление отрыву $S_к$ определяется как напряжение в момент разрушения:

$$S_к = (\sigma_и)_{разр} = \frac{P_{разр}}{F_к} = k\frac{\sigma_b}{1-\psi_к}, \tag{36}$$

где $k = P_{разр}/P_{max}$ — коэффициент разрушающей нагрузки (обычно $0{,}6 < k < 1$).

Истинная деформация в момент разрушения определяется из условия постоянства объема материала при его пластической деформации:

$$\varepsilon_к = \ln\frac{\Delta_к}{\Delta_0} = \ln\frac{F_0}{F_к} = \ln\frac{1}{1-\psi_к}. \tag{37}$$

Замечание. Величина истинного сопротивления отрыву должна использоваться с осторожностью и только в тех случаях, когда в процессе разрушения не происходит потери устойчивости пластической деформации. Усилие, надежно воспринимаемое стержнем при его растяжении, определяется обычным пределом прочности материала и первоначальным сечением стержня. При использовании величины $S_к$ необходимо знать истинные размеры сечения с учетом пластической деформации.

Истинная кривая деформирования и ее характерные параметры ($S_к$, $\varepsilon_к$ и др.) имеют практическое значение для расчета пластических деформаций, для оценки прочности в местах концентрации напряжений, для оценки сопротивления отрыву.

Особенности кривых деформирования. В тех случаях, когда диаграмма деформирования используется как зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$, она чаще называется кривой деформирования.

Для расчета работы элементов конструкции в упругопластической стадии применяют истинные кривые деформирования. Так как обычно расчет относится к деформациям до 10%, то в дальнейшем

опустим специальные обозначения для истинных напряжений и деформаций, подразумевая, что в общем случае имеются в виду их истинные значения. Начальный (упругий) участок кривой деформирования (или диаграммы деформирования) имеет в соответствующем масштабе угол наклона (рис. 4.16)

$$\beta = \operatorname{arctg} E, \qquad (38)$$

где E — модуль упругости материала.

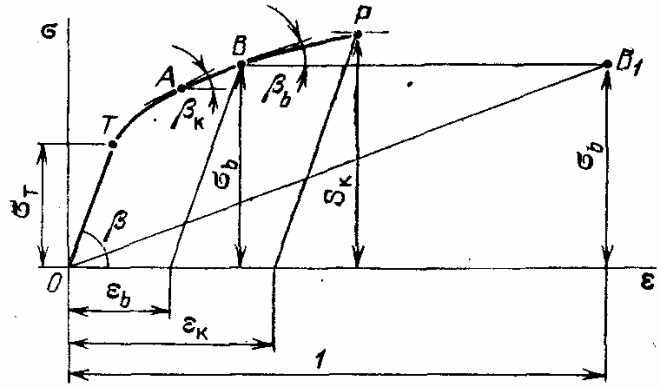


Рис. 4.16. Кривая деформирования

Важной характеристикой протекания кривых деформирования является *касательный модуль*

$$E_к = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \qquad (39)$$

По физическому смыслу

$$E_к = \operatorname{tg} \beta_к, \qquad (40)$$

где $\beta_к$ — угол наклона касательной кривой деформирования к оси абсцисс (оси ε).

Приращение растягивающего усилия (см. соотношения (32) и (33))

$$dP = d\sigma\, F + \sigma\, dF = F\,(d\sigma - \sigma\, d\varepsilon) = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sigma\right) F\, d\varepsilon. \qquad (41)$$

В момент начала образования шейки величина $dP = 0$ и касательный модуль в точке B

$$E_{кB} = \operatorname{tg} \beta_b = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_b} = \sigma_b. \qquad (42)$$

Касательная к кривой деформирования в точке B параллельна линии OB_1. Обычно до точки B, соответствующей P_{max}, усилие возрастает ($dP > 0$) и

$$E_к = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > \sigma. \qquad (43)$$

После точки B $dP < 0$ и

$$E_к = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} < \sigma. \qquad (44)$$

Равенства (43) и (44) могут использоваться для оценки значений касательного модуля.

Для некоторых материалов (например, малоуглеродистых сталей, широко используемых для профильных балок в строительных конструкциях) при напряжениях, близких к пределу текучести $\sigma_т$, наблюдается «площадка» текучести (рис. 4.17). Происходит увеличение пластической деформации до 2—3% при постоянном или даже понижающемся внешнем усилии. Обычно считается, что это

явление связано только со структурными изменениями в материале (разрушением карбидной сетки в случае сталей). Отметим, что на истинной кривой деформирования характерного для условной кривой начального «цикла» на площадке текучести часто не получается.

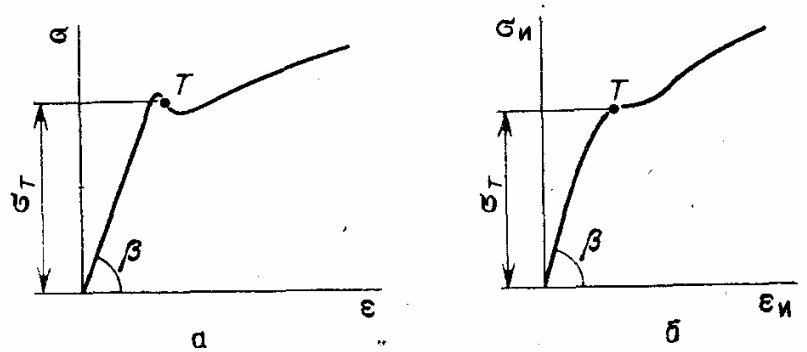


Рис. 4.17. Кривые деформирования при наличии «площадки текучести». Условная (*а*) и истинная (*б*) кривые

Если считать, что пластические деформации растут при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_T$, то из равенства (41) следует

$$dP = -\sigma_T F\, d\varepsilon,$$

т. е. нагрузка на образец должна уменьшаться, что и поясняет наличие «пика» на условной диаграмме деформирования.

Схематизация кривых деформирования. Для построения приближенных моделей материала часто используются схематизированные кривые деформирования.

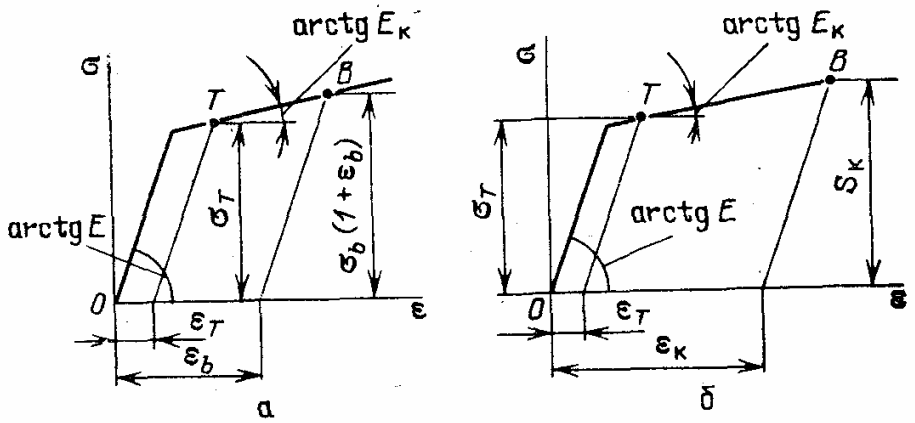


Рис. 4.18. Схематизация кривой деформирования по характерным точкам: *а* — линейное упрочнение по пределам прочности и текучести; *б* — линейное упрочнение по пределу текучести и истинному сопротивлению отрыва

Простая схематизация состоит в том, что до $\sigma \leqslant \sigma_T$ принимается упругий участок, при $\sigma > \sigma_T$ — участок с линейным упрочнением (рис. 4.18, *а*).

В качестве приближенного значения можно принять

$$E_к = \sigma_b(1 + \varepsilon_b). \tag{45}$$

Если известна пластическая деформация ε_b, соответствующая пределу прочности σ_b (обычно $\varepsilon_b = (0{,}2—0{,}8)\delta$), то допустимо считать, что линия упрочнения проходит через точки предела прочности и предела текучести (см. рис. 4.18, *а*); тогда

$$E_к = \frac{\sigma_b(1 + \varepsilon_b) - \sigma_T}{\varepsilon_b - \varepsilon_T}, \tag{46}$$

где ε_T — пластическая деформация, соответствующая точке T (обычно $\varepsilon_T = 0{,}002 = 0{,}2\%$).

Принимая, что линия упрочнения проходит через точку предела текучести и точку разрушения (рис. 4.18, *б*), найдем

$$E_к \approx \frac{S_к - \sigma_T}{\varepsilon_к - \varepsilon_T} \approx \frac{k\dfrac{\sigma_b}{1 - \psi_к} - \sigma_T}{\ln\dfrac{1}{1 - \psi_к} - \varepsilon_T}. \tag{47}$$

Линейная схематизация является простой и удобной, но не достаточно точно описывает начальный участок пластических деформаций. Для расчетов иногда используется аппроксимация следующего вида:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + A\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n, \tag{48}$$

где постоянные A и n определяются из условия, что в некоторых точках приближенная и действительная кривые деформирования совпадают. Например, из условия совпадения в точке предела текучести $\sigma_T = \sigma_{0,2}$ получаем $A = 0{,}002$. Показатель определяется из условия прохождения через точку B и обычно составляет $n = 6—10$.

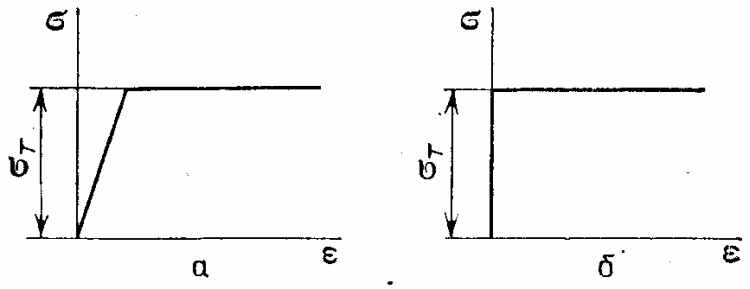


Рис. 4.19. Схематизированные кривые деформации без учета упрочнения материала

Наконец, для анализа поведения конструкции при развитых пластических деформациях используется степенная аппроксимация:

$$\varepsilon = \varepsilon_T\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n = B\sigma^n. \tag{49}$$

Для построения приближенных решений широко используются схематизированные кривые деформации, в которых упрочнение материала не учитывается (рис. 4.19). Пластичность без упрочнения называется иногда идеальной пластичностью (рис. 4.19, *а*). Применяются и схемы жесткопластического тела (рис. 4.19, *б*), в которых упругими деформациями пренебрегают. Последние схемы используются для построения моделей предельного состояния. Следует отметить, что упрочнение материала можно приближенно учесть в приведенных схемах соответствующим изменением величины $\sigma_т$. Отметим, что степенная аппроксимация (49) выражает диаграмму деформирования жесткопластического тела при $n \to \infty$.

15. Ползучесть и длительная прочность

Влияние повышенных температур. В современных условиях работа конструкций часто бывает сопряжена с высокими температурами. Элементы конструкций сверхзвуковых самолетов нагреваются в полете до 200°С и выше, детали газовых турбин авиационных двигателей работают при температуре 600—1000°С. С действием высоких температур приходится считаться в энергетическом и химическом машиностроении и т. д.

При повышенных температурах конструкционные материалы обнаруживают два новых свойства — ползучести и длительной прочности. *Ползучестью* называется возрастание пластической (остаточной) деформации при постоянных нагрузках; *длительной прочностью* называется зависимость разрушающих напряжений (пределов прочности) от длительности работы.

Свойства ползучести и длительной прочности проявляются у углеродистых сталей при $T > 300$°С, для легированных сталей при $T > 350$°С, для алюминиевых сплавов при $T > 100$°С. Для некоторых материалов (полимеров, бетонов и др.) указанные свойства наблюдаются и при нормальных температурах.

В условиях повышенных температур происходит снижение обычных пределов прочности и текучести, определяемых при кратковременных испытаниях. На рис. 4.20 даны зависимости пределов прочности различных конструкционных материалов от температуры. Наиболее резкое снижение $\sigma_в$ наблюдается на алюминиевых сплавах. Углеродистые стали в области 200—300°С обнаруживают некоторое повышение пределов прочности, а затем монотонное снижение. Наибольшие значения $\sigma_в$ при высокой температуре показывают литые жаропрочные сплавы, содержащие 70—80% никеля.

Снижение пределов текучести при повышении температуры происходит примерно так же, как и снижение $\sigma_в$. При высоких температурах снижается значение модуля упругости на 30—40% (в предельной области температур, при которых используются материалы). При высоких температурах происходит интенсивное окисление поверхности и часто оказывается необходимым защищать поверхность специальными покрытиями.

Наиболее существенной особенностью прочности при высоких температурах является сильное влияние времени нагружения. Это объясняется тем, что, начиная с определенного диапазона температур, в материалах происходят структурные и фазовые превращения, развивающиеся во времени.

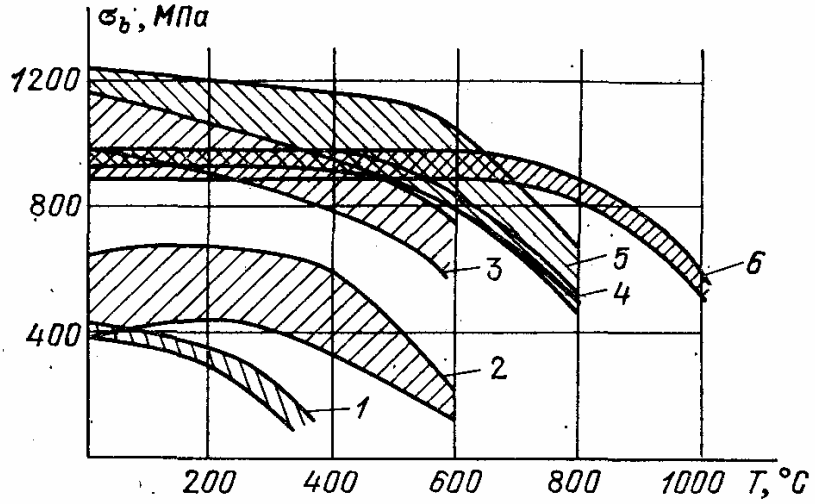


Рис. 4.20. Снижение пределов прочности при увеличении температуры (кратковременные испытания): *1* — алюминиевые сплавы (АК4-1, ВД-17); *2* — углеродистые стали (сталь 20, сталь 45); *3* — титановые сплавы ВТ3; *4* — хромоникелевые стали; *5* — деформируемые жаропрочные сплавы на никелевой основе; *6* — литые жаропрочные сплавы на никелевой основе

При исследовании прочности элементов конструкций, работающих при высоких температурах, необходимо проводить не только кратковременные, но и длительные испытания материалов (получение кривых ползучести и определение длительной прочности).

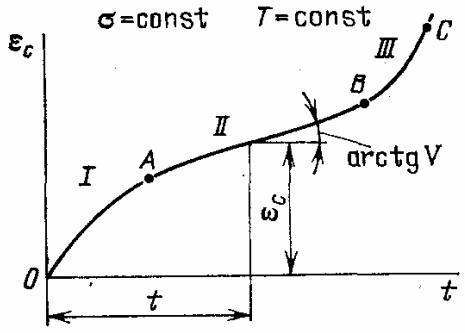


Рис. 4.21. Кривая ползучести: *I* — стадия неустановившейся ползучести; *II* — стадия установившейся ползучести; *III* — стадия разрушения

Кривые ползучести. Пределы ползучести. Графическое изображение зависимости остаточной деформации от времени испытаний при постоянных напряжении и температуре называют *кривой ползучести* (рис. 4.21). При испытаниях образец находится внутри электронагревательного устройства, удлинение измеряется механическим или оптическим методом. Начальная деформация образца (она может быть упругой или упругопластической) не учитывается. Остаточная (пластическая) деформация, увеличивающаяся во времени при постоянном напряжении, называется *деформацией ползучести* и обозначается ε_c (индекс c — начальная буква слова «creep» — ползучесть). Скорость деформации ползучести, или

короче скорость ползучести,

$$V = \frac{d\varepsilon_c}{dt}. \tag{50}$$

Эксперименты показывают, что на кривых ползучести

$$\varepsilon_c = f(t)$$

наблюдаются три характерные стадии. Первая стадия (участок OA) — стадия неустановившейся ползучести. Скорость ползучести, наибольшая в начальный момент, постепенно уменьшается. Вторая стадия (участок AB) характеризуется постоянной (минимальной) скоростью ползучести. Наконец, третья стадия (участок BC) представляет собой стадию разрушения; на образце образуется сетка трещин, стадия заканчивается хрупким изломом или при высоких уровнях напряжений вязким изломом с местным утонением. Ползучесть материала в элементах конструкций допустима до определенной величины. Например, при ползучести ротора турбины может произойти касание рабочих лопаток о корпус.

Для оценки ползучести материала используется специальная характеристика — предел ползучести. *Пределом ползучести* называется напряжение, при котором деформация ползучести за определенный промежуток времени достигает заданной величины. Например, для никелевого жаропрочного сплава ХН77ТЮР (нимоник-80) при температуре 700°С за время 100 ч и деформации ползучести 0,2% предел ползучести составляет 400 Н/мм^2:

$$\sigma_{0,2|100}(700) = 400 \text{ Н/мм}^2.$$

При обозначении предела ползучести указываются величина деформации, время и температура испытаний.

Скорость ползучести. Основное время развития ползучести приходится обычно на установившуюся стадию с постоянной скоростью ползучести.

Результаты экспериментального определения скорости ползучести на установившейся стадии представляют в виде степенной зависимости

$$V = B\sigma^n, \tag{51}$$

где B, n — параметры материала, зависящие от температуры.

В логарифмических координатах уравнение (51) соответствует линейной зависимости $\lg V$ от $\lg \sigma$.

Параметр n является безразмерным и обычно лежит в пределах 3—6, т. е. зависимость скорости ползучести от напряжения весьма существенна. Размерность параметра B зависит от выбранной размерности V, σ и значения n.

Влияние ползучести на напряженное состояние в элементах конструкций. Как уже указывалось, ползучесть материала приводит к росту деформаций, что может быть нежелательным или недопустимым по конструктивным соображениям. Однако наибольшее

влияние ползучесть материала оказывает на перераспределение напряжений в элементах конструкций, так как деформации ползучести сопоставимы, а часто и превышают упругие деформации. Указанное явление приводит, например, к релаксации (падению) напряжений затяжки в болтах, к релаксации благоприятных остаточных напряжений после применения упрочняющей технологии и т. д.

Длительная прочность, предел длительной прочности. Свойство длительной прочности материала при повышенных температурах ограничивает ресурс изделий и приводит к необходимости учета времени нагружения в моделях прочностной надежности. Прочность материала при повышенных температурах характеризуется пределом длительной прочности.

Пределом длительной прочности называется напряжение, при котором материал разрушается не ранее заданного времени. Например, для никелевого жаропрочного сплава ХН77ТЮР (нимоник-80) при температуре 700°С и времени 1000 ч предел длительной прочности составляет 330 Н/мм²

$$\sigma_{дл_{1000}}(700) = 330 \text{ Н/мм}^2.$$

При обозначении предела длительной прочности указываются длительность нагружения и температура испытания. Для сравнения укажем, что для того же сплава при температуре 700°С пределы прочности и текучести (при кратковременных испытаниях)

$$\sigma_b = 830 \text{ Н/мм}^2, \quad \sigma_{0,2} = 560 \text{ Н/мм}^2.$$

Во многих случаях пределы длительной прочности ниже пределов текучести при кратковременных испытаниях.

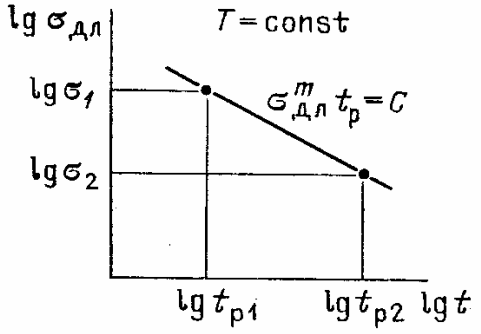


Рис. 4.22. Кривые длительной прочности в логарифмических координатах

Зависимость пределов длительной прочности от времени нагружения. Эта зависимость получается при испытаниях в условиях постоянной температуры (рис. 4.22).

Кривые длительной прочности выражают зависимость пределов длительной прочности от времени испытаний. Эта зависимость применяется в виде

$$\sigma^m_{дл} t_р = C, \qquad (52)$$

где $m = m(T)$, $C = C(T)$ — параметры материала, зависящие от температуры, $t_р$ — время до разрушения. В логарифмических координатах уравнение (52) изображается прямой линией, причем угол наклона зависит от параметра m

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/m.$$

Параметр m обычно лежит в пределах $m = 4—16$, что показывает резкую зависимость времени до разрушения $t_р$ от уровня действующих напряжений. При повышении температуры параметр m уменьшается.

Испытания на двух уровнях напряжений σ_1 и σ_2 и определение времени до разрушения позволяют определить параметры m и C

$$\sigma_1^m t_{р1} = \sigma_2^m t_{р2}, \tag{53}$$

$$m = \frac{\lg (t_{р2}/t_{р1})}{\lg (\sigma_1/\sigma_2)}, \quad C = \sigma_1^m t_{р1}. \tag{54}$$

Рассеяние долговечности при испытаниях длительной прочности. Эксперименты показывают, что время работы образца без разрушения (долговечность) при заданном уровне напряжений и температуры имеет существенное рассеяние. На рис. 4.23 показан разброс значений логарифма долговечности. Зависимость (52) определяется для среднего времени до разрушения $t_р$.

Долговечность (время до разрушения) целесообразно рассматривать как случайную величину, имеющую статистическое распределение. Экспериментально доказано, что для логарифма долговечности можно использовать нормальное распределение, плотность которого

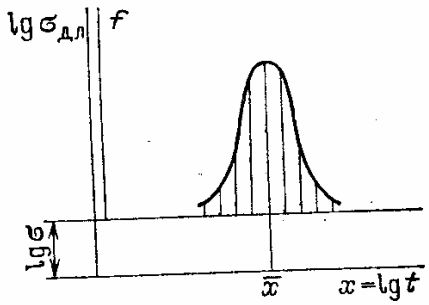


Рис. 4.23. Рассеяние логарифма долговечности при испытаниях длительной прочности

$$f = \frac{1}{s_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s_x}\right)^2}, \tag{55}$$

где $\bar{x}$ — среднее значение случайной величины, s_x — среднеквадратичное отклонение. Плотность вероятности («вероятность на единицу длины») показана на рис. 4.23; по мере удаления от среднего значения плотность вероятности падает.

Замечание. При любом повторении опыта наблюдается рассеяние результатов вследствие влияния множества второстепенных факторов.

Стабильность опыта можно охарактеризовать коэффициентом вариации

$$v = s_x/\bar{x}.$$

Разброс данных наблюдается при определении обычных пределов прочности, текучести и других характеристик, но с относительно низким коэффициентом вариации (0,01—0,05). При испытаниях долговечности коэффициент вариации достигает значений 0,2—0,3 и статистическое описание результатов эксперимента становится необходимым.

Зависимость пределов длительной прочности от температуры. С увеличением температуры пределы длительной прочности падают. На рис. 4.24 показана зависимость предела сточасовой прочности от температуры для литого жаропрочного сплава на никелевой основе ЖС6-К. Отметим, что при 1000 °С предел кратковременной

прочности составляет 540 МПа, тогда как предел сточасовой прочности 150 МПа.

Длительная пластичность и особенности разрушения при длительной прочности. После работы материала при высокой температуре происходит снижение начальных показателей пластичности (δ и ψ) часто на 30—50%. Разрушение жаропрочных материалов

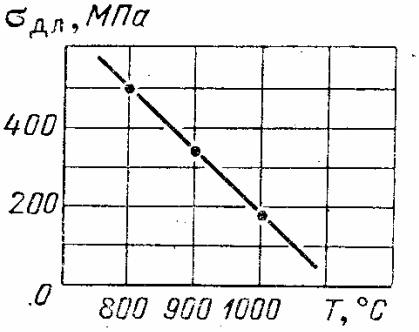


Рис. 4.24. Зависимость предела длительной прочности для жаропрочного сплава ЖС6-К от температуры

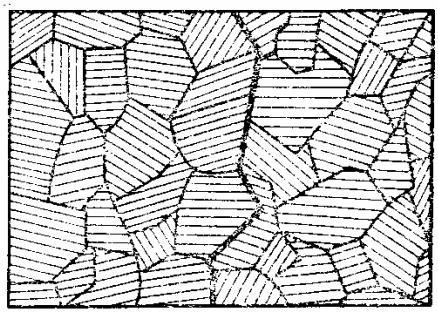


Рис. 4.25. Разрушение при длительной прочности, идущее по границам зерен

при длительной прочности носит хрупкий характер. Разрушение идет по границам зерен (рис. 4.25), начальный участок трещины обычно сильно окислен.

16. Усталость материалов и элементов конструкций

Явление усталости. Усталостные поломки составляют основной вид разрушения деталей машин и нередко приводят к тяжелым последствиям, так как возникают внезапно. Разрушение происходит без заметной пластической деформации, как правило, в зоне концентрации напряжений. Источником усталостного разрушения является действие переменных (во времени) напряжений.

Рис. 4.26. Следы микропластической деформации при повторном нагружении (увеличение на электронном микроскопе)

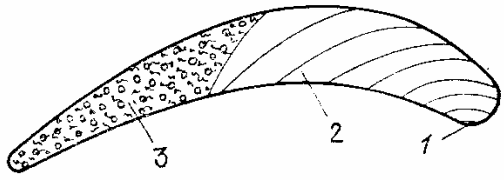


Рис. 4.27. Усталостный излом лопатки: *1* — место зарождения трещины; *2* — зона развития трещины; *3* — зона окончательного излома

При повторном циклическом деформировании в неблагоприятно расположенных зернах материала происходит накопление микропластических деформаций. На рис. 4.26 при увеличении 500 видны следы остаточных сдвигов.

Процесс постепенного накопления микропластических деформаций приводит к образованию микротрещины, которая начинает расти при повторных приложениях нагрузки в результате концентрации напряжений у ее краев. Усталостное разрушение — разрушение в результате постепенного развития трещины при повторных нагружениях.

При усталостном разрушении на поверхности излома всегда обнаруживаются две зоны: зона зарождения и развития трещины и зона окончательного излома. Зона развития трещины (рис. 4.27) обычно имеет гладкую поверхность, так как микронеровности «стираются» при повторном сближении краев трещины. Излом происходит в результате ослабления сечения, когда статическая прочность оказывается недостаточной. Если статическая нагрузка невелика, усталостная зона излома может составлять 50—70% общей поверхности излома.

Начало усталостного излома возникает в местах действия наибольших переменных напряжений, обычно на поверхности детали.

При высоком уровне переменных напряжений может возникнуть несколько очагов развития усталостной трещины.

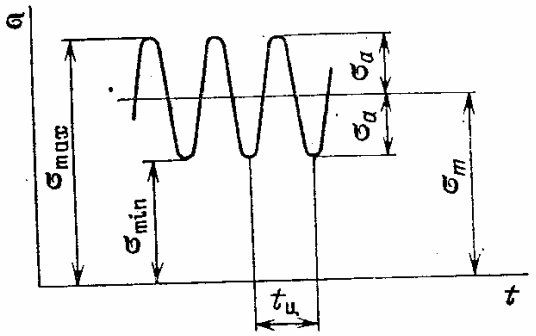


Рис. 4.28. Цикл переменных напряжений

Усталостное разрушение часто начинается от забоин, рисок, в местах концентрации напряжений. Особое значение для усталостной прочности имеют поверхностные слои элемента конструкции. Усталостное разрушение в отличие от статического имеет резко выраженный локальный характер.

Циклы переменных напряжений. Рассмотрим циклически изменяющиеся напряжения (рис. 4.28) и обозначим σ_{max}, σ_{min} — наибольшее и наименьшее напряжения цикла.

Действие цикла напряжений можно представить как сумму постоянной составляющей

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \qquad (56)$$

и периодически изменяющихся напряжений с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \qquad (57)$$

Величина σ_m называется *средним напряжением* цикла, величина σ_a — амплитудой переменных напряжений или *переменным напряжением*.

Переменное напряжение изменяется во времени:

$$\sigma_a(t) = \sigma_a \cos\left(\frac{2\pi}{t_ц} t\right) = \sigma_a \cos(2\pi f t), \qquad (58)$$

где $t_ц$ — период колебаний, с; $f = 1/t_ц$ — частота колебаний, Гц (1 герц = 1 колебание/с).

Если среднее напряжение $\sigma_m = 0$, цикл напряжений называют симметричным, при $\sigma_m \neq 0$ — асимметричным.

Для характеристики цикла используется коэффициент асимметрии

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \qquad (59)$$

Для симметричного цикла $r = -1$; для отнулевого, или пульсирующего, цикла $r = 0$; при действии постоянных напряжений $r = 1$.

Испытания на усталость. Испытания усталостной прочности проводятся на специальных испытательных машинах обычно при симметричном цикле нагружения. В процессе испытания, как правило, задается величина амплитуды переменного напряжения и находится число циклов нагружения, при которых образуется трещина определенной величины или происходит поломка. Испытание усталостной прочности материала проводят на образцах диаметра 7—10 мм. Часто проводятся испытания на усталость натурных деталей.

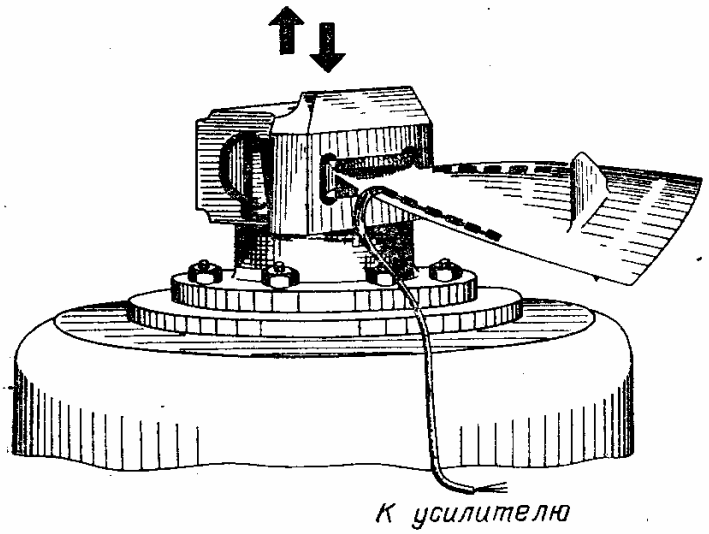


Рис. 4.29. Электродинамический стенд для испытаний лопаток компрессоров и турбин на усталость

На рис. 4.29 показан электродинамический стенд для испытания лопаток компрессоров и турбин на усталость. С помощью генератора частоты возбуждаются колебания, близкие к частоте собственных колебаний лопатки; амплитуда колебаний поддерживается автоматически; напряжения определяются с помощью проволочных тензометров, наклеенных на лопатку.

Влияние числа циклов нагружения на усталостную прочность, кривые выносливости, пределы выносливости. Зависимости среднего числа циклов до разрушения от величины амплитуды переменных напряжений цикла называются *кривыми выносливости* (рис. 4.30). В логарифмических координатах кривые выносливости представлены полигональными кривыми (отрезками прямых линий).

Кривая первого типа (рис. 4.30, *а*), свойственная углеродистым сталям, при $N = N_0$ имеет точку перелома и выходит на горизонтальный участок. Обычно точка перелома соответствует $N = 10^6$—10^7 циклам; ордината точки перелома обозначается σ_{-1} и называется пределом выносливости. При амплитуде переменных напряжений $\sigma_a < \sigma_{-1}$ усталостное повреждение невозможно.

Когда экспериментальные исследования относились главным образом к углеродистым сталям, считалось, что предел выносливости

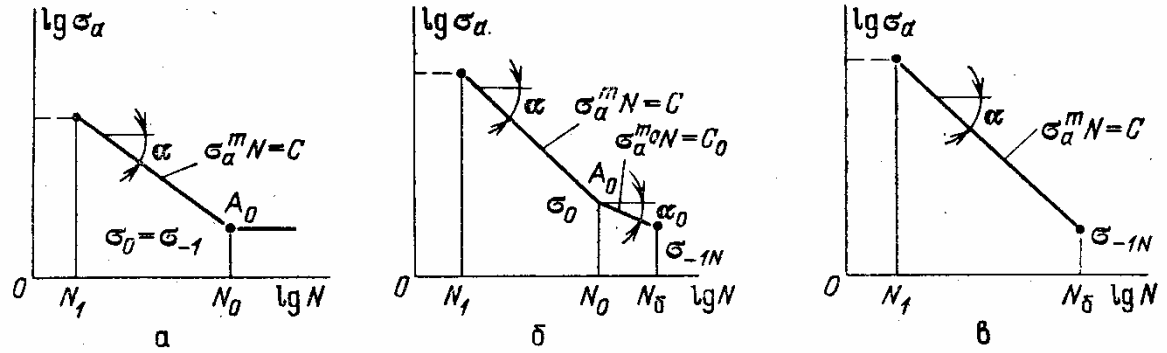


Рис. 4.30. Три типа кривых выносливости (в логарифмических координатах): *а* — кривые первого типа; *б* — кривые второго типа; *в* — кривые третьего типа

существует для всех конструкционных материалов. Исследования последних десятилетий показали, что для многих материалов после точки перелома снижение усталостной прочности продолжается.

Кривая второго типа (рис. 4.30, *б*) после точки перелома имеет замедление усталостного разрушения (легированные стали, титановые сплавы). Для кривых третьего типа (рис. 4.30, *в*) точки перелома при большом числе циклов не существует (алюминиевые сплавы, жаропрочные сплавы в определенном интервале температур) и темп снижения усталостной прочности остается неизменным до момента разрушения.

Замечание. При малом числе циклов ($N_1 = 10^2 - 10^3$) кривые усталости имеют перелом, связанный с переходом в малоцикловую область. Проблема малоцикловой усталости будет рассматриваться в следующем разделе.

Условные пределы выносливости. Для кривых выносливости второго и третьего типов находится условный предел выносливости для определенного числа циклов ($N_б$ — база испытаний); обычно принимают $N_б = 2 \cdot 10^6$—$5 \cdot 10^7$ циклов. *Условным пределом выносливости* называется значение амплитуды переменного напряжения, при котором происходит разрушение при базовом числе циклов.

Условные пределы текучести обозначаются $(\sigma_{-1})_N$ или σ_{-1N}.

Уравнение кривых выносливости. Кривые выносливости в логарифмических координатах в общем случае состоят из двух участков. В интервале числа циклов $N_1 < N < N_0$ уравнение кривой выносливости имеет вид

$$\sigma^m N = C \qquad (N_1 < N < N_0), \tag{60}$$

где m и C — параметры материала. Тангенс угла наклона равен

$$\operatorname{tg}\alpha = 1/m. \tag{61}$$

Обычно значения m лежат в пределах 4—12, для деталей с концентрацией напряжений $m = 4—8$. Параметры m и C определяются по формулам, аналогичным соотношениям (53) и (54).

На втором участке ($N > N_0$) уравнение кривой выносливости

$$\sigma^{m_0} N = C_0 \quad (N > N_0). \tag{62}$$

Параметр m_0 обычно значительно больше m ($m_0 = (5—10)\,m$). При возрастании m_0 направление линии второго участка приближается к направлению оси абсцисс.

Так как в точке A_0 (см. рис. 4.30, *б*) обе прямые пересекаются, то параметры уравнений (60) и (62) связаны соотношением

$$C_0 = C\sigma_0^{m_0 - m}. \tag{63}$$

Замечания. 1. Испытаниям на усталость при постоянной амплитуде переменных напряжений свойствен большой разброс значений числа циклов до разрушения. В уравнениях кривых выносливости под N понимается среднее число циклов до разрушения.

2. Для моделей второго и третьего типов происходит монотонное снижение пределов выносливости при увеличении числа циклов нагружения. Не означает ли это неизбежное разрушение деталей машин, испытывающих переменные напряжения (например, в лопатках турбомашин, в коленчатых валах двигателей и др. всегда имеется «фон» переменных напряжений около 10—20 Н/мм²)?

Простой подсчет показывает, что при сравнительно высокой частоте нагружения (10^3 Гц) за 100 лет непрерывной работы деталь должна выдержать

$$N = 10^3 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8{,}7 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ циклов.}$$

Принимая для точки перелома $N_0 = 10^7$, находим амплитуду разрушающих напряжений при $N = 10^{14}$, $m_0 = 20$:

$$\sigma_{-1}^{20} \cdot 10^{14} = \sigma_0^{20} \cdot 10^7,$$

$$\sigma_{-1} \cdot 10^{14} \approx \sigma_0 \cdot 10^{-7/20} \approx 0{,}44\,\sigma_0.$$

Амплитуда переменных напряжений порядка $\frac{1}{3}(\sigma_{-1})N_0$ практически не может привести к усталостному разрушению за неопределенно долгий срок.

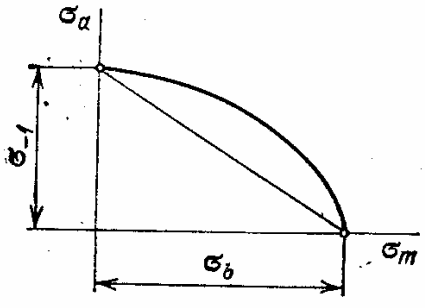


Рис. 4.31. Зависимость пределов выносливости от среднего цикла

Влияние постоянных напряжений на усталостную прочность. Эксперименты показывают, что наличие средних растягивающих напряжений снижает предел выносливости. Здесь и далее не будет оговариваться особо, что речь идет об условных пределах выносливости для материалов второго или третьего типа или о пределе выносливости для первого типа материала (см. рис. 4.30).

На рис. 4.31 дана схематическая зависимость предела выносливости от величины среднего напряжения. Существенно, что при дей-

ствии постоянных сжимающих напряжений усталостная прочность возрастает. Это дает основание для применения упрочняющей технологии (обдувка дробью, шариками и т. п.), создающей в наиболее напряженных поверхностных слоях остаточные напряжения сжатия.

Наибольшее практическое применение получила линейная зависимость предельной амплитуды переменного напряжения от величины σ_m:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m. \tag{64}$$

Коэффициент ψ_σ равен

$$\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}, \tag{65}$$

где σ_b — предел прочности материала. Кроме линейных можно использовать зависимости более сложного вида:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right)^n. \tag{66}$$

Для углеродистых и легированных сталей удовлетворительные результаты получают при $m = 2$, $n = 1$. В этом случае

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}}. \tag{67}$$

В уравнениях (64) и (67) растягивающее напряжение $\sigma_m > 0$, сжимающее $\sigma_m < 0$.

Влияние концентрации напряжений. Концентрация напряжений оказывает очень сильное влияние на усталостную прочность, так как усталостное разрушение носит локальный характер. Максимальное напряжение в месте концентрации напряжений для упругого материала определяется с помощью теоретического коэффициента концентрации напряжений α_σ

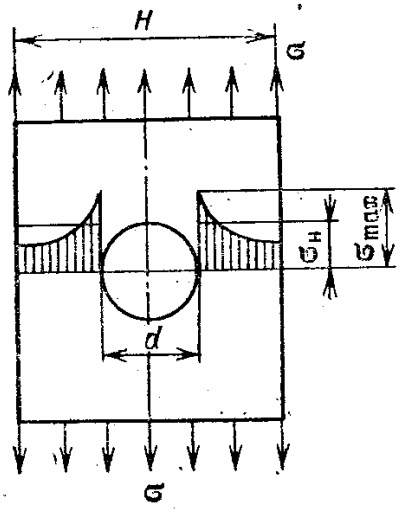


Рис. 4.32. Пример элемента конструкции с концентрацией напряжений

$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \sigma_н, \tag{68}$$

где $\sigma_н$ — номинальные напряжения, определяемые без учета концентрации напряжений. Например, для концентрации напряжений в пластинке с отверстием (рис. 4.32) принимается

$$\sigma_н = \sigma \frac{H - d}{H}. \tag{69}$$

Замечание. Способ определения номинального напряжения, для которого дано значение α_σ, должен быть всегда четко указан.

Если считать, что в момент усталостного разрушения в точке максимального напряжения достигается предел выносливости материала, то предел выносливости детали с концентрацией напряжений должен быть равен

$$\sigma_{-1к} = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_\sigma}. \tag{70}$$

В действительности, как показывают опыты,

$$\sigma_{-1к} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}, \tag{71}$$

где K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений, причем

$$K_\sigma \leqslant \alpha_\sigma. \tag{72}$$

Равенство достигается только для деталей больших размеров, выполненных из материалов с высокой чувствительностью к концентрации. В практических расчетах эффективный коэффициент концентрации оценивают согласно зависимости

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1), \tag{73}$$

где q — коэффициент чувствительности к концентрации напряжений.

В приближенных расчетах принимают: для литых материалов $q = 0{,}1—0{,}2$; для малоуглеродистых сталей и жаропрочных деформируемых сплавов $q = 0{,}2—0{,}4$; для алюминиевых сплавов $q = 0{,}3—0{,}5$; для легированных сталей $q = 0{,}6—0{,}8$; для титановых сплавов $q = 0{,}8—0{,}9$.

Замечание. Литые материалы менее чувствительны к концентрации напряжений, так как они имеют «внутренние» источники концентрации, понижающие их усталостную прочность.

Влияние поверхностного слоя. Это влияние оказывается весьма существенным и зависит от трех основных факторов: качества поверхности (шероховатость), коррозионного воздействия и поверхностного упрочнения.

Если σ_{-1} — предел выносливости образца, поверхностный слой которого признается эталонным, то предел выносливости материала с фактически имеющимся поверхностным слоем

$$(\sigma_{-1})_п = \beta\sigma_{-1}, \tag{74}$$

где β — коэффициент влияния поверхностного слоя.

Коэффициент β может быть представлен в виде произведения частных коэффициентов:

$$\beta = \beta_ш\beta_{кор}\beta_{уп}. \tag{75}$$

Коэффициент $\beta_ш$, учитывающий шероховатость поверхности, обычно принимают равным: для полированной поверхности $\beta_ш = 1$; шлифованной (без наличия прижогов) $\beta_ш = 0{,}8—0{,}9$; тонкого точения $\beta_ш = 0{,}7—0{,}9$; грубого точения, фрезерования $\beta_ш = 0{,}6—0{,}7$. Меньшие значения относятся к стали и сплавам повышенной прочности ($\sigma_b > 1000$ Н/мм^2). Чем более прочным является материал, тем большие требования предъявляются к качеству поверхности для реализации потенциальных возможностей материала.

Коэффициент $\beta_{кор}$, показывающий влияние коррозии, принимается: при нормальной атмосфере $\beta_{кор} = 1$; при следах коррозийного повреждения $\beta_{кор} = 0{,}8—0{,}9$; при наличии морской воды или агрессивных сред $\beta_{кор} = 0{,}5—0{,}8$.

Коэффициент $\beta_{уп}$, учитывающий технологическое упрочнение, при пластическом деформировании (наклепе) обдувкой дробью 1,1—1,4; при химико-термической обработке 1,1—1,3. При наличии концентрации напряжений значение $\beta_{уп}$ должно быть увеличено на 30—50%.

Влияние абсолютных размеров деталей. С увеличением размеров деталей машин, элементов конструкций предел выносливости уменьшается (масштабный эффект). Это объясняется статистической теорией, в соответствии с которой увеличивается вероятность пребывания «слабых зерен» в зонах повышенных напряжений. Следует также учитывать, что при увеличении размеров усложняются технологические процессы, ухудшается однородность и т. п.

Предел выносливости детали с характерным диаметром d

$$(\sigma_{-1})_d = \varepsilon_\sigma \sigma_{-1}, \tag{76}$$

где ε_σ — коэффициент масштабного фактора; σ_{-1} — предел выносливости материала, определяемого на образцах диаметром 7 — 10 мм.

Коэффициент ε_σ может быть представлен в виде

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\infty + (1 - \varepsilon_\infty) e^{-\lambda d}. \tag{77}$$

В приближенных расчетах принимают $\varepsilon_\infty = 0{,}5$ для деформируемых материалов, $\varepsilon_\infty = 0{,}4$ для литых материалов. В первом приближении $\lambda = 0{,}01$—$0{,}03$ 1/мм, значение d принимается в мм.

Оценка пределов выносливости элементов конструкций. Для ответственных деталей машин, элементов конструкций предел выносливости определяется путем натурных испытаний. В тех случаях, когда требуется предварительная оценка усталостной прочности, используется следующая приближенная формула:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma} \sigma_{-1}, \tag{78}$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала при симметричном цикле переменных напряжений; β, ε и K_σ — коэффициенты влияния поверхностного слоя, масштабного эффекта и эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Предел выносливости σ_{-1} связан с величиной σ_b следующей приближенной зависимостью:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}55 - 0{,}0001\sigma_b)\sigma_b,$$

где σ_b, Н/мм^2 — предел прочности.

Равенство (78) оценивает значение предела выносливости детали при симметричном цикле.

При действии постоянных напряжений σ_m, принимая зависимость (64), получим

$$\sigma_{-1д} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma} \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right). \tag{79}$$

Формула (79) служит для приближенной оценки предела выносливости детали. Влияние концентрации напряжений учитывается только для переменных напряжений цикла; предел выносливости σ_{-1} определяется для базового числа циклов нагружения.

Приведенные ранее соотношения для приближенной оценки усталостной прочности справедливы и для случая переменных касательных напряжений. Естественно, что во всех формулах индексы нормальных напряжений σ заменяются на τ; в некоторых случаях изменяются также числовые коэффициенты. Значение предела выносливости при кручении определяется по формуле

$$\tau_{-1} \approx 0{,}6\sigma_{-1}.$$

Рассеяние усталостной долговечности. При экспериментальных исследованиях, как уже отмечалось, наблюдается разброс значе-

ний числа циклов до разрушения при одинаковом значении амплитуды переменных напряжений. При обработке опытных данных число циклов до разрушения рассматривается как случайная величина.

Доказано, что для логарифма числа циклов до разрушения можно использовать нормальное распределение. Плотность распределения определяется формулой (55), в которой $x = \lg N$.

При сравнительно невысоком уровне амплитуд переменных напряжений оказывается целесообразным ввести «пороговое значение» числа циклов до разрушения $N_п$. Предполагается, что при $N < N_п$ усталостное разрушение не происходит. При наличии порога нормальное распределение относится к величине

$$x = \lg(N - N_п).$$

Пороговое значение числа циклов до разрушения $N_п$ оказывается дополнительным параметром распределения.

17. Малоцикловая усталость

Циклическое деформирование. Кривая деформирования при растяжении и сжатии показана на рис. 4.33. Предел текучести при растяжении обозначен σ_T^+, при сжатии σ_T^-. Для большинства конструктивных металлических сплавов (углеродистых и легированных сталей, титановых и алюминиевых сплавов и др.) пределы текучести при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы:

$$\sigma_T^+ \approx \sigma_T^-. \qquad (80)$$

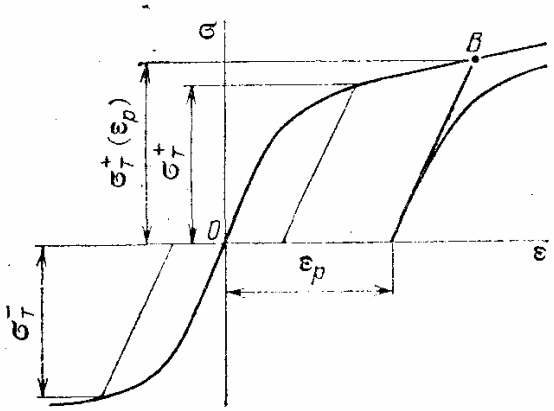


Рис. 4.33. Кривая деформирования при растяжении и сжатии (σ_T^+ — предел текучести при растяжении, σ_T^- — предел текучести при сжатии)

Рассмотрим деформирование «растяжение — сжатие» при циклическом изменении внешних напряжений от σ до $-\sigma$, причем $\sigma > \sigma_T$ (рис. 4.34, *а*). При первом нагружении точка, изображающая состояние материала в плоскости σ, ε, движется по кривой OAB. Далее, напряжения уменьшаются и точка продолжает движение по участку BB_1A_1. После достижения минимального напряжения в точке A_1 снова начинается нагружение по кривой. На рис. 4.34, *б* показан цикл деформаций, сопровождающий цикл изменения внешней нагрузки.

Размах упругопластических деформаций

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}, \qquad (81)$$

где ε_{max}, ε_{min} — наибольшая и наименьшая (в алгебраическом смысле!) деформации за цикл.

Размах пластической деформации

$$\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{p\,max} - \varepsilon_{p\,min}, \qquad (82)$$

где $\varepsilon_{p\,max}$, $\varepsilon_{p\,min}$ — наибольшая и наименьшая пластические деформации при циклическом изменении деформаций.

Изотропное и анизотропное упрочнения при пластических деформациях. Пластическая деформация приводит к повышению «мгновенного» предела текучести. Если в точке B (см. рис. 4.33) снизить нагрузку до нуля, а затем опять произвести нагружение,

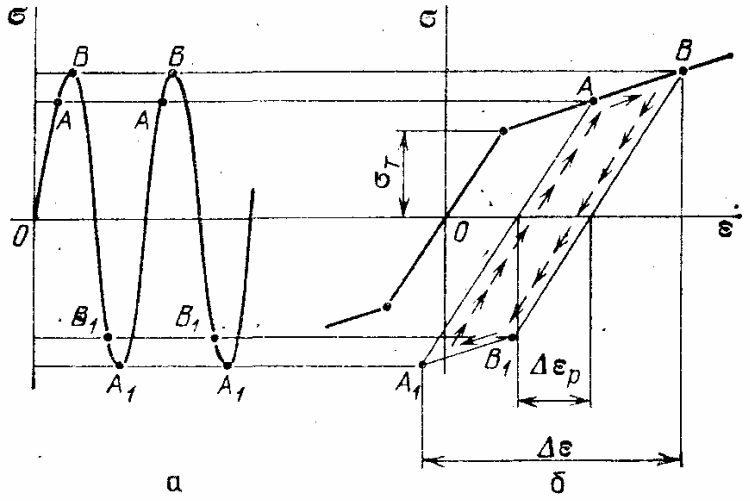


Рис. 4.34. Циклическое деформирование: *а* — изменение действующих напряжений во времени; *б* — цикл деформаций

то переход к пластическому деформированию начнется при $\sigma \geqslant \geqslant \sigma(\varepsilon_p)$ и процесс нагружения пройдет по начальной кривой деформирования (см. разд. 12).

Предел текучести при повторном нагружении называется мгновенным пределом текучести. В первом приближении можно считать, что значение мгновенного предела текучести зависит от значения пластической деформации в данный момент нагружения.

В наиболее простой модели поведения материала (в модели изотропного упрочнения) предполагается, что кривые деформирования при повторном нагружении (кривые O_1BC и $O_1B_1A_1$, рис. 4.35) зависят только от величины достигнутой пластической деформации и не зависят от ее знака.

Кривые деформирования после предварительной пластической деформации ε_p (кривая $A_1B_1O_1BC$) или после $-\varepsilon_p$ представляют собой одинаковые кривые, но «сдвинутые» по оси абсцисс.

В модели изотропного упрочнения мгновенные пределы текучести на растяжение и сжатие одинаковы не только при начальном, но и при повторных деформированиях (рис. 4.35, *а*). Экспери-

ментально установлено, что у многих конструкционных материалов наблюдается понижение мгновенного предела текучести при изменении знака деформирования. Такой эффект, называемый эффектом Баушингера, связан с анизотропным упрочнением материала (т. е. упрочнением, зависящим от направления нагружения).

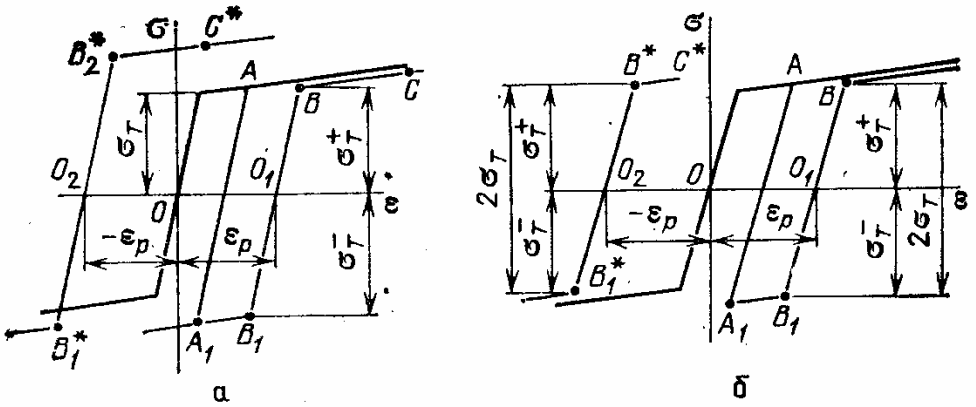


Рис. 4.35. Изотропное (*а*) и анизотропное (*б*) упрочнения при пластических деформациях

После разгрузки в точке B мгновенный предел текучести понижается:

$$\sigma_T^- < \sigma_T^+.$$

При изменении знака пластической деформации мгновенный предел текучести на сжатие будет меньше, чем при растяжении.

Простая модель анизотропного упрочнения показана на рис. 4.36, *б*. Предполагается, что в любой момент нагружения

$$\sigma_T^+ + \sigma_T^- = 2\sigma_T \qquad (83)$$

(принцип Мазинга).

Кривые деформирования в различные моменты деформирования имеют участки упрочнения, лежащие на линиях упрочнения при первоначальном деформировании.

Замечание. Модели поведения материала при циклическом деформировании являются приближенными. В ответственных случаях связь напряжений и деформаций при циклическом деформировании должна устанавливаться на основании экспериментальных данных.

Явление малоцикловой усталости. *Малоцикловой усталостью* называются разрушения при повторных упругопластических деформациях. Обычно разрушения малоцикловой усталости происходят при числе циклов повторения нагрузки $N < 10^5$.

Малоцикловая усталость имеет много общего с обычной усталостью, но отличается от нее наличием макропластических деформаций в зоне излома. Как и при обычной (многоцикловой) усталости, разрушение начинается в местах концентрации напряжений в результате развития первоначально образовавшейся трещины.

Однако механизм малоциклового разрушения значительно отличается от механизма усталостного разрушения, так как пластические деформации возникают в значительно больших объемах материала.

В частности, различие сказывается в том, что сопротивление материалов малоцикловой усталости существенно зависит от их пластичности, тогда как подобная зависимость для обычной усталости проявляется слабо.

В машиностроении малоцикловая усталость часто определяет ресурс (долговечность) изделий в связи с повторением циклов «запуск — работа — останов». Характерный пример — диски авиационных двигателей, испытывающих $(5—10)\cdot 10^3$ выходов на максимальные обороты, при которых напряжения приближаются к пределу текучести материала.

Характеристики нагруженности при малоцикловой усталости. При обычной усталости в качестве характеристики нагруженности используются переменные напряжения цикла (амплитуда переменных напряжений σ_a). Переменные деформации, возникающие при действии переменных напряжений, однозначно определяются соотношением

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}\sigma_a, \tag{84}$$

где E — модуль упругости, ε_a — амплитуда переменных деформаций.

При малоцикловой усталости, протекающей в упругопластической области при процессах нагружения и разгрузки, зависимость

$$\varepsilon_a = f(\sigma_a) \tag{85}$$

имеет значительно более сложный характер, а для материалов с

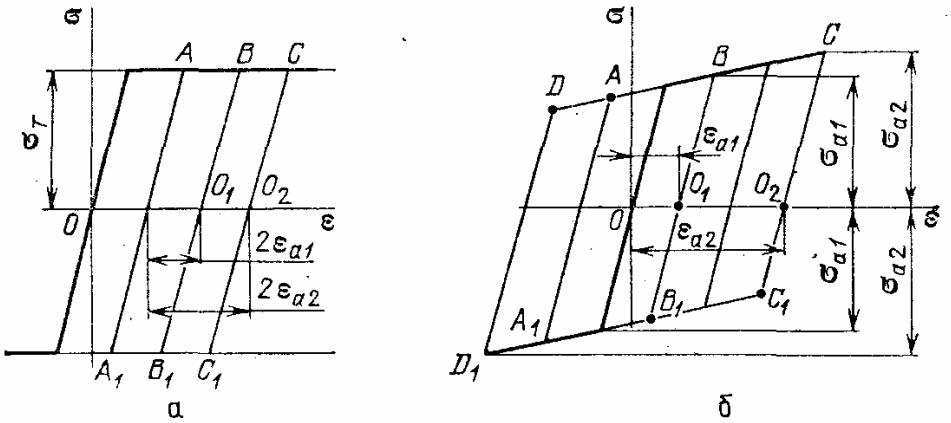


Рис. 4.36. Циклы напряжений и деформаций на диаграммах деформирования

отсутствующим или очень малым упрочнением практически не является однозначной. На рис. 4.36 показаны два цикла деформаций с переменным напряжением

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \sigma_T,$$

где σ_T — предел текучести материала.

При отсутствии упрочнения, что свойственно малоуглеродистым сталям при $\varepsilon_p < 2\%$, цикл переменных напряжений не определяет реальных условий деформирования. Условию (85) может соответствовать цикл ABB_1A_1 или ACC_1A_1 в зависимости от деформаций на границах упругопластической области.

Для материала с пластическим упрочнением (см. рис. 4.35, *а*) наибольшие изменения амплитуды переменных напряжений (от σ_{a1} до σ_{a2}) приводят к значительным изменениям амплитуды переменных деформаций. Указанные соотношения обосновывают целесообразность использования при анализе малоцикловой усталости переменных деформаций в качестве характеристик нагруженности. Для пластически упрочняющихся материалов возможно описание малоцикловой усталости с помощью переменных напряжений.

При экспериментальном определении малоцикловой прочности используются режимы «жесткого» и «мягкого» нагружений. При жестком нагружении задается амплитуда переменных деформаций ε_a или размах деформаций

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} = 2\varepsilon_a. \qquad (86)$$

Жесткое нагружение встречается в элементах конструкций при «принудительной» деформации (например, циклический нагрев стержня при жесткой заделке его концов). Жесткое нагружение характерно для работы материала в зонах концентрации напряжений, где приближенно можно считать, что деформация задается смещением границ упругой области.

При испытаниях в условиях жесткого нагружения измеряется деформация образца. При мягком нагружении происходит циклическое изменение внешнего усилия, действующего на образец.

Условия нагружения при малоцикловой усталости. При испытаниях с постоянной амплитудой переменных деформаций (жесткое нагружение) установлена следующая зависимость:

$$\varepsilon_{ap}^{m_p} N_p = C_p, \qquad (87)$$

где ε_{ap} — амплитуда пластических деформаций; N_p — среднее число циклов до малоциклового разрушения; C_p, m_p — параметры материала.

Условие (87) представляет модель малоциклового разрушения, предложенную Коффином. Он определяет величину C_p, используя уравнение (87) для случая однократного (статического) разрушения, принимая условно $N = 1/4$ (в первой четверти цикла происходит нагружение до максимального значения) и полагая $m_p = 2$, $\varepsilon_{ap} = \varepsilon_к/2$. Тогда

$$C_p = \frac{1}{16}\varepsilon_к^2, \qquad (88)$$

где $\varepsilon_к = \ln\frac{1}{1-\psi}$ — истинная деформация в момент разрушения (см.

разд. 13); ψ — поперечное сужение материала. Условие малоцикло-вого разрушения будет таким:

$$\varepsilon_{ap}^2 N_p = \frac{1}{16}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^2. \qquad (89)$$

Из последнего соотношения следует, что малоцикловая прочность зависит от пластичности материала. Чем больше относительное сужение в шейке при разрыве образца ψ, тем выше прочность при повторных пластических деформациях.

Условие (89) не включает упругую деформацию цикла и пригодно для случаев, когда пластическая часть переменной деформации существенно превышает упругую. При таких условиях число циклов N до разрушения обычно меньше 10^3. В общем случае условие малоцикловой прочности должно учитывать и обычную усталость в области больших переменных напряжений.

В практических расчетах часто используется экспериментально установленная формула Мэнсона, связывающая амплитуду полных деформаций цикла (пластических и упругих) с числом циклов до разрушения N_p:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + \frac{1{,}75\sigma_b}{E} N_p^{-0,12}, \qquad (90)$$

где σ_b, E — предел прочности и модуль упругости материала. Первое слагаемое в правой части уравнения (90) выражает сопротивление материала повторным пластическим деформациям, второе — переменным упругим деформациям. При малом числе циклов до разрушения основное значение имеет первое слагаемое, при $N_p > 10^3$ — второе.

Недостатком формулы Мэнсона, получившей широкое распространение, является приближенный учет сопротивления повторным упругим деформациям.

Используя закономерности усталости при высоких напряжениях (см. разд. 16)

$$\sigma_a^m N = \sigma_{-1}^m N_0, \qquad (91)$$

где σ_{-1} — предел выносливости для базового числа циклов N_0 (точки перелома); m — показатель кривой усталости ($m = 6-20$), можно найти амплитуду переменных деформаций

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma_{-1}}{E} N_0^{1/m} N^{-1/m}. \qquad (92)$$

Условие разрушения при малоцикловой усталости можно записать в виде модифицированного уравнения Мэнсона:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + N_0^{1/m}\frac{\sigma_{-1}}{E} N_p^{-1/m}. \qquad (93)$$

Влияние постоянного напряжения цикла. Постоянные напряжения оказывают влияние на малоцикловую прочность, причем главным образом на сопротивление повторным упругим деформациям. Учитывая значения предела выносливости при действии постоянных напряжений по формуле (64):

$$(\sigma_{-1})_m = \sigma_{-1}(1 - \sigma_m/\sigma_b), \tag{94}$$

получим из (93) следующее условие разрушения при наличии постоянных напряжений:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + N_0^{1/m}\frac{\sigma_{-1}(1-\sigma_m/\sigma_b)}{E} N_p^{-1/m}. \tag{95}$$

Для формулы Мансона учет соотношения (94) приводит к равенству

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + 1{,}75\frac{\sigma_b - \sigma_m}{E} N_p^{-0,12}. \tag{96}$$

Средние напряжения растяжения понижают прочность при малоцикловом нагружении, средние напряжения сжатия — повышают. Часто в практических расчетах повышение «в запас прочности» не учитывается.

ГЛАВА 5

МОДЕЛИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Вводные замечания. Ранее изучалась картина напряжений и деформаций в твердом деформируемом теле. Связь напряжений в различных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, условия равновесия элемента тела устанавливались с помощью уравнений статики и не зависели от физических свойств материала.

Связь перемещений и деформаций, условия совместности деформаций выводились из геометрических соображений и также не зависели от физических свойств материала. При изучении напряжений (статическая задача) и деформаций (геометрическая задача) материал рассматривался как сплошная однородная среда и знания конкретных свойств материала не требовалось. Теперь необходимо выяснить общие связи между деформациями и напряжениями, что представляет собой физическую задачу, так как должно учитываться поведение реальных тел.

В предыдущей главе мы познакомились с результатами экспериментальных исследований, проводимых главным образом при растяжении образцов материала. Наша ближайшая задача — обобщение экспериментальных данных для общего случая нагружения при многоосном напряженном состоянии. Всякое обобщение представляет собой модель явления, и нам предстоит рассмотреть модели упругости, пластичности и ползучести.

Замечание. Ранее неоднократно упоминалось о моделях надежности материала и т. п. Установление зависимостей между параметрами, описывающими явление, в сущности, и есть построение модели. Можно говорить о модели идеального газа, жидкости и т. д. Каждая модель, отражая объективную реальность, имеет область существования, в которой она дает необходимую точность. Наиболее универсальные, практически проверенные модели называются законами.

18. Модели упругости

Связь относительных линейных деформаций и нормальных напряжений. При экспериментальном исследовании растяжения образца были установлены в пределах упругих деформаций зависимости для продольной и поперечной деформаций соответственно

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon, \tag{2}$$

где E — модуль упругости материала, Н/мм^2; μ — *коэффициент Пуассона*. Форма образца (цилиндрическая или призматическая) несущественна для приведенных зависимостей.

Если на призматический образец (рис. 5.1, *а*) наклеить на боковые грани тензометры для измерения линейных деформаций, то при действии напряжения σ_1 вдоль оси образца получим следующие значения деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{E}\sigma_1. \tag{3}$$

Зависимости (1)—(3) следует считать экспериментально установленными для изотропного материала, т. е. материала, упругие

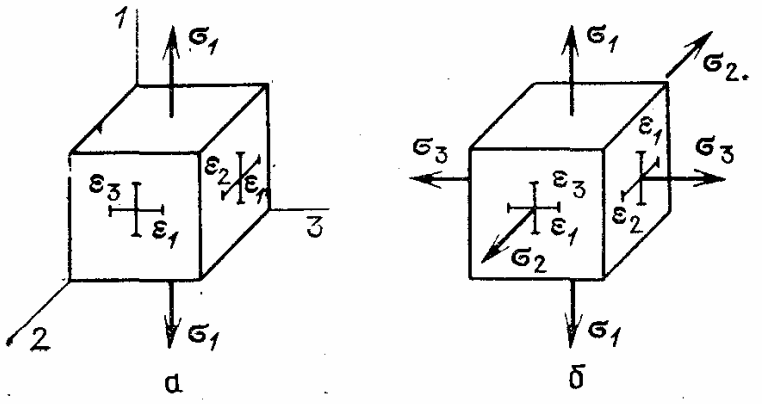


Рис. 5.1. Напряжения и линейные деформации при одноосном (*а*) и трехосном (*б*) напряженных состояниях

свойства которого во всех направлениях одинаковы. В случае трехосного (объемного) напряженного состояния (рис. 5.1, *б*) следует учесть действие всех трех напряжений: σ_1, σ_2, σ_3.

Принимая в пределах малых упругих деформаций постулат независимости действия сил, представим линейную деформацию в направлении *1* в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3). \tag{4}$$

Деформация в направлении *1* от действия напряжения σ_1 равна

$$\varepsilon_1(\sigma_1) = \sigma_1/E.$$

Направление *1* является поперечным для направлений *2* и *3*, и потому

$$\varepsilon_1(\sigma_2) = -\frac{\mu}{E}\sigma_2,$$

$$\varepsilon_2(\sigma_3) = -\frac{\mu}{E}\sigma_3.$$

Окончательно

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \tag{5}$$

Подобным образом устанавливаем зависимости для линейных деформаций в направлении осей *2* и *3*. В результате будем иметь следующие важные соотношения, которые называются *законом Гука* для линейных деформаций:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)],\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) неоднократно подтверждались с помощью экспериментальных исследований при двухосном напряженном состоянии и другими способами. Соотношения упругости для линейных деформаций были установлены для главных направлений (в перпендикулярных площадках действовали только нормальные напряжения).

Используя приведенные в разд. 4 и 10 соотношения для нормальных напряжений и линейных деформаций в косых площадках, можно показать, что соотношения (6) будут справедливы для любых трех взаимно перпендикулярных направлений (осей x, y, z, рис. 5.2):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \qquad (7)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

где ε_x, ε_y, ε_z — относительные линейные деформации вдоль соответствующих осей; σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения в площадках, перпендикулярных осям x, y, z соответственно.

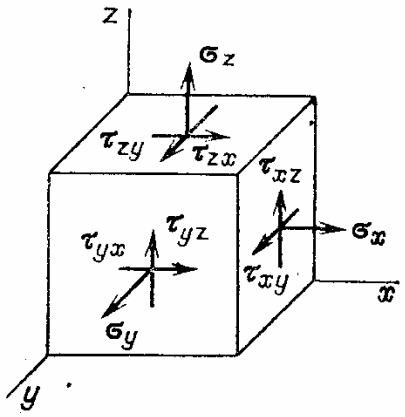


Рис. 5.2. Общий случай трехосного напряженного состояния

Соотношения (7) справедливы и при наличии касательных напряжений в соответствующих площадках. Последнее понятно, так как при малых деформациях, вызываемый касательными напряжениями скос (сдвиг) не влияет на изменение длины отрезков.

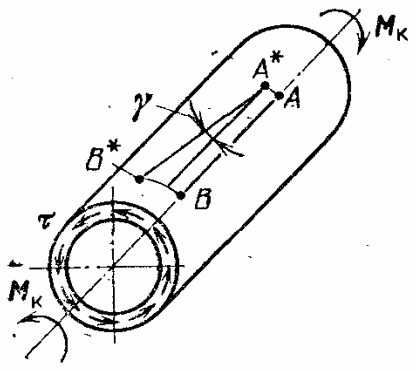


Рис. 5.3. Экспериментальное определение зависимости деформации сдвига от величины действующих касательных напряжений

Связь деформаций сдвига и касательных напряжений. Экспериментальное определение зависимости деформаций сдвига от величины касательных напряжений можно провести, наблюдая скручивание тонкостенной трубы (рис. 5.3). В результате деформации точки A и B на образующей цилиндра перейдут в точки A^* и B^*. Эксперименты показывают, что деформация сдвига при упругих деформациях пропорциональна действующим касательным напряжениям:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau, \qquad (8)$$

где G — модуль сдвига, Н/мм^2. Модуль сдвига G представляет параметр материала, который, как будет показано ниже, зависит от модуля упругости и коэффициента Пуассона. В общем случае де-

формация сдвига (изменение прямого угла) между направлениями x и y (см. рис. 5.2) вызывается касательными напряжениями τ_{xy}, и можно написать

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \tag{9}$$

Подобным образом для трехосного напряженного состояния будем иметь три уравнения, выражающие закон Гука для деформаций сдвига в изотропном материале:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}. \end{aligned} \tag{10}$$

Существенно, что деформация сдвига в изотропном материале не зависит от нормальных напряжений в тех же площадках. Действие нормальных напряжений приводит к удлинениям вдоль направлений осей x, y, z, но не изменяет угол между указанными направлениями.

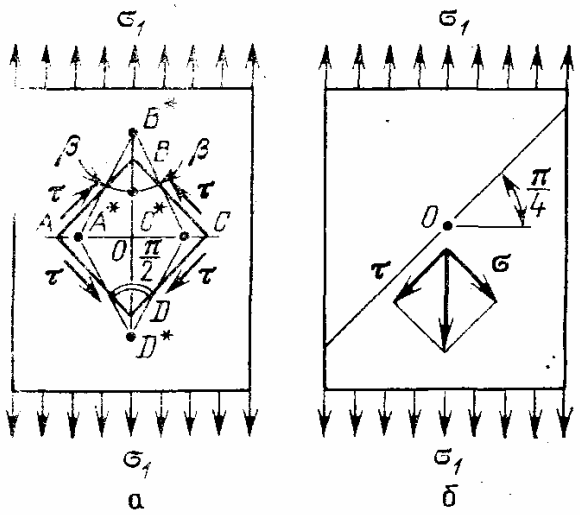


Рис. 5.4. Деформация сдвига между направлениями, составляющими угол $\pi/4$ с направлением растяжения

Связь модуля сдвига с модулем упругости и коэффициентом Пуассона. Эту связь установим на простом примере одноосного растяжения (рис. 5.4).

Найдем деформацию сдвига между направлениями, составляющими угол $\pi/4$ с направлением одноосного растяжения пластинки. Рассмотрим деформацию квадрата $ABCD$, диагонали которого равны $2l$ ($AC = BD = 2l$). Размеры квадрата при рассмотрении деформаций следует считать бесконечно малыми, но так как напряжения во всех точках пластинки одинаковы, то вывод справедлив и для квадрата конечных размеров. После деформации вершины квадрата будут в точках A^*, B^*, ..., и произойдет деформация сдвига (изменение угла) между направлениями AB и BC:

$$\gamma = 2(\pi/4 - \beta). \tag{11}$$

Деформация растяжения в продольном направлении равна ε_1, в поперечном она составляет $\mu\varepsilon_1$, и потому

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{OA^*}{OB^*} = \frac{(1-\mu\varepsilon_1)\,l}{(1+\varepsilon_1)\,l} = 1 - \varepsilon_1(1+\mu). \tag{12}$$

В последнем равенстве учтено, что величина ε_1 мала по сравнению с единицей и тогда

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} = 1 - \varepsilon_1 - O(\varepsilon_1^2) \approx 1 - \varepsilon_1. \tag{13}$$

Символ $O(\varepsilon_1^2)$ означает члены, порядок малости которых не ниже ε_1^2.

Из соотношения (11) получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\pi/4 - \operatorname{tg}\gamma/2}{1 + \operatorname{tg}\pi/4 \operatorname{tg}\gamma/2} = \frac{1-\gamma/2}{1+\gamma/2} = 1 - \gamma, \tag{14}$$

так как деформация сдвига мала по сравнению с единицей $\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx \right.$ $\left. \approx \frac{\gamma}{2},\ \gamma \ll 1\right)$. Сопоставляя зависимости (12) и (14), находим

$$\gamma = (1+\mu)\varepsilon_1. \tag{15}$$

По граням действуют касательное напряжение

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_1 \tag{16}$$

и такой же величины нормальное напряжение (на рис. 5.4, *а* оно не показано). Равенство (16) вытекает из результатов разд. 5, но его легко получить непосредственно, рассматривая напряжения в площадке под углом 45° (рис. 5.4, *б*).

Используя равенство (8) и учитывая, что

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E,$$

находим из соотношения (15)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = (1+\mu)\frac{\sigma_1}{E}.$$

Ссылаясь на зависимость (16), получаем важный вывод:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{17}$$

Температурная деформация. Многие элементы конструкций в современной технике работают при высокой температуре. При анализе деформаций должно быть учтено тепловое расширение, что свойственно всем физическим телам.

Линейная деформация при наличии нагрева состоит из двух частей

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{сил}} + \varepsilon_{\text{темп}}, \tag{18}$$

здесь $\varepsilon_{\text{сил}}$ — деформация, вызванная силовым воздействием элементов; $\varepsilon_{\text{темп}}$ — температурная деформация, вызванная тепловым расширением,

$$\varepsilon_{\text{темп}} = \alpha T,$$

где α — коэффициент линейного расширения, T — изменение температуры при нагреве. В технических расчетах температура измеряется в градусах Цельсия (°С) или в кельвинах (К).

Коэффициент линейного расширения α составляет для сталей $(11—12)\cdot 10^{-6}$ $К^{-1}$, для алюминиевых сплавов $(20—25)\cdot 10^{-6}$ $К^{-1}$, для жаропрочных сплавов на никелевой основе $(12—20)\cdot 10^{-6}$ $К^{-1}$, для титановых сплавов $(8—10)\cdot 10^{-6}$ $К^{-1}$.

Для линейной упругой деформации

$$\varepsilon = \sigma/E + \alpha T. \tag{19}$$

В изотропном материале температурная деформация не изменяет угол между направлениями, а приводит в данной точке к одинаковым удлинениям во всех направлениях. При неравномерном нагреве или при стеснении границ тела с равномерным распределением температуры могут возникнуть не только температурные деформации, но и температурные напряжения.

Замечание. Учет температурных деформаций обычно проводится при предположении, что распределение температур не зависит от напряженного состояния тела. Для большинства конструкционных материалов это вполне оправданно (так называемые несвязанные задачи термоупругости).

Общая форма закона упругости. Уравнения упругости для линейных и угловых деформаций с учетом температурных деформаций получаются из соотношений (7), (10) и (19).

Для произвольной ортогональной системы координат

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T,\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T,\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}.$$

Уравнения (20) выражают общую форму закона упругости (закона Гука). Они содержат два независимых параметра упругости, в качестве которых обычно принимают модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ.

Уравнения упругости можно записать в более краткой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, \ldots, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \tag{21}$$

Символ (x, y, z) означает, что недостающие уравнения выписываются по правилу круговой перестановки индексов.

Частный случай закона упругости — соотношение упругости для объемной деформации. Рассмотрим элемент тела (рис. 5.5), который до деформации имел объем

$$V_0 = abc.$$

В результате деформации ребра элемента достигли размеров $a(1+\varepsilon_x)$, $b(1+\varepsilon_y)$, $c(1+\varepsilon_z)$, и, следовательно, объемная деформация равна

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1.$$

Деформации сдвига не изменяют объема тела и потому не влияют на величину объемной деформации. Пренебрегая квадратами деформаций как малыми величинами, получим

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon,$$

где величина $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ называется *средней деформацией.*

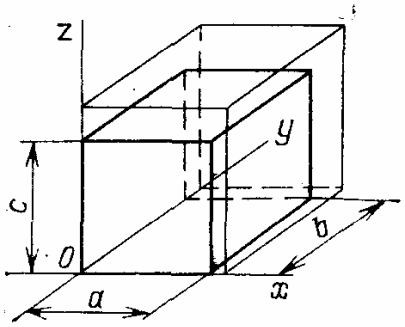


Рис. 5.5. Изменение объема элемента при упругих деформациях

Складывая три первых равенства закона Гука (уравнения (20)), находим (проверьте!)

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha T, \qquad (22)$$

где величина $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ называется *средним* (или гидростатическим) *напряжением.*

Замечание. Название «гидростатическое напряжение» связано со следующими обстоятельствами. Для идеальной жидкости $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, где p — давление в жидкости и $\sigma = -p$. Для вязкой жидкости величина σ рассматривается как среднее давление в точке.

Другие формы закона упругости. Ввиду обширных и разнообразных применений соотношений упругости приведем другие формы зависимостей (20). Вычитая из уравнения для ε_x величину средней деформации ε (уравнение (20)), получим

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{2(1+\mu)}{3E}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma).$$

В результате приходим к *девиаторной форме* закона Гука:

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \qquad (23)$$

Для полной эквивалентности уравнений (20) и (23) к последним следует добавить условие (22), связывающее ε и σ.

Во многих задачах оказывается необходимым выразить зависимость напряжений от деформаций, вытекающую из закона упругости. Это проще всего получить из соотношений (23) и (22):

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x + \sigma - \varepsilon\frac{E}{1+\mu} = 2G\varepsilon_x + \varepsilon\left(\frac{E}{1-2\mu} - \frac{E}{1-\mu}\right) - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T.$$

Подобные соотношения можно найти для σ_y и σ_z.

В результате получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T,\\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T,\\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T,\\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},
\end{aligned} \tag{24}$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига, $\lambda = \dfrac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ — постоянная Ламе.

Величина ε представляет среднюю деформацию:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Замечание. Соотношения упругости для изотропного материала содержат два физических параметра. В сопротивлении материалов в качестве основных параметров принимаются E и μ. Можно выбрать и другие параметры, например G и λ, или любую другую комбинацию двух параметров.

Матричная запись закона упругости. Линейные зависимости (21) удобно записать в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\alpha T\}, \tag{25}$$

где векторы деформаций, напряжений и температурных деформаций

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{26}$$

матрица упругих коэффициентов

$$[a] = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & -1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Матрица упругих коэффициентов симметрична.

Замечание. Представление совокупности скалярных величин в виде многомерного вектора — удобный прием современной вычислительной математики, позволяющий использовать аппарат матричной алгебры.

Следует, однако, помнить, что такое представление не имеет физического обоснования и справедливо при неизменной системе координат. Шесть ком-

понентов напряженного и деформированного состояний образуют тензоры (см. разд. 6 и 10). Тем не менее векторные представления наглядны и удобны, и ими широко пользуются в современной механике.

Модель упругости для анизотропного тела. В современной технике используются анизотропные материалы. В частности, к таким материалам относятся композиционные материалы, состоящие из набора прочных волокон (нитей стекла, углерода, бора и т. п.) и наполнителя (связующего) в виде смолы, мягких материалов и т. п. На рис. 5.6 показан композиционный материал, имеющий волокна в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для такого материала оси x, y, z являются осями упругой симметрии. Материал, обладающий тремя взаимно перпендикулярными осями упругой симметрии, называется *ортотропным*. Уравнения упругости для ортотропного материала можно представить в виде (25), причем матрица упругих коэффициентов

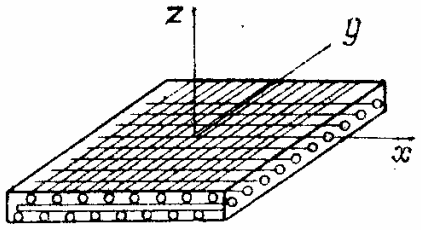


Рис. 5.6. Композиционный материал с волокнами в двух взаимно перпендикулярных направлениях

$$[a] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\mu_{xy}/E_y & -\mu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{yx}/E_x & 1/E_y & -\mu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{zx}/E_x & -\mu_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где E_x, E_y, E_z — модули упругости в направлении осей x, y, z; μ_{xy}, ..., μ_{zy} — коэффициенты Пуассона; G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} — модули сдвига. Матрица (28) содержит 12 параметров упругости, но независимых всего 9, так как в силу симметрии матрицы существуют следующие зависимости:

$$\frac{\mu_{yx}}{E_x} = \frac{\mu_{xy}}{E_y}, \quad \frac{\mu_{zy}}{E_y} = \frac{\mu_{yz}}{E_z}, \quad \frac{\mu_{xz}}{E_z} = \frac{\mu_{zx}}{E_x}. \tag{29}$$

Для ортотропного тела

$$\{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{30}$$

В общем случае для анизотропного тела модель упругости представляет линейные зависимости деформаций от шести компонентов

напряжений

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{zx} + a_x T, \quad \ldots \quad (x, y, z). \tag{31}$$

Матрица упругих коэффициентов является квадратной матрицей шестого порядка, содержащей 36 упругих параметров. Из условия симметрии матрица содержит 21 независимый параметр (6 — на главной диагонали и 15 — на боковых). Температурные деформации образуют тензор.

В уравнениях упругости (25) вектор температурных деформаций

$$\{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ \alpha_{xy} T \\ \alpha_{yz} T \\ \alpha_{zx} T \end{Bmatrix}. \tag{32}$$

В анизотропном теле в общем случае температурная деформация приводит не только к дополнительным удлинениям, но и сдвигам.

19. Модели пластичности

Стремление к наименьшим весу и габаритам изделий приводит к необходимости увеличения напряжений в элементах конструкций и наиболее полному использованию прочностных возможностей материала. Во многих деталях машин, особенно в местах концентрации напряжений, в рабочих условиях возникают пластические деформации.

Оценка надежности подобных конструкций требует знания распределения напряжений и деформаций в упругопластической области. Модели пластичности необходимы для определения несущей способности элементов конструкций, т. е. величины внешних усилий, при которых происходит потеря работоспособности изделия. Изучение пластичности весьма важно для теории многих технологических процессов.

В настоящее время существует несколько моделей поведения материала при упругопластических деформациях. Наиболее простая модель пластичности строится на основе деформационной теории Генки — Ильюшина.

Основные уравнения деформационной теории пластичности. В основу деформационной теории пластичности положены следующие основные допущения.

1. Объемная деформация материала является упругой.

По уравнению (22) для упругих деформаций

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha T, \tag{33}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_V = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \text{ — средняя деформация,} \quad (34)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \text{ — среднее напряжение;} \quad (35)$$

E, μ и αT — модуль упругости, коэффициент Пуассона и температурная деформация.

Опыты, проводимые при всестороннем давлении до 20 000 атм, подтверждают, что средняя деформация остается упругой.

Уравнение (33) справедливо для состояния всестороннего равномерного растяжения или сжатия. При таком напряженном состоянии касательные напряжения (в любой площадке) отсутствуют. При отсутствии касательных напряжений деформации упруги. Исследования деформаций показывают, что пластические деформации связаны с деформациями сдвига. Ответственными за появление пластических деформаций являются касательные напряжения.

Замечание. Средняя деформация ε пропорциональна объемной деформации ε_V. Более удобно для сопоставления с обычными деформациями рассматривать величины ε, что, конечно, не меняет физической сущности допущения.

2. Второе допущение деформационной теории пластичности сводится к утверждению, что тензор-девиатор деформаций пропорционален тензору-девиатору напряжений.

Ранее приводились тензоры деформаций и напряжений (см. разд. 6 и 10):

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}. \quad (36)$$

Напомним, что в тензор деформаций входят $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$, так как исключается поворот элемента, вызванный деформацией сдвига (см. рис. 3.7).

Тензором-девиатором называется тензор, первый инвариант которого (сумма элементов главной диагонали) равен нулю.

Тензоры-девиаторы деформаций и напряжений будут такими:

$$D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{Vmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{Vmatrix}, \quad (37)$$

где ε и σ — средние деформации и напряжения. Для D_ε и D_σ суммы компонентов главной диагонали равны нулю (проверьте!):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon = 0, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0.$$

Понятно, что для описания пластичности используются именно девиаторы напряжений и деформаций.

Девиаторы D_ε и D_σ получаются из T_ε и T_σ после «вычитания» деформаций и напряжений, соответствующих всестороннему растяжению или сжатию. На рис. 5.7 показан переход от основного

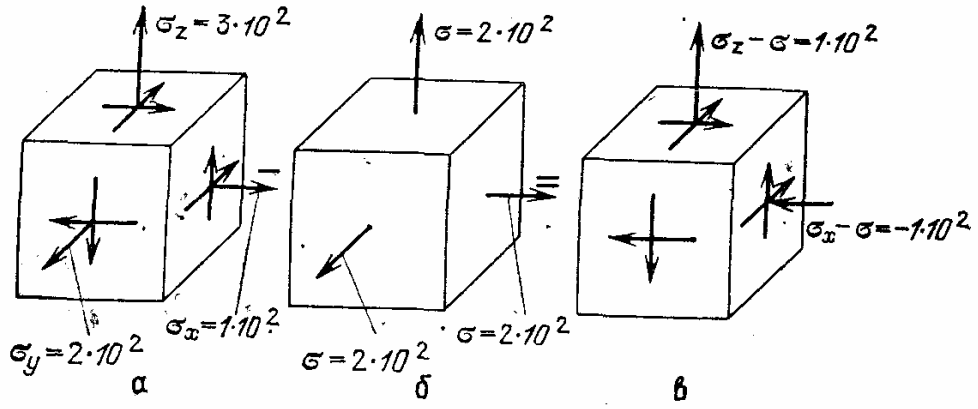


Рис. 5.7. Переход от основного напряженного состояния ($а$) к девиаторному ($б$, $в$). Нормальные напряжения даны в Н/м², $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Касательные напряжения при переходе не изменяются

напряженного состояния к соответствующему девиаторному состоянию. Касательные напряжения для обоих состояний остались неизменными. Термин «девиатор» происходит от слова «девиация» — отклонение. Девиатор напряжений характеризует отклонение данного напряженного состояния от состояния всестороннего растяжения или сжатия. Такие «отклонения» и вызывают деформации сдвига и связанные с ними пластические деформации.

Условие пропорциональности девиаторов деформаций и напряжений записывается в виде

$$D_\varepsilon = kD_\sigma, \tag{38}$$

где k — коэффициент пропорциональности, который удобно представить в следующем виде:

$$k = \psi\frac{1+\mu}{E}. \tag{39}$$

В равенстве (39) ψ — безразмерный коэффициент, называемый *параметром пластичности*. Если материал находится в упругом состоянии, то $\psi = 1$ и уравнение (28) соответствует уравнениям (23).

Из тензорного равенства (38) вытекают девять скалярных равенств, из которых в силу симметрии тензоров ($\gamma_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$)

различными будут только шесть:

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma),$$

$$\varepsilon_y - \varepsilon = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_y - \sigma),$$

$$\varepsilon_z - \varepsilon = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_z - \sigma),$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \psi \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \psi \frac{1+\mu}{E}\tau_{yz}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \psi \frac{1+\mu}{E}\tau_{zx}. \tag{40}$$

Уравнения (40) называются *уравнениями Генки — Ильюшина.* Они аналогичны закону Гука для упругого материала, если присоединить к ним условие (33).

Уравнения пластичности в векторной форме. В девиаторы деформаций и напряжений входят девять скалярных величин, которые можно представить как составляющие девятимерных векторов:

$$\{e\} = \left\{\varepsilon_x - \varepsilon, \varepsilon_y - \varepsilon, \varepsilon_z - \varepsilon, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yx}, \frac{1}{2}\gamma_{zy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

$$\{s\} = \{\sigma_x - \sigma, \sigma_y - \sigma, \sigma_z - \sigma, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}\}^{\mathrm{T}}. \tag{42}$$

Верхний индекс т означает операцию транспонирования, при которой столбец заменяется строкой. Конечно, в равенствах (41) и (42) выписаны по три «лишние» составляющие, так как $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, ... Это сделано из физических соображений, с тем чтобы «размерности» вектора и тензора совпадали.

Уравнения пластичности в векторной форме будут такими:

$$\{e\} = \psi \frac{1+\mu}{E}\{s\}. \tag{43}$$

Вектор-девиатор деформаций $\{e\}$ коллинеарен (пропорционален) вектору-девиатору напряжений $\{s\}$.

Из уравнения (43) следует, что и модули векторов (их длины) связаны тем же соотношением:

$$|e| = \psi \frac{1+\mu}{E}|s|. \tag{44}$$

Модули векторов характеризуют интенсивность напряжений и деформированного состояния в точке:

$$|s| = \sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2}, \tag{45}$$

$$|e| = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^2}. \tag{46}$$

Для случая одноосного растяжения отличны от нуля следующие величины:

$$\sigma_x = \sigma_0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_y = -\mu^* \varepsilon_0, \quad \varepsilon_z = -\mu^* \varepsilon_0, \tag{47}$$

где μ^* — коэффициент Пуассона при упругопластических деформациях ($\mu < \mu^* < 0{,}5$). Из равенства (45) находим для одноосного растяжения (проверьте!)

$$|s| = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_0. \tag{48}$$

Для более удобного и наглядного сопоставления с результатами экспериментальных исследований при простом растяжении определим интенсивность напряжений σ_i следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|s|. \tag{49}$$

Тогда для случая одноосного растяжения будем иметь

$$\sigma_i = \sigma_0. \tag{50}$$

Интенсивность напряжений при одноосном растяжении совпадает с растягивающим напряжением.

Значение $|e|$ при простом растяжении в соответствии с равенствами (46) и (47) будет таким:

$$|e| = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(1 + \mu^*)\,\varepsilon_0. \tag{51}$$

Приближенное значение для упругопластических деформаций: $\mu^* \approx 1/2$. Целесообразно определить интенсивность деформаций ε_i следующим образом:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|e|. \tag{52}$$

Тогда для одноосного растяжения

$$\varepsilon_i = \frac{2\,(1 + \mu^*)}{3}\,\varepsilon_0. \tag{53}$$

При коэффициенте Пуассона $\mu^* = 0{,}5$ интенсивность деформации при одноосном растяжении совпадает с деформацией растяжения.

Учитывая равенства (49), (52) и (44), получим важную зависимость:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\,\frac{1 + \mu}{E}\,\psi\sigma_i. \tag{54}$$

Замечание. Зависимость (54) можно получить непосредственно из уравнений пластичности (40), если каждое из шести равенств возвести в квадрат, сложить их, предварительно удвоив последние три равенства, и извлечь из суммы квадратный корень.

Интенсивность напряжений и деформаций. Понятия интенсивности напряжений и деформаций занимают центральное место в де-

формационной теории пластичности, так как позволяют установить эквивалентность между сложным напряженно-деформированным состоянием и простым растяжением.

Интенсивности напряжений и деформаций были определены следующими зависимостями:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2}, \tag{55}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^2}.$$

Приведем другие выражения для σ_i и ε_i, более удобные для практических расчетов. Учитывая, что

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 3\sigma^2 = \\ &= \frac{2}{3}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right], \end{aligned} \tag{56}$$

получим из равенства (56) часто применяемую формулу для интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}. \tag{57}$$

С помощью аналогичных преобразований находим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}. \tag{58}$$

Отметим, что для любого напряженного и деформированного состояния величины σ_i и ε_i положительны (модули векторов!). Интенсивности напряжений и деформаций могут быть выражены через вторые инварианты тензоров-девиаторов (их первые инварианты равны нулю!).

Напомним, что второй инвариант тензора напряжений (см. уравнение (69) гл. 2) равен

$$I_2(T_\sigma) = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2.$$

В девиаторе компоненты σ_x, σ_y, σ_z заменены на $\sigma_x - \sigma$, $\sigma_y - \sigma$, $\sigma_z - \sigma$, и потому второй (квадратичный) инвариант тензора-девиатора имеет вид

$$\begin{aligned}I_2(D_\sigma) = &-(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - (\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_z - \sigma)(\sigma_x - \sigma) + \\ &+ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2. \end{aligned} \tag{59}$$

Сопоставляя равенства (59) и (57), устанавливаем: квадрат интенсивности напряжений пропорционален квадратичному инварианту тензора-девиатора напряжений. Подобный вывод справедлив для ε_i и $I_2(D_\varepsilon)$.

Наконец, отметим, что интенсивность напряжений пропорциональна касательному напряжению в октаэдрической площадке.

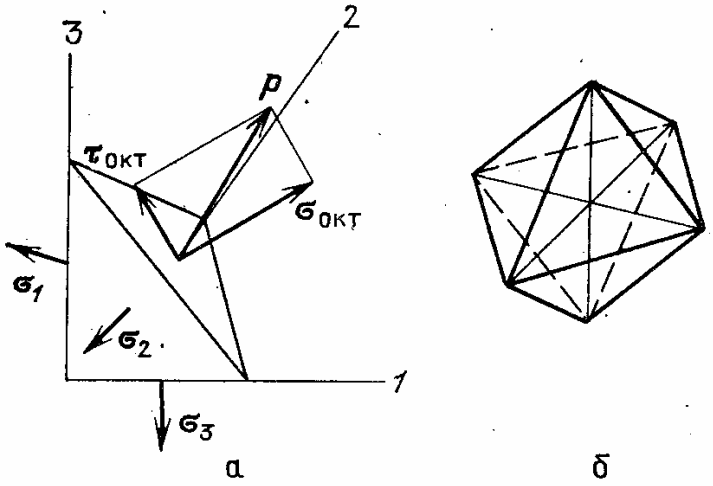


Рис. 5.8. Нормальное и касательное напряжения в октаэдрической площадке: *а* — напряжения в октаэдрической площадке; *б* — правильный октаэдр

Октаэдрической площадкой (рис. 5.8) называется площадка, нормаль к которой наклонена одинаково по отношению к главным направлениям. Октаэдрическая площадка является гранью правильного восьмигранника (октаэдра, рис. 5.8, *б*); направляющие косинусы нормали

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad l = m = n = 1/\sqrt{3}.$$

Нормальное напряжение в октаэдрической площадке по формуле (59) гл. 2

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma. \tag{60}$$

Касательное напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{p^2 - \sigma_{\text{окт}}^2}. \tag{61}$$

В силу равенств (55)—(57) гл. 2

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \tag{62}$$

Из последних соотношений вытекает

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{63}$$

Учитывая выражение σ_i для главных напряжений ($\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$), получим

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}. \tag{64}$$

Существует еще одна трактовка интенсивности напряжений. Как показал В. В. Новожилов, величина σ_i пропорциональна среднеквадратичному значению касательных напряжений на поверхности сферы единичного радиуса.

Замечание. Величина σ_i отражает не общий уровень напряжений, а интенсивность касательных напряжений, что вытекает из равенства $\sigma_i = 0$ для всестороннего растяжения или сжатия.

Общепринятый термин «интенсивность напряжений» не вполне точен. Лучше говорить о «приведенной интенсивности касательных напряжений, выраженной через эквивалентное нормальное напряжение при простом растяжении», или, короче, об «эквивалентном напряжении растяжения».

Интенсивность упругих и пластических деформаций. Как известно, общая деформация материала ε состоит из упругой и пластической частей (рис. 5.9). При простом растяжении

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^p + \varepsilon_0^e. \tag{65}$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы p и e означают соответственно пластичность и упругость.

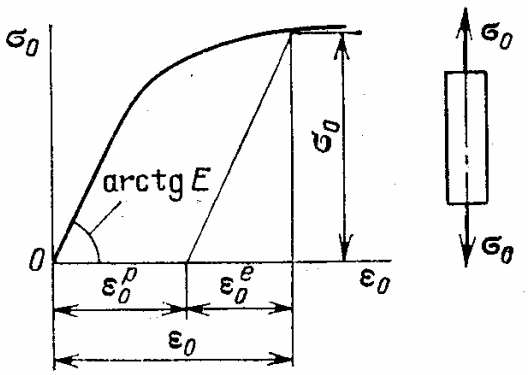


Рис. 5.9. Кривая деформирования при растяжении

Уравнения пластичности (40) относятся к общим деформациям, но их можно записать отдельно для упругих и пластических деформаций. Полагая $\psi = 1$, получим для упругих деформаций

$$\varepsilon_x^e - \varepsilon^e = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy}^e = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z). \tag{66}$$

В разделе 18 эти соотношения были получены из уравнений упругости. Вычитая равенства (66) из (40), получим значения пластических деформаций:

$$\varepsilon_x^p = (\psi - 1)\frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = (\psi - 1)\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z). \tag{67}$$

При выводе последних равенств было учтено, что пластические деформации протекают без изменения объема материала:

$$\varepsilon^p = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p\right) = 0, \tag{68}$$

и потому

$$\varepsilon = \varepsilon^e.$$

Из уравнений (67) находим

$$\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p = (\psi - 1)\frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma_y), \ldots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = (\psi - 1)\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z), \tag{69}$$

Возводя каждое равенство в квадрат, складывая все шесть равенств, предва-

рительно умножив три последние на 6 и извлекая квадратный корень из суммы, найдем

$$\varepsilon_i^p = (\psi - 1)\frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i. \tag{70}$$

Интенсивность упругих деформаций в силу зависимостей (66) или равенства (54) при $\psi = 1$ равна

$$\varepsilon_i^e = \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i. \tag{71}$$

Последние соотношения приводят к важному результату:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p. \tag{72}$$

Интенсивность деформаций равна сумме интенсивностей упругих и пластических деформаций (равенство Генки — Беляева).

Обобщенная кривая деформирования. Ранее было установлено соотношение (54), содержащее пока неизвестный параметр пластичности ψ. Соотношение (54) показывает, что между интенсивностью деформаций ε_i и интенсивностью напряжений σ_i должна существовать зависимость

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \tag{73}$$

которая называется *обобщенной кривой деформирования.*

Зависимость (73) в рамках деформационной теории пластичности следует считать справедливой для любого напряженного состояния.

Для несжимаемого материала ($\mu = \mu^* = 0{,}5$) по уравнениям (50) и (53) находим $\varepsilon_i = \varepsilon_0$, $\sigma_i = \sigma_0$, и обобщенная кривая деформирования совпадает с обычной кривой деформирования при растяжении образцов.

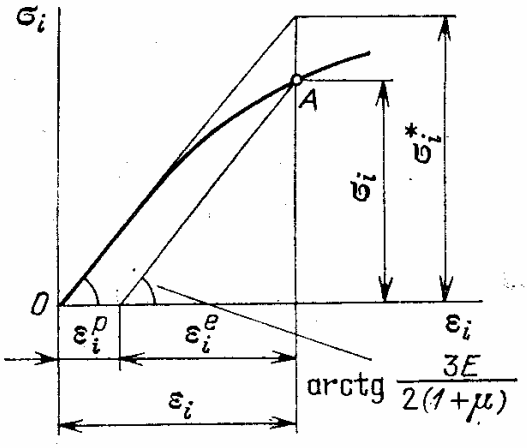


Рис. 5.10. Обобщенная кривая деформирования

В общем случае, используя уравнения (50) и (53):

$$\sigma_i = \sigma_0, \quad \varepsilon_i = \frac{2(1+\mu^*)}{3}\varepsilon_0, \tag{74}$$

можно построить зависимость (73) (рис. 5.10) по значениям ε_0, σ_0, взятым из опытов на растяжение, и по экспериментальному или расчетному значению коэффициента Пуассона μ^* при упругопластических деформациях.

С помощью обобщенной кривой деформирования выясняются значение и физический смысл параметра пластичности (см. уравнение (54) и рис. 5.10):

$$\psi = \frac{3E}{2(1+\mu)}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \tag{75}$$

где σ_i^* — значение интенсивности напряжений в идеально упругом

теле, соответствующее интенсивности деформаций ε_i в упругопластическом теле.

Однако построение обобщенной диаграммы деформирования ε_i, σ_i не обязательно для расчета упругопластического деформирования. Можно и гораздо удобнее в качестве обобщенной кривой деформирования принять обычную кривую деформирования ε_0, σ_0 при растяжении, понимая под ε_0 и σ_0 эквивалентные деформации и напряжения.

При простом растяжении интенсивность пластической деформации

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2} = \varepsilon_0^p, \qquad (76)$$

так как

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_0^p, \quad \varepsilon_y^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_0^p, \quad \varepsilon_z^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_0^p,$$

где ε_0^p — пластическая деформация при растяжении (см. рис. 5.9). Интенсивность упругой деформации по (71)

$$\varepsilon_i^e = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_0,$$

и потому интенсивность деформации при простом растяжении

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0^p + \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_0 = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} + \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_0,$$

или

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_0}{E}. \qquad (77)$$

Интенсивность напряжений в опытах на растяжение $\sigma_i = \sigma_0$. Из последних соотношений получаем *эквивалентные деформации и напряжения*:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_i + \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_i}{E}, \quad \sigma_0 = \sigma_i. \qquad (78)$$

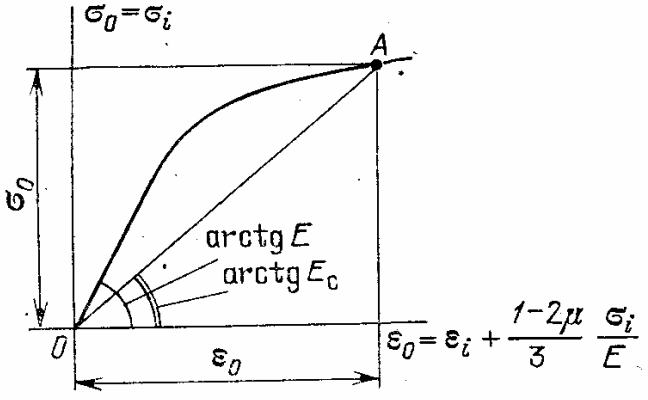


Рис. 5.11. Кривая деформирования при растяжении стержня как обобщенная кривая деформирования ($E_c = \sigma_0/\varepsilon_0$ — секущий модуль)

Кривая деформирования при растяжении может рассматриваться как обобщенная кривая деформирования (рис. 5.11), если эквивалентные деформации и напряжения определяются по формулам (78).

Еще одна форма уравнений Генки — Ильюшина. После того как выяснена связь величин ε_i и σ_i, можно указать еще одну форму уравнений Гепки — Ильюшина. Внося значения ψ из уравнения

(75) в соотношения (40), найдем

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z) \qquad (79)$$

и далее

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{f(\varepsilon_i)}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{f(\varepsilon_i)}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z).$$

Коэффициент Пуассона при упругопластических деформациях. Деформационная теория пластичности позволяет определить величину коэффициента Пуассона при упругопластических деформациях. Из соотношений (74) и (77) находим

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu^*)}{3}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_0}{E}, \qquad (80)$$

или

$$\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\frac{E_c}{E},$$

где $E_c = \sigma_0/\varepsilon_0$ — секущий модуль на кривой деформирования (см. рис. 5.11).

На рис. 5.12 показано сопоставление экспериментального значения μ^* и значений, определяемых по уравнению (80). Соотношение (80) дает удовлетворительное совпадение с данными опытов. Отметим, что если в упругой области $\mu = 0{,}5$ (упруго несжимаемый материал), то и в упругопластической области по равенству (80) $\mu^* = 0{,}5$.

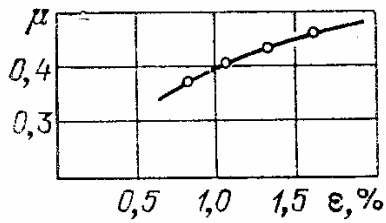


Рис. 5.12. Сопоставление экспериментального (точки) и теоретического (кривая) значений коэффициента Пуассона в упругопластической области

Интенсивность деформаций при растяжении в соответствии с равенством (77)

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{E_c}{E}\right)\varepsilon_0.$$

Метод переменных параметров упругости. Уравнения пластичности, связывающие деформации и напряжения, при $\sigma_i > \sigma_T$ нелинейны. Если в пределах упругих деформаций ($\sigma_i < \sigma_T$) увеличение напряжений в k раз вызывает такое же увеличение деформаций, то при появлении пластических деформаций пропорциональность нарушается. Нелинейность уравнений Генки — Ильюшина отчетливо проявляется в их записи в форме (79). Нелинейность физических уравнений теории пластичности создает большие трудности при решении практических задач (нарушается принцип независимости действия отдельных нагрузок и т. п.).

Метод переменных параметров упругости сводит решение задач деформационной теории пластичности к решению последовательности обычных задач упругости, что существенно облегчает расчеты.

Уравнения пластичности Генки — Ильюшина (зависимости (40)) сначала запишем формально в виде уравнений упругости. Например, соотношение

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma)$$

с учетом зависимости (33) будет таким:

$$\varepsilon_x = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma) + \varepsilon = \psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma) + \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha T.$$

Продолжая преобразования, представим уравнения пластичности в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}[\sigma_x - \mu^*(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, \ldots, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu^*)}{E^*}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \tag{81}$$

Здесь переменные параметры упругости E^* и μ^* равны

$$E^* = E\frac{3}{2(1+\mu)\psi + 1 - 2\mu}, \tag{82}$$

$$\mu^* = \frac{\psi(1+\mu) - (1-2\mu)}{\psi(1+\mu) + (1-2\mu)}, \tag{83}$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона (в упругой области), ψ — параметр пластичности.

Параметры E^* и μ^* называются *переменными параметрами упругости*, так как они зависят от напряженного состояния в точке (параметра пластичности ψ). В упругой области $\psi = 1$ и $E^* = E$, $\mu^* = \mu$.

Для несжимаемого тела (коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}5$)

$$E^* = \frac{E}{\psi} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_c, \tag{84}$$

$$\mu^* = 0{,}5. \tag{85}$$

Принимая в качестве обобщенной кривой деформирования кривую деформирования при растяжении, получим для параметра пластичности из соотношений (75) и (77) следующее выражение:

$$\psi = \frac{3E}{2(1+\mu)}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{3}{2(1+\mu)}\left(\frac{E}{E_c} - \frac{1-2\mu}{3}\right), \tag{86}$$

где $E_c = \sigma_0/\varepsilon_0$ — секущий модуль.

Теперь из соотношений (82), (83) и (86) вытекают основные формулы метода переменных параметров упругости:

$$E^* = E_c, \tag{87}$$

$$\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\frac{E_c}{E}. \tag{88}$$

Уравнения деформационной теории пластичности можно представить как уравнения теории упругости, если модуль упругости в них заменить секущим модулем (рис. 5.13). Менее существенной является поправка значения коэффициента Пуассона по формуле (88).

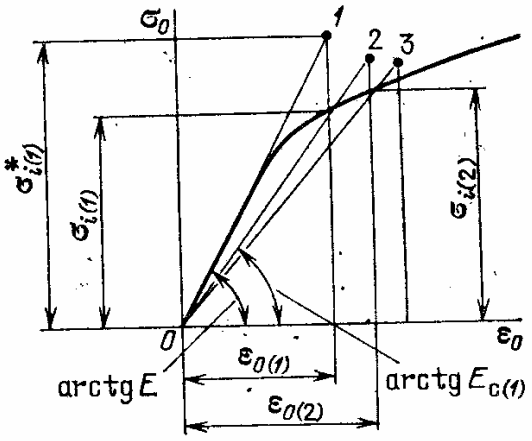


Рис. 5.13. Схема расчета по методу переменных параметров упругости

Замечание. Влияние коэффициента Пуассона на распределение напряжений обычно невелико, и часто проводят расчеты при $\mu = 0{,}5$, т. е. для несжимаемого материала.

Использование простых равенств (87) и (88) не требует каких-либо предположений относительно величины коэффициента Пуассона.

Соотношения (87) и (88) можно получить более простым путем, если представить уравнения (79) в виде зависимости

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1+\mu^*}{E^*}(\sigma_x - \sigma), \qquad (89)$$

что соответствует одной из форм закона Гука (см. уравнение (23)). Будем иметь

$$\frac{1+\mu^*}{E^*} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}.$$

Используя эквивалентные значения ε_0 и σ_0, находим

$$\frac{1+\mu^*}{E^*} = \frac{3}{2}\,\frac{1-\dfrac{1-2\mu}{3}\dfrac{E_c}{E}}{E_c}. \qquad (90)$$

В силу соотношения (80) приходим к равенствам (87), (88).

Запись уравнений пластичности в форме уравнений упругости еще не продвигает дело, так как значения секущего модуля и коэффициента Пуассона заранее неизвестны. Решение задачи находят методом последовательных приближений.

В первом приближении (см. рис. 5.13) материал считается упругим $\left(E^*_{(1)} = E,\ \mu^*_{(1)} = \mu\right)$ и решается обычная задача упругости. В результате определяются интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}$ в упругом теле и соответствующее значение эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{0(1)} = \sigma^*_{i(1)}/E.$$

По величине $\varepsilon_{0(1)}$, определяются по кривой деформирования величина $\sigma_{i(1)}$ и секущий модуль

$$E_{c(1)} = \sigma_{i(1)}/\varepsilon_{0(1)}.$$

Во втором приближении полагают

$$E^*_{(2)} = E_{c\,(1)}, \qquad \mu^*_{(2)} = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\,\frac{E_{c(1)}}{E}$$

и снова решают задачу упругости при полученных значениях параметров упругости. В результате получают значения $\sigma^*_{i(2)}, \varepsilon_{0(2)}$ и новое значение секущего модуля

$$E_{c(2)} = \sigma_{i(2)}/\varepsilon_{0(2)}.$$

Процесс считается законченным, если для n-го приближения

$$|\sigma_{i(n)} - \sigma_{i(n-1)}| < \Delta_1; \quad |\sigma^*_{i(n)} - \sigma_{i(n)}| < \Delta_2, \tag{91}$$

где Δ_1 — принятая точность сходимости приближений, Δ_2 — принятая точность расчета.

В плоскости эквивалентных напряжений и деформаций σ_0, ε_0 (см. рис. 5.13) точки «упругого расчета» стремятся к кривой деформирования. Не останавливаясь на доказательстве сходимости процесса, отметим, что обычно необходимая точность достигается после нескольких приближений. Условия (91) гарантируют сходимость и точность решения.

На рис. 5.14 дана иллюстрация метода переменных параметров для простейшей задачи — определить деформацию при растяжении с заданным напряжением σ_A. Решение задачи соответствует пересечению линии $\sigma_A = \text{const}$ с кривой деформирования. Последовательные приближения показаны точками *1*, *2*, ...

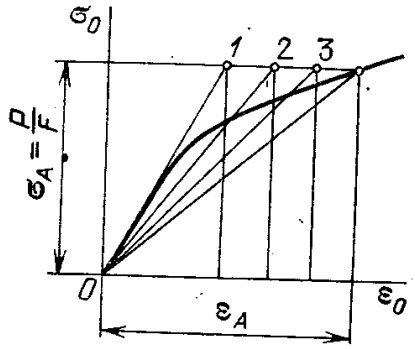


Рис. 5.14. Определение деформации растяжения при заданном напряжении по методу переменных параметров упругости

Замечание. Метод последовательных приближений является одним из наиболее общих математических методов. Для решения задачи разрабатывается процедура (алгоритм), при которой в каждом последующем шаге учитываются результаты предыдущего шага (предыдущего приближения). Метод является строгим, если доказаны сходимость последовательных приближений к точному решению и независимость результата от выбора исходного приближения.

В технических задачах доказательство сходимости, как правило, несущественно — ее наличие или отсутствие видно уже после первых шагов. Важно иметь возможность проверки правильности полученного результата.

Ограничения при использовании модели пластичности на основе деформационной теории. Эксперименты показали, что лежащие в основе модели пластичности уравнения Генки — Ильюшина достаточно хорошо описывают процесс монотонного нагружения. При таком процессе на всех этапах нагружения (внешними силами, температурами и т. п.) интенсивность напряжений σ_i все время возрастает.

Монотонное нагружение обычно реализуется при простом нагружении, когда все внешние силовые факторы изменяются пропорционально одному возрастающему параметру. При простом нагружении соотношение между внешними нагрузками в процессе нагружения остается неизменным. Если наступает процесс разгрузки, когда во всех точках тела интенсивность напряжений убывает (например, при снятии внешних усилий), то приращение (уменьшение) напряжений и деформаций на этапе разгрузки определяется на основе уравнений упругости (закон разгрузки; см. рис. 5.15). Основные ограничения рассматриваемой модели пластичности связаны с тем, что уравнения пластич-

ности относятся к конечной точке процесса и потому не учитывают историю нагружения. Если из физических соотношений ясно, что имеет место монотонное нагружение, то указанный недостаток несуществен.

В рамках применяемой модели пластичности можно учесть действительную историю нагружения, если рассматривать нагружение как совокупность нескольких этапов. Если на каком-либо промежуточном этапе происходит разгрузка, то расчет ведут с использованием уравнений упругости.

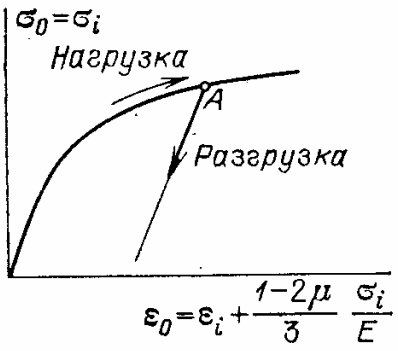


Рис. 5.15. Процесс разгрузки при упругопластическом деформировании

Другие модели пластичности. Более совершенной, но и значительно более сложной является модель пластичности, основанная на теории пластического течения Сен-Венана, Мизеса, Прандтля и Рейса. В соответствии с этой теорией рассматриваются раздельно приращения деформаций упругости и пластичности:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p, \ \ldots, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^e + d\gamma_{xy}^p, \ \ldots \quad (x, y, z). \qquad (92)$$

Приращение пластической деформации принимается пропорциональным составляющим девиатора напряжений:

$$d\varepsilon_x^p = F(\sigma_i)\, d\sigma_i\, (\sigma_x - \sigma), \ \ldots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = F(\sigma_i)\, d\sigma_i \tau_{xy}, \ \ldots \quad (x, y, z), \qquad (93)$$

где $d\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений. Функция $F(\sigma_i)$ определяется на основании экспериментальных данных при растяжении образцов.

Изложение теории пластического течения и других моделей пластичности можно найти в специальной литературе.

20. Модели ползучести и вязкоупругости

Как уже указывалось в разд. 15, *ползучестью* материала называется возрастание деформаций с течением времени при постоянном нагружении. Ползучесть металлов возникает главным образом в теплонапряженных элементах конструкций, при работе в условиях повышенных температур. Для полимерных и композиционных материалов, бетонов и др. ползучесть проявляется и при нормальной температуре. Для подобных материалов обычно используются модели вязкоупругости.

Практическая важность проблемы приводит к необходимости оценки влияния ползучести на работоспособность конструкции. Ползучесть влияет на перераспределение напряжений в элементах конструкций, а в ряде случаев приводит к недопустимому возрастанию деформаций. Разберем сначала модели ползучести металлических конструкционных материалов.

Основы моделей ползучести. Модели ползучести основаны на следующих допущениях.

Общие деформации, вызываемые действующими напряжениями и нагревом, представляют сумму деформаций упругости, пластичности, ползучести и температурной деформации:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p + \varepsilon_x^c + \alpha T + \ldots \qquad (x, y, z). \qquad (94)$$

Верхние индексы указывают природу деформации (e — упругость, p — пластичность, c — ползучесть); α — коэффициент линейного расширения; T — температура.

На рис. 5.16 дана схематическая модель материала, соответствующая равенству (94).

Материал рассматривается как последовательное соединение элементов. Тепловое воздействие вызывает тепловое расширение,

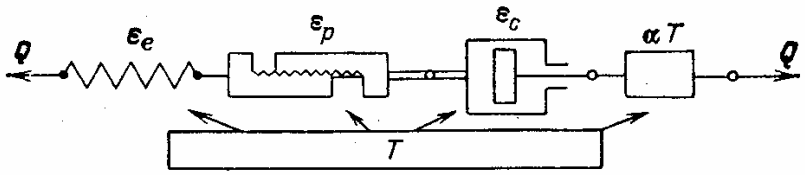


Рис. 5.16. Схематическая модель материала

а также влияет на параметры всех элементов (уменьшение модуля упругости в результате нагрева и т. п.).

Часто деформацию упругости и пластичности объединяют (деформационная теория пластичности), относя к ним и температурную деформацию. Равенство (94) справедливо и в дифференциальной форме:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_x^c + d(\alpha T) + \ldots \quad (x, y, z). \tag{95}$$

В практических расчетах под $d\varepsilon_x$, ... понимают приращение деформации $\Delta\varepsilon_x$ за малый промежуток времени Δt.

Второе допущение, используемое при построении моделей ползучести, состоит в том, что скорости деформаций ползучести или суммарные деформации пропорциональны составляющим девиатора напряжений.

Модели ползучести переносят результаты простых экспериментов (растяжение стержня при постоянных температуре и напряжении) на общий случай деформирования.

Модели ползучести, основанные на теории старения. Изохронные кривые ползучести. Наиболее простой теорией ползучести является теория старения. В соответствии с этой теорией должна существовать зависимость

$$F(\varepsilon_0, \sigma_0, t, T) = 0, \tag{96}$$

где ε_0 и σ_0 — суммарная деформация и напряжение при простом растяжении, t и T — время и температура нагружения. В соответствии с равенством (94) суммарная деформация

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p + \varepsilon_0^c + \alpha T. \tag{97}$$

Для сложного напряженного состояния зависимость (96) относится к интенсивностям деформаций и напряжений:

$$F(\varepsilon_i, \sigma_i, t, T) = 0, \tag{98}$$

или в другой форме

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i,\ t,\ T). \qquad (99)$$

Интенсивность суммарной деформации (упругости, пластичности и ползучести) определяется интенсивностью напряжений, временем и температурой нагружения.

Для стационарного режима нагружения ($\sigma_0 = \text{const}$, $T = \text{const}$) зависимость

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma_0,\ t,\ T) \qquad (100)$$

может быть определена из эксперимента (кривых ползучести). Основная гипотеза теории старения состоит в том, что зависимость (99) справедлива при нестационарном нагружении ($\sigma = \text{var}$, $T = \text{var}$).

Расчет ползучести основывается на кривых ползучести (см. разд. 15), построенных при постоянных температурах для различного уровня напряжений. На рис. 5.17 показана сетка кривых ползучести при напряжениях

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4.$$

По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — деформация при растяжении стержня (образца) при постоянном напряжении. В момент $t = 0$ (начало отсчета) начальная деформация

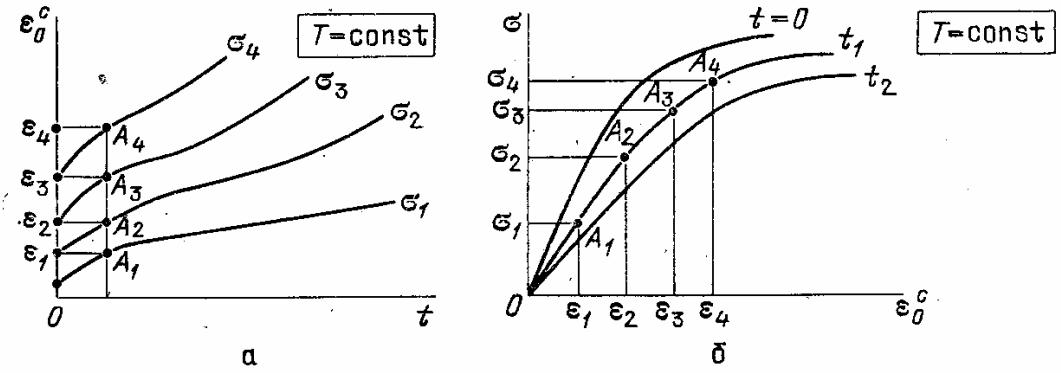


Рис. 5.17. Построение изохронных кривых ползучести (*б*) по сетке кривых ползучести (*а*)

соответствует мгновенной деформации (упругой или упругопластической) в результате действия приложенного напряжения. Температурная деформация

$$\varepsilon_T = \alpha T$$

при построении кривых ползучести так же, как и кривых деформирования, не учитывается.

Если провести сечение $t = \text{const}$, например $t = t_1$, то прямая $t = t_1$ пересечет кривые ползучести в точках A_1, A_2, A_3, A_4, которым соответствуют деформации ползучести ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. В каждой точке

A_1, A_2, ... известно значение действующего напряжения σ_1, σ_2, ... Эти данные позволяют построить зависимость

$$\varepsilon_0 = \varphi(\sigma_0)\big|_{t=t_1} = \varphi(\sigma_0, t_1). \qquad (101)$$

На рис. 5.17 кривая (101) проходит через точки O, A_1, A_2, A_3, A_4. Зависимость (101) выражает изохронную кривую ползучести для времени t.

Для начального значения времени $t = 0$ изохронная кривая совпадает с обычной кривой деформирования при растяжении стержня. Сетку кривых деформирования можно представить в виде поверхности суммарных деформаций при ползучести (рис. 5.18) в координатах t, ε_0 и σ_0. Плоскости $t = \text{const}$ (на рис. 5.18 они заштрихованы) при пересечении с поверхностью образуют изохронные кривые ползучести.

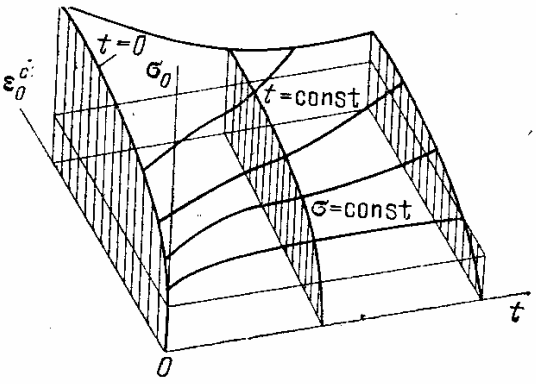


Рис. 5.18. Поверхность суммарных деформаций при ползучести $F(t, \varepsilon_0, \sigma_0) = 0$

По теории старения, которая излагается в трактовке Ю. Н. Работнова, ползучесть приводит к уменьшению упругопластического сопротивления материалов — с увеличением времени условные кривые деформирования понижаются, материал «состаривается».

Отметим, что деформации ползучести возникают и при напряжениях, меньших предела текучести, и потому «понижение» происходит и на упругом участке условных кривых деформирования.

После нахождения *изохронных кривых ползучести* задача сводится к расчету упругопластического тела по деформационной теории пластичности (разд. 19). Для начального момента времени ($t = 0$) расчет полностью совпадает с определением напряжений и деформаций по деформационной теории пластичности.

Для момента времени t проводится точно такой же расчет, но в качестве кривой деформирования принимается изохронная кривая ползучести для соответствующего момента времени.

Модели ползучести, основанные на теории старения, пригодны для описания монотонного, или стационарного, нагружения, процессов релаксации (падения) напряжений при неизменной деформации.

Основным недостатком теории старения является отрицание влияния истории нагружения. Из уравнения (98) следует, что в момент времени t данному напряжению соответствует определенная деформация ползучести. Следовательно, если напряжение мгновенно возрастет, то должна мгновенно увеличиться и деформация ползучести, что, конечно, произойти не может. Более правильно считать, как это делается в других теориях ползучести, что при мгно-

венном возрастании напряжений подобным образом увеличивается скорость ползучести.

Модели ползучести, основанные на теории течения и теории упрочнения. На рис. 5.19 показана кривая чистой ползучести при одноосном растяжении — зависимость деформации ползучести ε_0^c от времени нагружения. Мгновенная деформация в начальный момент, связанная с упругостью и пластичностью материала, не учитывается. В теориях течения и упрочнения деформация ползучести рассматривается отдельно от деформации упругости и пластичности. Скорость деформации ползучести

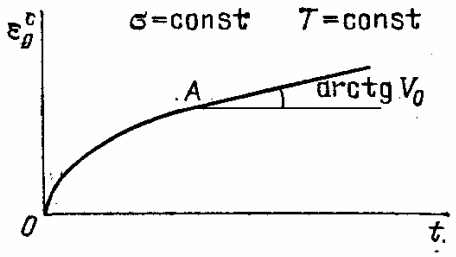


Рис. 5.19. Кривая чистой ползучести при $\sigma = \text{const}$, $T = \text{const}$; деформации упругости, пластичности и температурное расширение (деформация в начальный момент времени ($t = 0$) не учитывается)

$$V_0 = \varepsilon_0^c = \frac{d\varepsilon_0^c}{dt}. \qquad (102)$$

Для кривых ползучести V_0 представляет (в определенном масштабе) тангенс угла наклона касательной (рис. 5.19).

Проводя испытания при различных напряжениях и температурах, по кривым ползучести можно установить зависимость

$$V_0 = V_0(\sigma_0, t, T). \qquad (103)$$

В теории течения для общего случая напряженного состояния в уравнении (103) величина V_0 заменяется интенсивностью скоростей деформации

$$V_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(V_x - V_y)^2 + \ldots + \frac{3}{2}V_{xy}^2 + \ldots}, \qquad (104)$$

где $V_x = \dot{\varepsilon}_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt}$, $V_y = \dot{\varepsilon}_y = \frac{d\varepsilon_y}{dt}$, $\ldots$, $V_{xy} = \dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$, $\ldots$ — скорости компонентов деформации; величина σ_0 заменяется интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \ldots + 6\tau_{xy}^2 + \ldots}. \qquad (105)$$

По теории течения предполагается, что должна существовать зависимость

$$F(V_i, \sigma_i, t, T) = 0, \qquad (106)$$

или в другой форме

$$V_i = V_i(\sigma_i, t, T). \qquad (107)$$

Интенсивность скоростей деформации ползучести определяется интенсивностью напряжений, временем и температурой нагружения.

Основная гипотеза теории течения состоит в том, что зависимости (103) и (107) остаются справедливыми не только для стационарного режима нагружения ($\sigma_i = \text{const}$, $T = \text{const}$), но и при нестационарном нагружении ($\sigma_i = \text{var}$, $T = \text{var}$).

Деформация ползучести, как и всякая остаточная деформация, происходит без увеличения объема:

$$\varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c + \varepsilon_z^c = 0. \tag{108}$$

Из последнего соотношения после дифференцирования по времени вытекает равенство нулю скорости объемной деформации:

$$V = \dot{\varepsilon}_x^c + \dot{\varepsilon}_y^c + \dot{\varepsilon}_z^c = V_x + V_y + V_z = 0, \tag{109}$$

где V — скорость средней деформации.

В соответствии с общими принципами построения моделей ползучести девиатор скоростей деформации ползучести принимается пропорциональным девиатору напряжений:

$$V_x = \dot{\varepsilon}_x^c = k(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2} V_{xy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}^c = k\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \tag{110}$$

В левые части зависимости (110) не входит скорость средней деформации, так как $V = 0$. Равенства (110) можно записать в эквивалентной форме:

$$V_x - V_y = k(\sigma_x - \sigma_y), \ldots, \frac{1}{2} V_{xy} = k\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \tag{111}$$

Символ (x, y, z), как и раньше, означает, что недостающие соотношения выписываются с помощью круговой перестановки индексов. Возводя каждое из шести равенств (111) в квадрат, складывая все шесть равенств, предварительно умножив последние три соотношения на 6, и извлекая квадратный корень, получим

$$\sqrt{(V_x - V_y)^2 + \ldots + \frac{3}{2} V_{xy}^2 + \ldots} = k\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \ldots + 6\tau_{xy}^2 + \ldots}.$$

С учетом зависимостей (104) и (105) находим

$$V_i = \frac{2}{3} k\sigma_i, \quad k = \frac{3V_i}{2\sigma_i}. \tag{112}$$

Для случая одноосного растяжения

$$V_i = V_0 = \dot{\varepsilon}_0^c, \ \sigma_i = \sigma_0 \tag{113}$$

и

$$k = \frac{3V_0(\sigma_0, t, T)}{2\sigma_0}. \tag{114}$$

В общем случае для двухосного (плоского) или трехосного (объемного) напряженного состояния

$$k = \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}, \tag{115}$$

где V_0 — скорость деформации ползучести в момент времени t в опытах на растяжение, проводимых при напряжении $\sigma_0 = \sigma_i$ и температуре T.

Модель ползучести по теории течения характеризуется следующими соотношениями:

$$V_x = \dot{\varepsilon}_x^c = \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}V_{xy} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^c = \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \tag{116}$$

Обращает на себя внимание аналогия с уравнениями деформационной теории пластичности, если вместо деформаций рассматривать скорости деформации.

Подобные зависимости справедливы и для модели ползучести по теории упрочнения, в которой принимается

$$V_0 = V_0(\sigma_0, \varepsilon_0^c, T). \tag{117}$$

Зависимость (117) отличается от (103) тем, что величина скорости характеризуется не временем нагружения, а достигнутой величиной деформации ползучести.

Установившаяся ползучесть. Процесс ползучести, протекающий при постоянных, не изменяющихся во времени напряжениях, называется *установившейся ползучестью.* Очевидно, установившаяся ползучесть может иметь место только при неизменных во времени внешних усилиях и нагреве. При постоянных напряжениях приращения деформации упругости и пластичности должны отсутствовать, и из уравнения (95) при постоянной температуре следует

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^c, \ldots \quad (x, y, z). \tag{118}$$

Разделив обе части равенства на dt, находим

$$V_x = V_x^c. \tag{119}$$

При установившейся ползучести скорость изменения деформации равна скорости ползучести.

Для ползучести при одноосном напряженном состоянии (растяжении) по сетке кривых ползучести (см. рис. 5.19) для различных напряжений можно найти скорость V_0 на участках с постоянной скоростью ползучести:

$$V_0 = \varphi(\sigma_0, T). \tag{120}$$

Для аналитического описания часто используется степенная зависимость

$$V_0 = B(T)\,\sigma_0^{n(T)}. \qquad (121)$$

При одноосном напряженном состоянии для наступления стадии установившейся ползучести достаточного того времени, при котором скорость ползучести во всех точках тела не будет зависеть от времени.

При указанном времени соответствующие кривые ползучести «выходят» на прямолинейный участок. Более строго, установившаяся ползучесть наступает с того момента времени, когда скорости ползучести становятся подобными по времени, т. е. могут быть выражены соотношением

$$V_0 = \varphi(\sigma_0, T)\,\xi(t), \qquad (122)$$

где $\xi(t)$ — функция времени, одинаковая для различных значений σ_0 и T (в частном случае $\xi(t) = 1$).

При действии значительных напряжений порядка предела текучести развивается ползучесть за небольшие промежутки времени (порядка секунд и минут). На рис. 5.20 показаны кривые ползучести при кратковременной ползучести, которые практически можно считать прямыми линиями. Для таких кривых ползучести справедливо соотношение (120), и кратковременную ползучесть можно рассматривать как установившуюся ползучесть; ее можно представить как предельное состояние, которое устанавливается при большом времени нагружения при постоянных внешних нагрузках и температурном поле. При установившейся ползучести деформации упругости оказываются малыми по сравнению с деформациями ползучести.

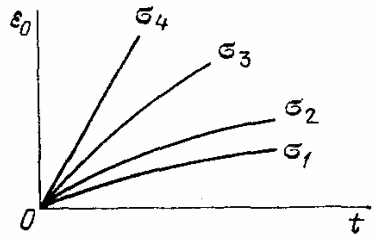


Рис. 5.20. Кривые ползучести при высоком уровне напряжений (кратковременная ползучесть)

Расчет стадии установившейся ползучести более прост, чем расчет общего случая ползучести. Для расчета установившейся стадии могут быть использованы соотношения (116) при условии (120):

$$V_x = \frac{3V_0(\sigma_i, T)}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \quad \frac{1}{2}V_{xy} = \frac{3V_0(\sigma_i, T)}{2\sigma_i}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \qquad (123)$$

Часто используется зависимость (121), и тогда основные уравнения для модели установившейся ползучести имеют вид

$$V_x = \frac{3}{2}B(T)\,\sigma_i^{n(T)-1}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \quad \frac{1}{2}V_{xy} = \frac{3}{2}B(T)\,\sigma_i^{n(T)-1}\tau_{xy}, \ldots \quad (x, y, z). \qquad (124)$$

Сопоставляя уравнения (124) и соотношения (79) для деформа-

ционной теории пластичности, приходим к следующему выводу. Распределение напряжений в установившейся стадии ползучести совпадает с распределением напряжений при упругопластических деформациях, если кривая деформирования имеет степенной вид:

$$\varepsilon_i = B(T)\,\sigma_i^{n(T)}. \tag{125}$$

Предполагается также, что при упругопластических деформациях материал является несжимаемым ($\mu = 0{,}5$, $\varepsilon = 0$). Вместо деформаций рассматриваются их скорости, что не изменяет решения задачи, так как все уравнения сохраняют прежний вид после соответствующей замены обозначений.

Модели вязкоупругости. В классической механике со времен Ньютона используется модель вязкой жесткости, в которой касательные напряжения пропорциональны скорости деформации сдвига

$$\tau_{xy} = \eta \frac{d}{dt}(\gamma_{xy}), \ldots \quad (x, y, z), \tag{126}$$

где η — коэффициент вязкости.

Если рассмотреть сплошную среду, обладающую свойствами вязкой жидкости и упругости, то получим модели вязкоупругости, которые были предложены Максвеллом, Фойгтом и Кельвином в связи с изучением свойств густых растворов, суспензий и упругих тел. В дальнейшем оказалось, что модели вязкоупругости пригодны для описания полимерных материалов, имеющих широкое распространение в современной технике.

Рис. 5.21. Модель Максвелла

Модель Максвелла представляет последовательное соединение элемента упругости и элемента вязкости (последний иллюстрируется в виде движения поршня с зазором внутри цилиндра с вязкой жидкостью (рис. 5.21)). Относительное перемещение точек A и B

$$\delta = \delta^e + \delta^c, \tag{127}$$

где упругая часть перемещения пропорциональна действующему усилию:

$$\delta^e = \lambda Q. \tag{128}$$

Для вязкого элемента усилие Q пропорционально скорости движения поршня относительно цилиндра:

$$Q = \eta \frac{d\delta^c}{dt}. \tag{129}$$

Дифференцируя равенство (127) по времени и учитывая соотношения (128) и (129), находим

$$\frac{d\delta}{dt} = \lambda \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\eta} Q. \tag{130}$$

Для элемента тела при одноосном напряженном состоянии аналогично последнему уравнению получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \tag{131}$$

где σ, ε — напряжение и деформация растяжения; E — модуль упругости; η —

постоянная вязкости, определяемая из экспериментальных данных. Величины ε и η зависят от температуры T.

Модель Максвелла совпадает с основной моделью тела при упругих деформациях и деформациях ползучести, для которого скорость ползучести линейно зависит от напряжения (см. рис. 5.16).

Модель Максвелла с нелинейной вязкостью

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma^n \tag{132}$$

может быть использована для приближенного описания деформации не только полимерных материалов, но и металлов.

Модель Фойгта (рис. 5.22) содержит параллельное соединение элементов упругости и вязкости, для которого общее усилие

$$Q = Q^e + Q^c = \frac{1}{\lambda}\delta + \eta\frac{d\delta}{dt}, \tag{133}$$

где $\delta = \delta^e = \delta^c$ — относительное перемещение точек A и B. Для элемента тела при одноосном напряженном состоянии, подобно равенству (133), получаем

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{134}$$

Модель Фойгта не дает правильной картины поведения конструкционных материалов под нагрузкой, но она может быть использована для описания микропроцессов в материале, в частности внутреннего трения при переменных напряжениях.

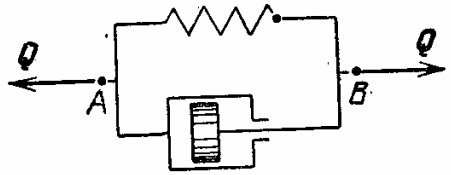


Рис. 5.22. Модель Фойгта

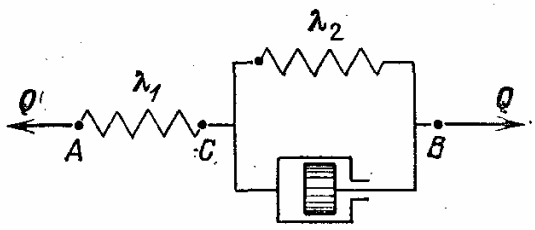


Рис. 5.23. Модель Кельвина

Модель Кельвина (рис. 5.23) представляет обобщение моделей Максвелла и Фойгта.

Для модели Кельвина относительное перемещение точек A и B

$$\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}, \tag{135}$$

где $\delta_{AC} = \lambda_1 Q$ — перемещение звена AC.

Дифференцируя соотношение (135), находим

$$\frac{d\delta}{dt} = \lambda_1\frac{dQ}{dt} + \frac{d\delta_{CB}}{dt}. \tag{136}$$

С помощью равенства (133) для модели Фойгта находим

$$\frac{d\delta_{CB}}{dt} = \frac{Q}{\eta} - \frac{1}{\lambda_2\eta}\delta_{CB} = \frac{Q}{\eta} - \frac{1}{\lambda_2\eta}(\delta - \lambda_1 Q). \tag{137}$$

Из соотношений (136) и (137) вытекает равенство

$$\frac{d\delta}{dt}+\frac{1}{\lambda_2\eta}\delta=\frac{1}{\eta}\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)Q+\lambda\frac{dQ}{dt}. \tag{138}$$

В последнем равенстве λ_1 и λ_2 — коэффициенты податливости упругих элементов. Переходя на основании модели Кельвина к элементу тела при одноосном растяжении, будем иметь

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{E_2\varepsilon}{\eta}=\frac{1}{E_1}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{1}{\eta}\frac{E_1+E_2}{E_1}\sigma. \tag{139}$$

Если $E_1=E$, $E_2=0$, то уравнение (139) совпадает с уравнением (131) для модели Максвелла; при $E_1\to\infty$, $E_2=E$ получается соотношение (134) для модели Фойгта.

ГЛАВА 6

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

Вводные замечания. В настоящей главе рассматриваются приближенные модели растяжения и сжатия стержней. В инженерной практике широко применяются приближенные модели надежности, когда оценки прочности проводятся по средним напряжениям в сечении стержня без учета концентрации напряжений, влияния условий закрепления концов стержня и других факторов. Приближенные модели часто используются для начального этапа проектирования при предварительном выборе размеров. Они позволяют оценить силовые потоки в элементах конструкций, взаимодействие элементов между собой и опорными узлами, выбрать оптимальные конструктивные схемы.

Общие перемещения в стержнях, влияющие на распределение усилий, достаточно точно определяются средними напряжениями.

Модели надежности, основанные на приближенных схемах, часто позволяют более четко выяснить физический смысл различных методов оценки надежности конструкций, определения запасов прочности. В свете этих посылок ниже рассматриваются деформации растяжения и сжатия стержней.

Работа стержней на сжатие имеет свои особенности. Тонкие и длинные стержни при действии сжимающих усилий теряют устойчивость прямолинейной формы равновесия, получают дополнительные прогибы. С этими проблемами мы познакомимся далее, а пока будем считать, что при рассматриваемых напряжениях сжатия потери устойчивости стержней не происходит.

21. Растяжение и сжатие стержней сосредоточенными и распределенными силами

Пример точного решения. Рассмотрим растяжение призматического стержня усилиями на его торцах (рис. 6.1). Допустим, что внешние силы распределены равномерно по площади сечения и

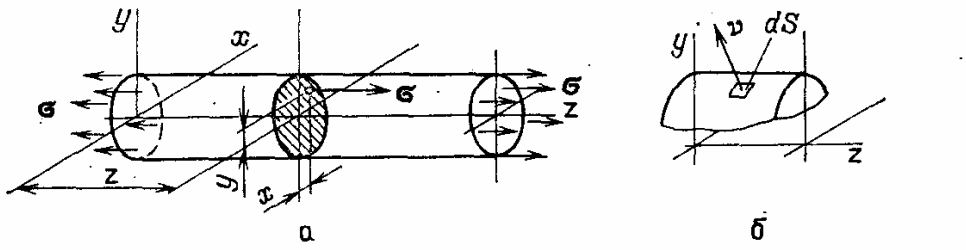


Рис. 6.1. Растяжение стержня усилиями на его торцах

создают растягивающие напряжения σ. Материал стержня предполагается упругим.

Найдем распределение напряжений и деформаций в стержне, не прибегая к каким-либо допущениям. Решение построим так называемым обратным методом: сначала предположим, что существует некоторое решение, а затем проверим, выполняются ли все необходимые условия.

Допустим, что напряженное состояние в произвольной точке стержня (точке A) таково:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \tag{1}$$

Единственная, отличная от нуля компонента напряженного состояния предполагается постоянной во всех точках тела.

Проверим справедливость уравнений равновесия (уравнений разд. 7). Они удовлетворяются, так как производные обращаются в нуль, а массовая сила отсутствует.

Далее проверяем выполнение краевых условий. Составляющие вектора напряжения на поверхности (см. уравнения (103) гл. 2) равны

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned} \tag{2}$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности. На боковых поверхностях стержня $p_x = p_y = p_z = 0$ — внешние напряжения на боковой поверхности отсутствуют. Условия (2) выполняются, так как $n = 0$.

На торцевых поверхностях

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \sigma,$$

что не противоречит решению (1). Для завершения проверки следует определить деформации по закону Гука и убедиться, что уравнения совместности выполняются.

Из уравнений упругости (уравнений (20) гл. 5) следует

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma, \quad \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \tag{3}$$

Уравнения совместности (уравнения (41)—(43) гл. 3) удовлетворяются, так как производные деформаций обращаются в нуль. Следовательно, напряжения (1) и деформации (3) составляют точное решение задачи. Определим перемещения точек стержня. Так как

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mu}{E}\sigma, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu}{E}\sigma, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma}{E}, \tag{4}$$

то, интегрируя, находим

$$u = -\int_0^x \frac{\mu}{E}\sigma\, dx + u_0 = u_0 - \frac{\mu\sigma}{E}x, \quad v = v_0 - \frac{\mu\sigma}{E}y, \quad w = w_0 + \frac{\sigma}{E}z, \tag{5}$$

где u_0, v_0, w_0 — смещения точки стержня, совпадающей с началом координат.

Наличие в решении постоянных u_0, v_0, w_0 показывает, что перемещения определяются с точностью до смещения стержня как твердого тела.

Из равенства (5) следует, что точки плоскости поперечного сечения ($z = \text{const}$) в результате деформирования получают одинаковое смещение w, т. е. сечения стержня остаются плоскими. Далее

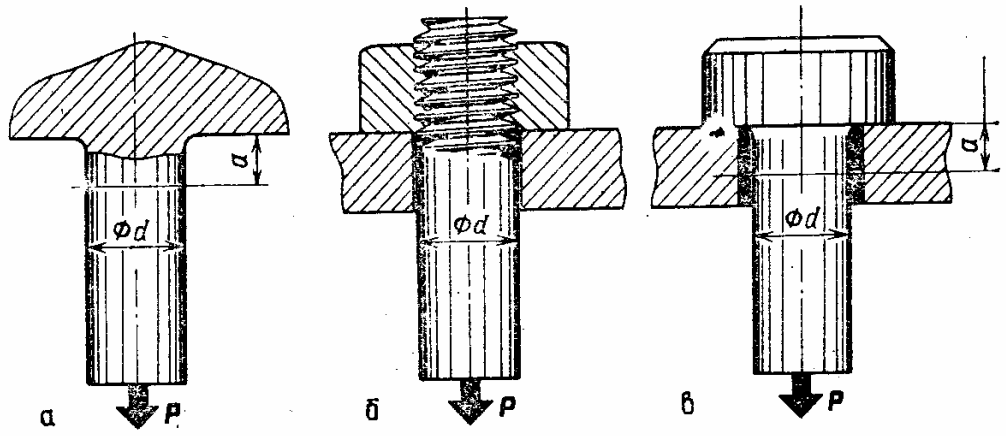


Рис. 6.2. Различные способы закрепления конца стержня

отметим, что напряженное состояние является одноосным. Волокна стержня испытывают лишь растяжение вдоль оси z. Точки стержня получают также смещения в плоскости сечения. Если конец стержня закреплен в массивной детали, то указанные смещения стеснены и в районе закрепления (рис. 6.2) возникает искажение одноосного напряженного состояния. По принципу Сен-Венана (см. разд. 7) эти искажения должны иметь местный характер и распространяться на длину порядка диаметра стержня.

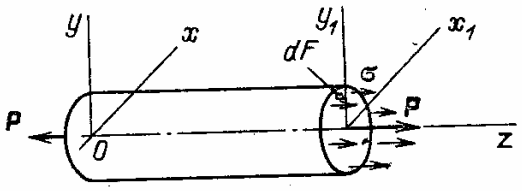


Рис. 6.3. Растяжение стержня сосредоточенными усилиями

Определим равнодействующую внешних усилий, приложенных к торцам стержня (рис. 6.3). В качестве точки приведения выберем центр тяжести сечения, где и поместим начало местной системы координат x_1, y_1. Сумма всех сил приводит к усилию

$$P = \int_F \sigma \, dF = \sigma F, \tag{6}$$

где F — площадь поперечного сечения. Моменты относительно осей x_1 и y_1 равны соответственно

$$M_{x1} = \int_F \sigma y_1 \, dF = \sigma \int_F y_1 \, dF = 0, \quad M_{y1} = -\int_F \sigma x_1 \, dF = -\sigma \int_F x_1 dF = 0,$$

так как начало координат лежит в центре тяжести. Статические моменты площади

$$\int_F y_1\,dF = 0, \quad \int_F x_1\,dF = 0 \tag{7}$$

относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равны нулю. Система равномерно распределенных по площади напряжений статически эквивалентна растягивающей силе $P = \sigma F$, приложенной в центре тяжести сечения.

Правильно и обратное утверждение: растягивающая сила, действующая вдоль оси стержня, вызывает в сечениях стержня равномерно распределенные нормальные напряжения. Отличия имеют место только возле торцов стержня. Системы внешних сил (распределенные или сосредоточенные усилия) статически эквивалентны, и указанные отличия по принципу Сен-Венана распространяются вдоль оси стержня на расстояние порядка размеров поперечного сечения.

На рис. 6.2 показаны различные условия закрепления конца стержня при его растяжении. Во всех случаях в концевой зоне стержня создаются статически эквивалентные системы внешних усилий, влияние которых сказывается в концевой области. Вне

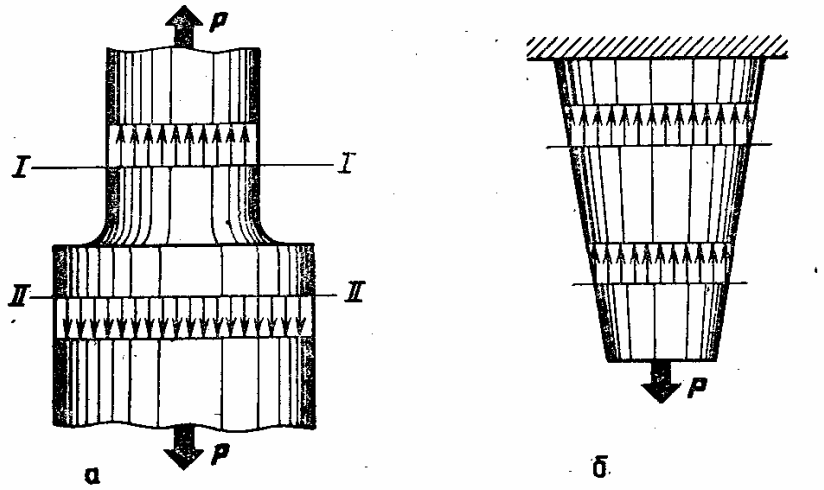


Рис. 6.4. Нарушение допущений приближенной модели

пределов краевого эффекта можно принимать равномерное распределение напряжений.

Приближенные модели растяжения и сжатия стержней. В приближенных моделях растяжения и сжатия стержней используются два основных допущения:

1) поперечные сечения стержня остаются плоскими (напряжения распределяются равномерно по поперечному сечению);

2) напряженное состояние в стержне является одноосным.

Как было показано для идеального случая растяжения (стержень постоянного сечения при равномерно распределенных по тор-

цам внешних усилиях), принятые допущения вполне оправданны. Однако эти допущения и принцип Сен-Венана применяются и в тех случаях, когда существуют зоны резких отклонений небольшой протяженности (рис. 6.4, *а*) или небольшие отклонения, но распространяющиеся на весь стержень (рис. 6.4, *б*).

Для решения задач на основе сделанных допущений нет необходимости рассматривать условия равновесия и деформации бесконечно малых элементов. Появляется возможность сразу учесть равновесие и деформирование участков стержней или всего стержня в целом.

Растяжение стержня с учетом действия собственного веса. Рассмотрим длинную трубу, опущенную в шахту (рис. 6.5). На конце

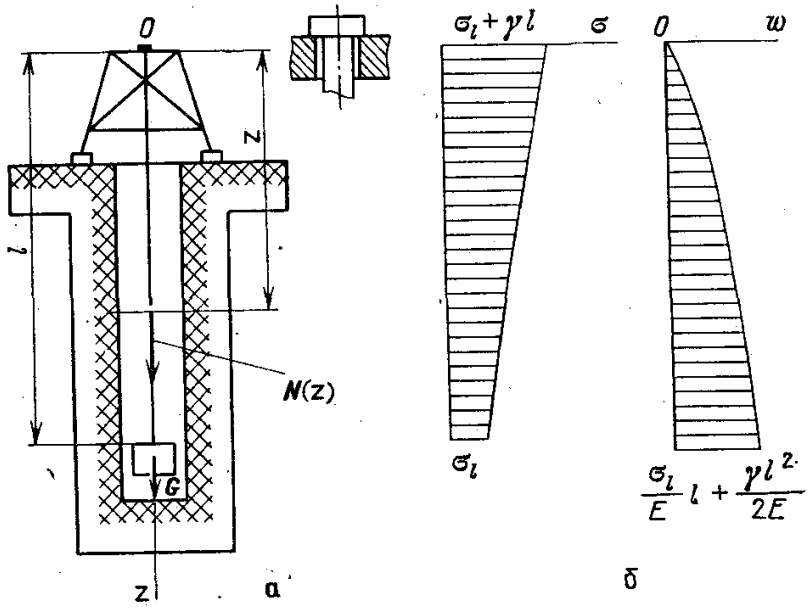


Рис. 6.5. Распределение напряжений и перемещений (*а*) при растяжении стержня (трубы) с учетом собственного веса: *б* — эпюра нормальных напряжений и эпюра упругих перемещений

трубы действует вес G. В сечении z приложено растягивающее усилие

$$N(z)=G+\gamma F(l-z), \tag{8}$$

где F — площадь поперечного сечения стержня; $\gamma=\rho g$ — удельный вес материала (Н/см^3); ρ — массовая плотность материала (кг/см^3); $g=981$ см/с^2 — ускорение силы тяжести. Напряжение растяжения

$$\sigma(z)=N(z)/F=\sigma_l+\gamma(l-z), \tag{9}$$

где $\sigma_l=G/F$ — напряжение от усилия на конце трубы. Деформация удлинения в сечении z для упругого материала с модулем упругости E составит

$$\varepsilon(z)=\frac{\sigma(z)}{E}=\frac{\sigma_l}{E}+\frac{\gamma}{E}(l-z). \tag{10}$$

Упругое перемещение сечения z (при $z=0$ перемещение отсутствует)

$$w(z)=\int_0^z \frac{\sigma(z_1)}{E}\,dz_1. \tag{11}$$

В равенстве (11) величина z_1 является переменной интегрирования

$$0<z_1<z.$$

Учитывая (10), найдем перемещение в сечении z:

$$w(z)=\int_0^z\left[\frac{\sigma_l}{E}+\frac{\gamma}{E}(l-z_1)\right]dz_1=\frac{\sigma_l}{E}z-\frac{\gamma}{2E}(l-z_1)^2\Big|_0^z=$$

$$=\frac{\sigma_l}{E}z+\frac{\gamma}{2E}z(2l-z). \tag{12}$$

На рис. 6.5 показаны эпюры распределения напряжений и перемещений по длине стержня.

Растяжение стержня в поле центробежных сил. Рассмотрим растяжение лопатки осевого компрессора или турбины, лопасти воздушного винта или вертолета в поле центробежных сил. Лопатка рассматривается как стержень переменного поперечного сечения.

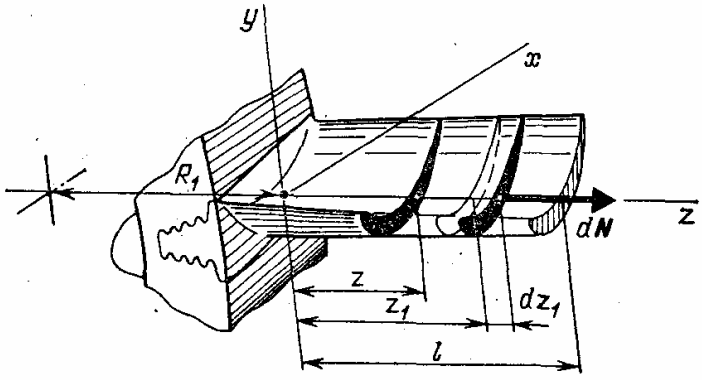


Рис. 6.6. Растяжение лопатки осевого компрессора или турбины от действия центробежных сил

Ось лопатки (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) совпадает с осью z (рис. 6.6).

Начало системы координат помещено в центре тяжести корневого сечения, на расстоянии R_1 от оси вращения. Внешний радиус лопатки равен R_2. Найдем напряжение растяжения в поперечном сечении лопатки.

Центробежная сила, действующая на элемент стержня,

$$dN=\omega^2(R_1+z_1)\rho F(z_1)\,dz_1, \tag{13}$$

где ω, рад/с — угловая скорость; ρ, кг/см^3 — плотность; $F(z_1)$, см^2 — площадь поперечного сечения.

При определении центробежной силы элемент стержня рассматривается как точечная масса, сосредоточенная в центре тяжести сечения. Растягивающее усилие в сечении z

$$N(z) = \rho\omega^2 \int_z^l (R_1 + z_1) F(z_1)\, dz_1. \tag{14}$$

Напряжение растяжения

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F(z)} = \rho\omega^2 \frac{1}{F(z)} \int_z^l (R_1 + z_1) \rho F(z_1)\, dz_1. \tag{15}$$

Для стержня (лопатки) постоянного сечения

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \rho\omega^2 R_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Величина

$$\omega R_2 = u \tag{17}$$

представляет окружную скорость на внешнем радиусе лопатки R_2. Формулу (16) представим в виде

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \rho u^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2}\right)^2\right].$$

Наибольшее напряжение получается в корневом сечении при $z = 0$

$$\sigma_{max} = \sigma(0) = \frac{1}{2} \rho u^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right). \tag{18}$$

Выражение

$$\rho u^2 = \sigma_к \tag{19}$$

составляет напряжение растяжения во вращающемся тонком кольце. Значения $\sigma_к$ даны в табл. 2.

Таблица 2

Значения $\sigma_к$ (Н/мм^2) и типичные значения предела прочности материала

Материал	ρ, 10^{-3} кг/см^3	u, м/с					σ_b, Н/мм^2
		100	200	300	400	500	
Алюминиевые сплавы	2,75	28	112	252	448	700	150—450
Титановые сплавы	4,5	46	184	415	735	1150	700—1100
Стали	7,85	80	320	720	1280	2000	500—1200

Из формулы (15) следует, что напряжения не зависят от абсолютного размера площади поперечного сечения.

При изменении площади $F(z)$ на всех радиусах в k раз напряжения растяжения остаются прежними. Для уменьшения напря-

жений растяжения сечения лопатки на больших радиусах уменьшают (рис. 6.7).

Приближенная модель прочностной надежности лопатки газовой турбины. Приближенная модель оценивает надежность лопатки по запасу длительной прочности. Условие надежности имеет вид

$$n_{\min} = \frac{\sigma_{дл}(z)}{\sigma(z)} > [n], \qquad (20)$$

где $n_{\min}$ — минимальное значение запаса прочности в различных сечениях лопатки; $\sigma_{дл}(z)$ — предел длительной прочности (см. разд. 16) материала при температуре в рассматриваемом сечении стержня (лопатки), $\sigma(z)$ — напряжения растяжения; $[n]$ — допустимое значение запаса прочности. Для лопаток газовых турбин обычно принимают $[n] = 2-2{,}5$.

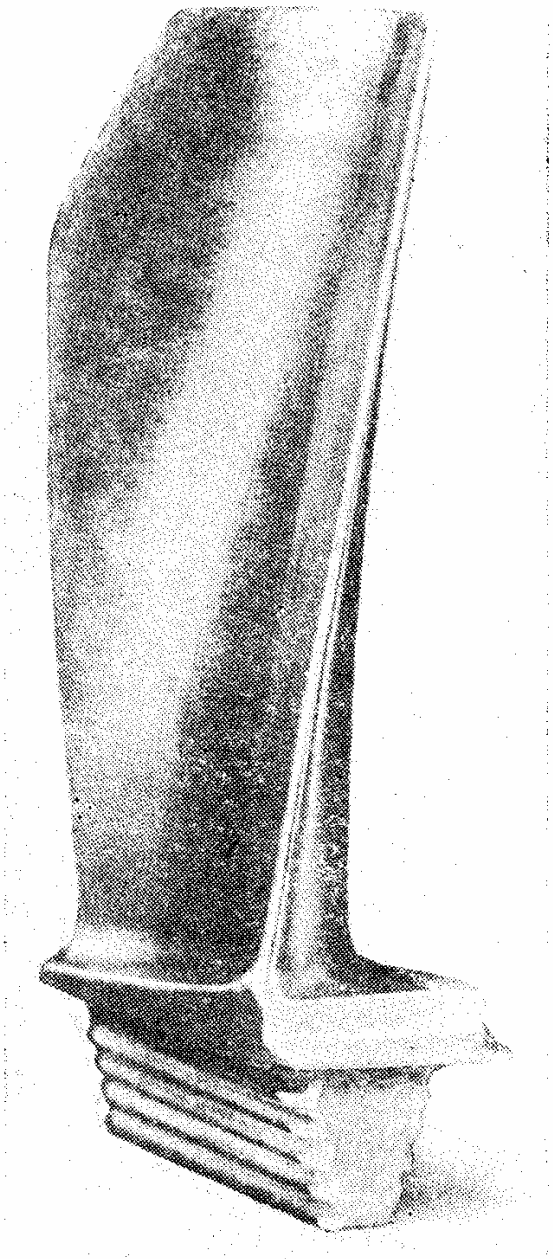


Рис. 6.7. Лопатка газовой турбины авиационного двигателя

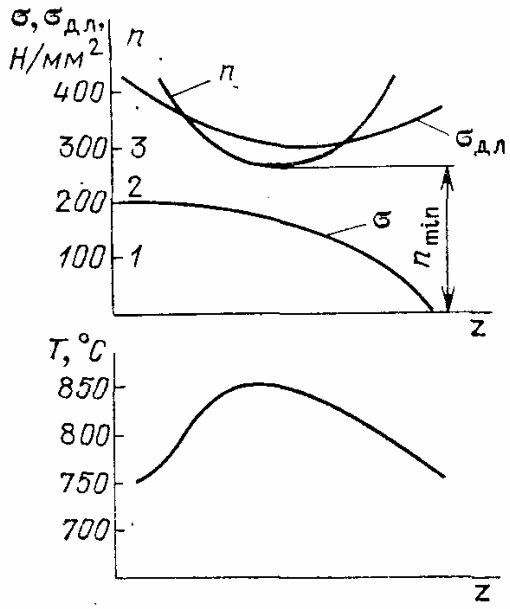


Рис. 6.8. Распределение напряжений растяжения σ, температуры T, длительной прочности $\sigma_{дл}$ за время 1000 ч и запаса прочности n

Значение запаса прочности зависит от температуры сечения и длительности работы.

На рис. 6.8 для одной из лопаток газовой турбины показаны распределения растягивающих напряжений, температуры, длительной прочности при длительности работы 1000 ч и запаса длитель-

ной прочности. Минимальный запас имеет место в средней части лопатки, для которой характерен более высокий уровень температуры.

Замечание. В неравномерно нагретых стержнях опасное сечение — сечение с минимальным запасом прочности — не всегда совпадает с сечением, где имеется максимальное напряжение.

Связь запаса прочности по напряжениям и запаса прочности по долговечности. В моделях прочностной надежности, связанных с длительной прочностью материала, используется запас прочности по напряжениям (формула (20)) при требуемой длительности работы t.

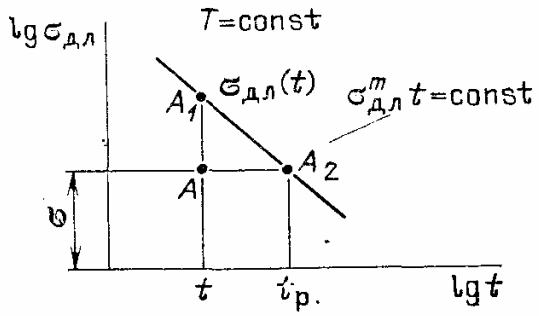


Рис. 6.9. Связь запаса прочности по напряжениям и запаса прочности по долговечности

Для определения запаса прочности по долговечности воспользуемся связью значений пределов длительной прочности и времени работы:

$$\sigma_{дл}^{m}(t)\,t = \text{const}. \tag{21}$$

На рис. 6.9 показана точка A, характеризующая работу материала лопатки (стержня) — напряжение σ и длительность работы t.

Запас прочности по напряжениям

$$n_\sigma = \sigma_{дл}(t)/\sigma, \tag{22}$$

запас прочности по длительности работы (долговечности)

$$n_t = t_р/t, \tag{23}$$

где $t_р$ — время работы до разрушения при напряжении σ. Так как точки A_1 и A_2 находятся на одной прямой, то

$$\sigma_{дл}^{m}(t)\,t = \sigma^m t_р,$$

и потому

$$\sigma_{дл}^{m}(t)/\sigma^m = t_р/t,$$

или

$$n_t = n_\sigma^m. \tag{24}$$

Так как обычно $m = 6—20$, то запас по долговечности существенно выше запаса прочности по напряжениям.

22. Статически неопределимые задачи растяжения и сжатия стержней

Понятие статической неопределимости. Рассмотрим задачу, показанную на рис. 6.10.

На стержень, оба конца которого приварены к двум недеформирующимся и неподвижным плитам, действует усилие P. Требуется найти распределение усилий и напряжений в стержне.

Система, показанная на рис. 6.10, *а*, статически неопределима в том смысле, что усилие в произвольном сечении z неизвестно и из уравнений статики не может быть определено. Метод сечений (например, сечение стержня плоскостью $z = \text{const}$) не приводит к результату, так как неизвестны усилия, приложенные к отсеченной части.

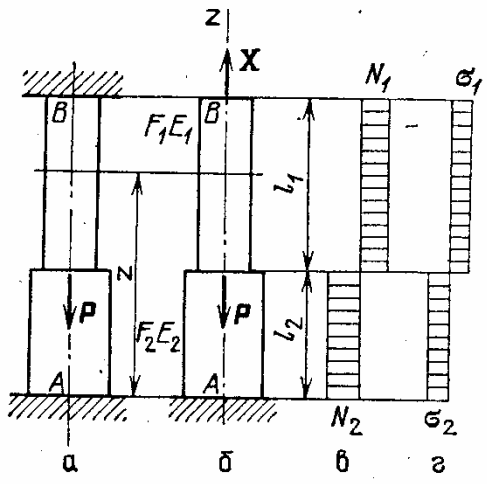


Рис. 6.10. Стержень, жестко заделанный в неподвижной плоскости: *а* — статически неопределимая система; *б* — эквивалентная статически определимая система; *в* — распределение усилий; *г* — распределение напряжений

Задачи сопротивления материалов, в которых уравнений статики недостаточно для определения усилий в стержнях, называются *статически неопределимыми*.

Один из общих методов решения статически неопределимых задач. Метод заключается в последовательном проведении двух процедур.

1. Система освобождения от лишних связей, взамен которых прикладываются неизвестные силовые факторы, т. е. система превращается в статически определимую (формально).

2. Составляются уравнения, дополнительные к статическим, учитывающие действительные условия деформирования элементов системы.

В задаче, показанной на рис. 6.10, на первом этапе отсекаем одну из заделок стержня, например верхнюю, заменяем ее действие неизвестным усилием X. Полученная система (рис. 6.10, *б*) является статически определимой.

Второй этап решения состоит в учете уравнения

$$w_B = 0, \tag{25}$$

что выражает невозможность перемещения точки B в статически неопределимой системе (рис. 6.10, *а*).

Перемещение точки B равно

$$w_B = \frac{Xl_1}{E_1F_1} - \frac{(P - X)\,l_2}{E_2F_2}, \tag{26}$$

так как на первом участке постоянная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{X}{E_1 F_1}, \tag{27}$$

а на втором участке

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = -\frac{P - X}{E_2 F_2}. \tag{28}$$

В последних равенствах F_1, F_2, E_1, E_2 — площади поперечного сечения и модули упругости участков. Из уравнения (25) получаем

$$X = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P, \tag{29}$$

где $\lambda_1 = l_1/(E_1F_1)$, $\lambda_2 = l_2/(E_2F_2)$ — коэффициенты податливости, мм/Н. Величины E_1F_1 и E_2F_2 называются жесткостями сечений стержня на растяжение.

На первом участке действует растягивающее усилие

$$N_1 = X = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P, \tag{30}$$

на втором участке — усилие

$$N_2 = -P + X = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P. \tag{31}$$

Усилие, растягивающее стержень, будем считать положительным, сжимающее — отрицательным (в соответствии с правилом знаком для нормальных напряжений). Распределение усилий и напряжений по длине стержня показано на рис. 6.10, *в* и 6.10, *г*.

Величина X по формуле (29) получилась положительной. Это означает, что предварительно выбранное направление неизвестного усилия X (рис. 6.10, *б*) оказалось правильным. Можно было предварительно принять усилие X направленным в другую сторону. Легко проверить, что это не повлияло бы на решение.

Замечание. Рассмотренный метод является общим, применимым для любых статически неопределимых систем. Он называется *методом сил*, так как в качестве неизвестных принимаются усилия. Однако метод отнюдь не является единственным. Существуют и другие, достаточно общие методы, например метод перемещений, которые в некоторых случаях приводят к более простым расчетным схемам.

Прочностная модель болтового соединения. Конструктивная схема болтового соединения — очень важного разъемного соединения во многих конструкциях — показана на рис. 6.11. Промежуточные детали *1*, *2* соединения стягиваются болтом.

Промежуточные детали моделируются эквивалентными по жесткости втулками, имеющими площади поперечных сечений F_1, F_2, модули упругости E_1, E_2.

Болтовые соединения всегда предварительно затягиваются, что, как будет ясно из дальнейшего, уменьшает дополнительную нагруз-

ку на болт. Если усилие затяжки Q_0, то болт растягивается силой Q_0, а промежуточные детали (втулки) сжимаются той же силой.

Теперь допустим, что на соединение начинает действовать основная нагрузка — внешнее растягивающее усилие P, которое прикладывается в опорных сечениях. Ясно, что болт должен получить дополнительную вытяжку, а напряжения сжатия во втулках, созданные при затяжке, должны уменьшиться.

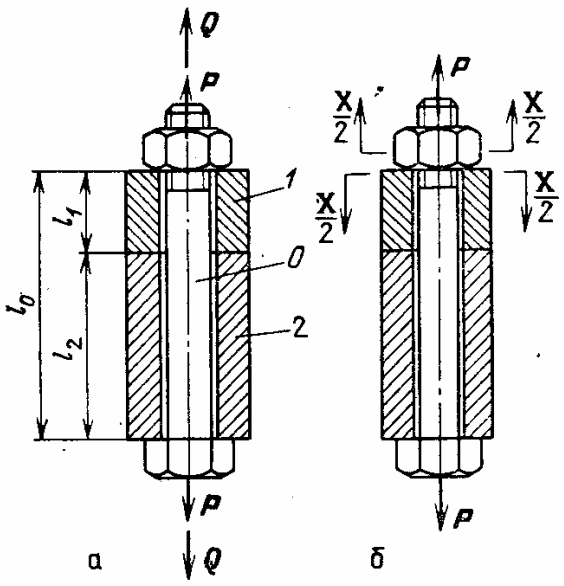


Рис. 6.11. Прочностная модель болтового соединения: *а* — конструктивная схема; *б* — расчетная модель по методу спаянного стыка; *1*, *2* — промежуточные детали соединения; *0* — болт

Будем считать, как это всегда делается на практике, что усилие затяжки превышает основную нагрузку ($Q_0 > P$) и стык деталей не «раскрывается». Тогда при рассмотрении действия внешнего усилия плоскости стыка можно считать «спаянными». Предполагая детали соединения работающими в упругой области, разберем по принципу независимости действия сил отдельно действие внешнего усилия P. Для раскрытия статической неопределимости (неизвестно, какая часть усилия P воспринимается болтом и какая — втулками) проводим сечение на стыке гайки и втулки (не перерезая болт). Обозначая неизвестное усилие X, запишем равенство удлинения болта и втулок в виде

$$(P + X)\frac{l_0}{E_0F_0} = -\frac{Xl_1}{E_1F_1} - \frac{Xl_2}{E_2F_2}, \qquad (32)$$

где l_i, E_i, F_i — длины, модули упругости и площади сечений.

В правую часть равенства (32) входят величины со знаком минус, так как усилие X по рис. 6.11, *б* предполагалось направленным на сжатие втулок. Из равенства (32) находим

$$X = -\frac{P\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}, \qquad (33)$$

где

$$\lambda_i = l_i/(E_iF_i), \quad i = 0,\ 1,\ 2 \qquad (34)$$

— коэффициенты податливости болта и промежуточных деталей.

Знак минус в равенстве (33) означает, что действительное направление X противоположно предварительно выбранному. Допол-

нительное усилие на болт в результате действия усилия P

$$Q_д = P + X = P - \frac{\lambda_0 P}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} P = \chi P, \qquad (35)$$

где $\chi = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$ — коэффициент основной нагрузки.

Общее растягивающее усилие, действующее на болт,

$$Q = Q_0 + \chi P. \qquad (36)$$

Усилие сжатия, приложенное к промежуточным деталям (усилие на стыке),

$$Q_c = -Q_0 + (1 - \chi) P. \qquad (37)$$

Коэффициент основной нагрузки χ зависит от соотношения между податливостью промежуточных деталей и податливостью стержня болта. Для того чтобы усилие на болт при приложении внешней (основной) нагрузки возрастало незначительно, т. е. для уменьшения коэффициента основной нагрузки, надо делать «жесткие фланцы — податливые болты». Это — правило конструирования болтовых соединений, особенно для работающих при переменной нагрузке. При возрастании P может наступить раскрытие стыка ($Q_c > 0$).

Из равенства (37) находим условие потери плотности стыка:

$$P(1 - \chi) \geqslant Q_0. \qquad (38)$$

После раскрытия стыка внешняя нагрузка полностью передается на болт:

$$Q = Q_0 + P. \qquad (39)$$

Вот почему во всех динамически нагруженных конструкциях принимают специальные меры, предотвращающие отворот гаек (специальные контровки, шайбы и т. п.).

Модель прочностной надежности болта при действии статической нагрузки (нагрузки, постоянной по времени)

$$n = \frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} \geqslant [n], \qquad (40)$$

где σ_b — предел прочности материала, σ_{max} — максимальное напряжение в стержне болта.

Допустимый запас прочности при статических нагрузках принимается наибольшим $[n] = 1{,}3—1{,}5$.

Учитывая соотношение (36), находим условие надежности

$$\frac{\pi \sigma_b d_{min}^2}{4(Q_0 + \chi P)} \geqslant [n], \qquad (41)$$

где d_{min} — минимальный диаметр стержня болта.

Модель прочностной надежности болта при действии переменных нагрузок. Допустим, что внешняя нагрузка на болт периодически изменяется от 0 до P. Тогда на болт будет действовать переменная нагрузка, имеющая максимальное и минимальное значения

$$Q_{max} = Q_0 + \chi P, \quad Q_{min} = Q_0. \tag{42}$$

При переменной нагрузке опасными являются места концентрации напряжений. В болте (рис. 6.12) типичными являются три таких места: резьба, выточка и радиус перехода от головки болта к стержню. Особенно опасным является концентрация напряжений в резьбе, для которой (теоретический) коэффициент концентрации $\alpha_\sigma \approx 5$. Цикл переменных напряжений в резьбовой части болта

$$\sigma_{max} = \frac{4Q_{max}}{\pi d_1^2}, \quad \sigma_{min} = \frac{4Q_{min}}{\pi d_1^2}, \tag{43}$$

где d_1 — внутренний диаметр резьбы.

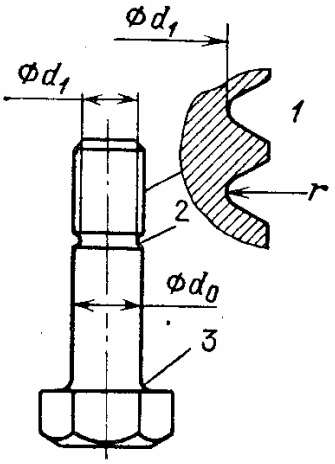


Рис. 6.12. Места концентрации напряжений в болте: *1* — резьба; *2* — выточка; *3* — галтель

В резьбовой части болта действует переменное напряжение (см. разд. 16)

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{2}{\pi d_1^2}\chi P \tag{44}$$

и постоянное напряжение

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) = \frac{2}{\pi d_1^2}(2Q_0 + \chi P) \approx \sigma_0, \tag{45}$$

где $\sigma_0 = \dfrac{4Q_0}{\pi d_1^2}$ — напряжение затяжки.

Отметим, что переменное напряжение в болте пропорционально коэффициенту основной нагрузки. Модель прочностной надежности болта при действии переменных напряжений (модель усталостной прочности) имеет вид

$$n_a \geqslant [n_a], \tag{46}$$

где $[n_a]$ — допустимое значение запаса прочности по переменным напряжениям.

Так как значение коэффициента основной нагрузки определяется приближенно и вследствие значительного рассеяния усталостной прочности при наличии технологических отклонений, принимается $[n_a] \geqslant 4$. Запас прочности по переменным напряжениям равен

$$n_a = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_a}, \tag{47}$$

где $\sigma_{-1д}$ — предел выносливости детали (болта). По равенству (79) гл. 4

$$\sigma_{-1д} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma}\sigma_{-1}, \tag{48}$$

где β и ε — коэффициенты, учитывающие состояние поверхности и масштабный характер.

Эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1), \tag{49}$$

где q — коэффициент чувствительности материала.

Модель усталостной надежности болтового соединения имеет вид

$$\frac{\pi d_1^2 \beta\varepsilon\sigma_{-1}(1 - \sigma_0/\sigma_b)}{2K_\sigma\chi P} \geqslant [n_a]. \tag{50}$$

Повышению усталостной надежности способствует уменьшение коэффициента концентрации напряжений, коэффициента основной нагрузки, увеличение предела выносливости материала.

Приближенные модели термоциклической прочности элемента конструкции. Детали теплонапряженных конструкций часто подвергаются циклам нагревов, причем деформации элемента стеснены

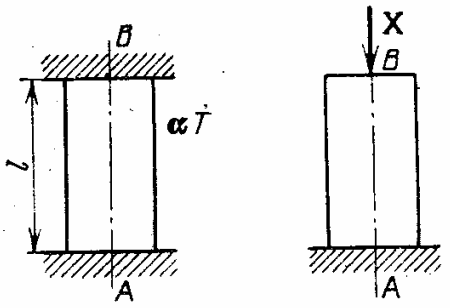


Рис. 6.13. Напряжение и деформации в стержне, закрепленном между двумя жесткими плитами при циклическом нагреве

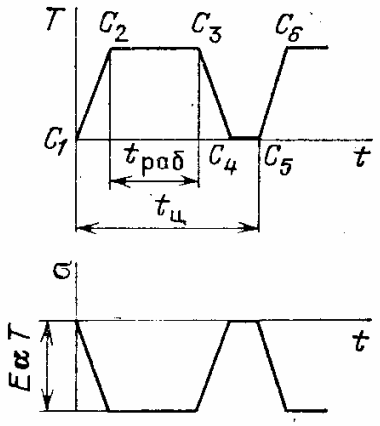


Рис. 6.14. Изменение температуры и температурных напряжений по времени

другими частями конструкции. В таких условиях работают поверхностные слои материала при нестационарных тепловых воздействиях. В качестве типичной модели термоциклической прочности элемента конструкции рассмотрим стержень, закрепленный между двумя жесткими неподвижными и холодными плитами и подвергающийся циклам нагрева до температуры T (рис. 6.13).

Рассмотрим сначала случай, когда температурные напряжения при нагреве не превышают предела текучести материала. Определим напряжение в стержне при нагреве до температуры T.

Для решения задачи отсекаем верхнюю заделку и заменяем ее действие усилием X. Перемещение точки B с учетом температурных деформаций при нагреве

$$w_B = -\frac{Xl}{EF} + \alpha T l = 0, \tag{51}$$

где E — модуль упругости материала; α — коэффициент линейного расширения.

Из соотношения (51) находим температурные напряжения в стержне:

$$\sigma = -E\alpha T. \tag{52}$$

Температурные напряжения пропорциональны модулю упругости материала и коэффициенту линейного расширения. Такое заключение, вытекающее из формулы (52), справедливо и в других, более общих случаях.

Изменение температуры во времени показано на рис. 6.14. Напряжение в стержне изменяется от нуля в точке C_1 до $-E\alpha T$ в точке C_2, далее сохраняется на участке C_2C_3 (ползучесть материала не учитывается) и снова обращается в нуль в конце цикла на участке C_4C_5.

Так как наибольшая (по величине) деформация материала отрицательна, то следует считать

$$\varepsilon_{\max} = 0, \quad \varepsilon_{\min} = -\sigma/E = -\alpha T.$$

Амплитуда цикла деформации

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) = \frac{1}{2}\alpha T. \tag{53}$$

При повторении циклов термических напряжений обычно наиболее опасной является малоцикловая усталость.

Приближенная модель термоциклической прочности элемента конструкции выражается в виде

$$n_{\text{ц}} = \frac{N_{\text{р}}^*}{N_{\text{ц}}} \geqslant [n_{\text{ц}}], \tag{54}$$

где $n_{\text{ц}}$ — запас по числу циклов, $N_{\text{р}}^*$ — среднее число циклов до разрушения, $N_{\text{ц}}$ — число циклов за ресурс изделия. Необходимый запас по числу циклов

$$[n_{\text{ц}}] \geqslant 5. \tag{55}$$

Высокие значения $[n_{\text{ц}}]$ принимаются главным образом для учета рассеяния малоцикловой прочности и сильного влияния параметров нагружения на долговечность.

Величина $N_{\text{р}}$ определяется из уравнения Мансона

$$\frac{1}{2}\alpha T = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N_{\text{р}}^{-0,6} + 1{,}75\frac{\sigma_b}{E} N_{\text{р}}^{-0,12}. \tag{56}$$

При упругих деформациях первым слагаемым можно пренебречь, полагая

$$\alpha T = \frac{3{,}5\sigma_b}{E} N_{\text{р}}^{-0{,}12}.$$

Тогда число циклов до разрушения

$$N_{\text{р}} = \left(\frac{3{,}5\sigma_b}{E\alpha T}\right)^{1/0{,}12}. \tag{57}$$

Модель термоциклической прочности при повторных нагревах (соотношения (54) и (57)) имеет вид

$$n_{\text{ц}} = \frac{1}{N_{\text{ц}}}\left(\frac{3{,}5\sigma_b}{E\alpha T}\right)^{8{,}3} \geqslant [n_{\text{ц}}]. \tag{58}$$

Влияние параметров модели термоциклической прочности на запас по числу циклов. Запас по числу циклов нагревов (формула (58)) зависит от ряда параметров:

$$n_{\text{ц}} = F(N_{\text{ц}},\ \sigma_b,\ E,\ \alpha,\ T), \tag{59}$$

каждый из которых известен при разработке конструкции с определенной точностью.

Оценим относительное влияние параметров. Рассмотрим сначала вопрос в общем виде, предполагая, что имеется функция параметров x и y следующего вида:

$$F = Cx^m y^n. \tag{60}$$

Тогда по правилу дифференцирования функции многих переменных

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Cmx^{m-1}y^n dx + Cnx^m y^{n-1}dy.$$

Разделив обе части равенства на F, найдем

$$\frac{dF}{F} = m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y}. \tag{61}$$

Для малых относительных приращений

$$\frac{\Delta F}{F} = m\frac{\Delta x}{x} + n\frac{\Delta y}{y}. \tag{62}$$

Последнее соотношение имеет четкий физический смысл: 1% отклонения параметра x дает m % отклонения величины F; 1% отклонения параметра y дает n% указанного отклонения.

Применяя этот прием для анализа зависимости (58), находим

$$\frac{\Delta n_{\text{ц}}}{n_{\text{ц}}} = -\frac{\Delta N_{\text{ц}}}{N_{\text{ц}}} + 8{,}3\left(\frac{\Delta\sigma_b}{\sigma_b} - \frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta(\alpha T)}{\alpha T}\right). \tag{63}$$

Знак минус перед отдельными слагаемыми означает, что приращение параметра вызывает уменьшение запаса числа циклов $n_{\text{ц}}$.

С помощью зависимости (63) устанавливаем, например, что погрешность в определении температуры нагрева на 1% вызывает погрешность 8,3% запаса по долговечности.

Учет ползучести материала при определении температурных напряжений. На рис. 6.14 показано изменение температурных напряжений при циклическом изменении температуры без учета ползу-

чести материала. Рассмотрим теперь влияние ползучести на температурные напряжения в стержне с заделанными концевыми сечениями (см. рис. 6.13).

Будем считать в начальный момент времени

$$\sigma(0) = -E\alpha T. \tag{64}$$

Далее следует учесть, что в любой момент времени сумма упругой деформации $\varepsilon_e(t)$, деформации ползучести $\varepsilon_c(t)$ и температурной деформации справедливо уравнение

$$\varepsilon_e(t) + \varepsilon_c(t) + \alpha T = 0, \tag{65}$$

так как расстояние между заделками и температура не изменяются. Упругая деформация

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E}. \tag{66}$$

Дифференцируя по времени зависимость (65) и учитывая, что температура после нагрева остается постоянной, находим

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dE} + \frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = 0. \tag{67}$$

Пренебрегая неустановившейся стадией ползучести, примем для скорости ползучести степенную зависимость (см. разд. 20)

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = V = B\sigma^n, \tag{68}$$

где B, n — параметры материала.

Теперь из соотношения (67) получаем

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} = -B\sigma^n, \quad \frac{1}{BE}\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -dt. \tag{69}$$

Интегрируя в пределах от 0 до t, найдем

$$\frac{1}{(n-1)BE}\left[\sigma^{1-n}(t) - \sigma^{1-n}(0)\right] = t. \tag{70}$$

Учитывая, что в практических случаях $n > 1$, запишем последнее равенство так:

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{\sigma^{n-1}(0)} + (n-1)BEt}}, \tag{71}$$

или

$$\sigma(t) = \frac{\sigma(0)}{\sqrt[n-1]{1+at}}, \tag{72}$$

где $a = (n-1)BE\sigma^{n-1}(0)$. Значение $\sigma(0)$ определяется равенством (64).

С увеличением времени t абсолютная величина температурного напряжения в результате влияния ползучести падает. Этот процесс называется *релаксацией температурных напряжений.*

Деформация ползучести представляет собой остаточную деформацию. Из уравнения (65) можно получить

$$\varepsilon_c(t) = -\frac{\sigma(t)}{E} - \alpha T.$$

Если в момент времени t снять нагрев, то в стержне возникает остаточное напряжение растяжения

$$\sigma_{ост} = -E\varepsilon_c(t), \tag{73}$$

так как длина стержня должна оставаться неизменной, а материал стержня в результате ползучести получил остаточную деформацию сжатия $\varepsilon_c(t)$. В силу образования остаточных деформаций ползучести температурные напряжения сжатия в момент нагрева все время падают, а в период останова в стержне появляются растягивающие остаточные напряжения.

23. Стержневые системы (фермы)

Вводные замечания. В различного рода конструкциях (подмоторных рамах двигателей, пространственных конструкциях крепления корпусов, отсеков и т. п.), в подъемно-транспортных сооружениях (кранах, подъемниках), в строительных конструкциях (мостах,

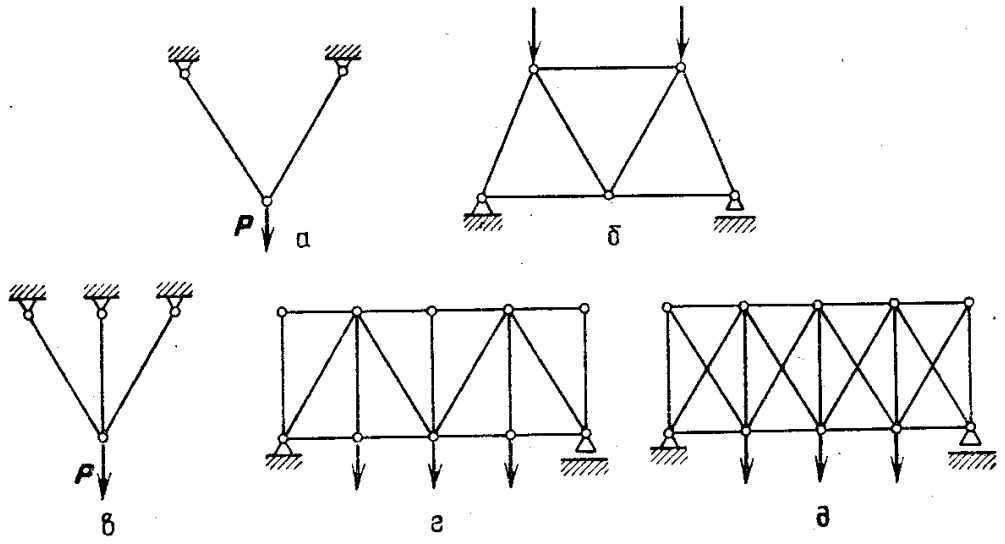


Рис. 6.15. Системы стержней

перекрытиях, каркасах, и т. д.) часто используются стержневые системы (фермы), в которых стержни работают на растяжение или сжатие. На рис. 6.15 представлены некоторые типы стержневых систем. Наклонные стержни фермы часто называют раскосами, подкосами, тягами; вертикальные стержни — стойками; горизонтальные стержни — поперечинами (траверсами).

Фермы бывают *плоскими* и *пространственными*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских ферм.

Для того чтобы стержни передавали усилия, направленные вдоль оси, соединения стержней должны быть шарнирными, т. е. допускать относительный поворот. На рис. 6.16 приведена конструктивная схема шарнирного соединения. Предполагается, что трение в

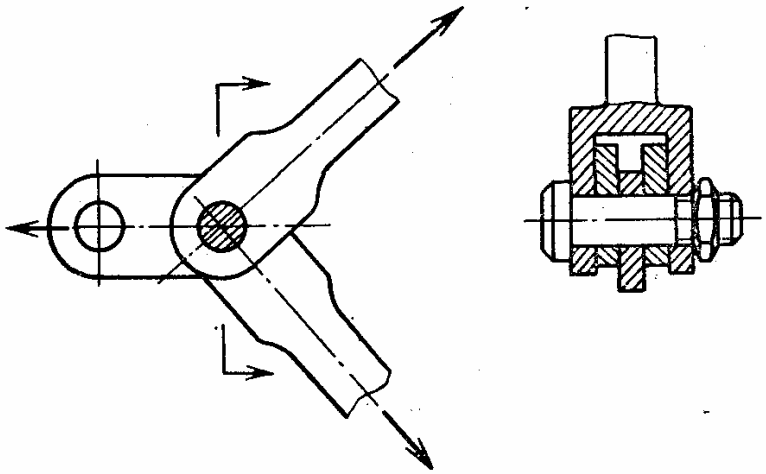


Рис. 6.16. Конструктивная схема шарнирного соединения стержней

шарнире пренебрежимо мало. Если стержень имеет два шарнирных конца и поперечная нагрузка на стержень отсутствует, то из условия его равновесия немедленно следует, что усилие на стержень

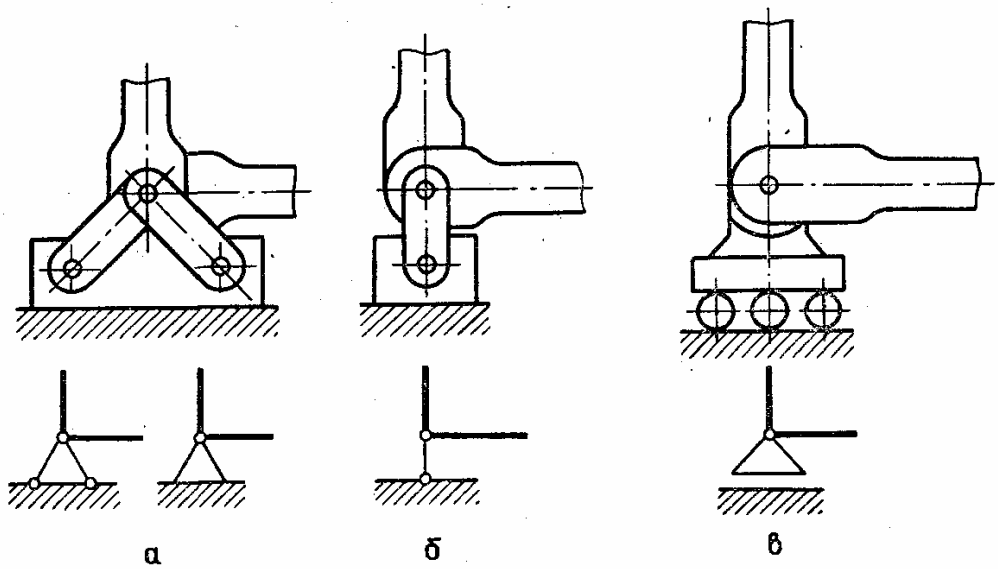


Рис. 6.17. Схемы опорных узлов фермы и их условное обозначение: *а* — опорный узел, не допускающий смещений; *б*, *в* — опорный узел, допускающий смещение в одном (горизонтальном) направлении

действует вдоль его оси. Внешние силы, действующие на фермы, приложены в узлах. Узлами называются точки соединения стержней. Собственный вес стержней обычно значительно меньше внешних нагрузок и при расчете не учитывается. Фермы в большинстве

случаев имеют несколько узлов, опирающихся на другие элементы конструкции или на фундамент.

Опорные узлы предполагаются шарнирными, причем закрепление опорных узлов должно допускать свободное температурное расширение стержней фермы. Схемы опорных узлов и их условные обозначения приведены на рис. 6.17.

Замечание. Узлы фермы часто выполняют с помощью сварки (рис. 6.18). Определение усилий в стержнях в предположении шарнирного соединения узлов является в таком случае приближенным. Для длинных стержней погрешность приближения невелика.

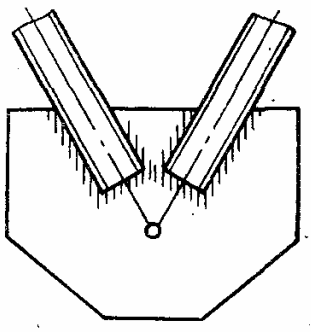


Рис. 6.18. Схема сварного узла

Статически определимые фермы. В статически определимых фермах усилия в стержнях полностью определяются условиями равновесия. На рис. 6.15 такими фермами являются фермы *а*, *б*, *г*; фермы *в*, *д* на рис. 6.15 статически неопределимые. В дальнейшем будет указано правило, позволяющее сразу определить статическую определимость или неопределимость фермы.

Расчет статически определимых ферм проводится методом сечений, сущность которого поясним несколькими примерами.

Пример 1. Двухраскосная ферма (рис. 6.19) с одинаковыми стержнями. Проводим сечение, вырезающее узел A, заменяем внутренние силы усилия-

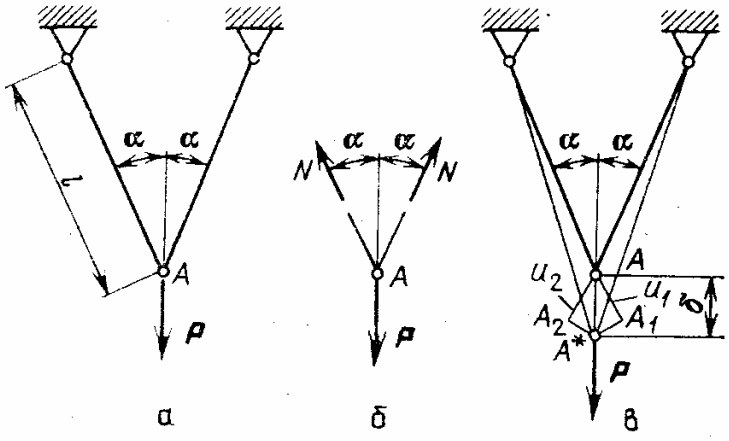


Рис. 6.19. Определение усилий в двухраскосной ферме: *а* — расчетная схема; *б* — равновесие узла; *в* — определение перемещений

ми N в стержнях и рассматриваем условие равновесия узла A

$$2N\cos\alpha = P, \tag{74}$$

откуда усилие в стержнях

$$N = \frac{P}{2\cos\alpha}. \tag{75}$$

Заметим, что при $\alpha \to \pi/2$ $N \to \infty$. Знак плюс в формуле (75) означает, что предварительно выбранное направление усилий оказалось правильным.

В некоторых случаях может понадобиться значение перемещения точки A Удлинение стержня составит

$$u_1 = u_2 = u = \frac{Nl}{EF} = \frac{Pl}{2\cos\alpha EF}, \tag{76}$$

где EF — жесткость сечения стержня на растяжение.

Положение точки A после нагружения можно найти, если провести две дуги радиусом $l + u$, приняв в качестве центров опорные узлы. Так как деформации малы, то достаточно отложить отрезки на оси стержня и восставить перпендикуляры из точек A_1 и A_2 (см. рис. 6.19). Это правило можно сформулировать так: удлинение (или укорочение) стержня равно проекции перемещения конца стержня на первоначальное направление оси. В общем случае следует составить разность проекций перемещений концов стержня (если оба конца подвижны). Таким образом, перемещение точки A равно

$$\delta = \frac{u}{\cos\alpha} = \frac{Pl}{2\cos^2\alpha EF}.$$

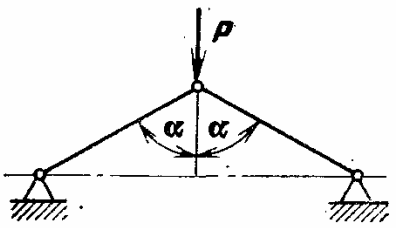


Рис. 6.20. Явление «распор» в стержнях

Замечание. На рис. 6.20 показана двухраскосная ферма, работающая в «распор». Усилия в стержнях очень велики, если угол α близок $\pi/2$.

Избегайте в конструкциях стержней, работающих в «распор»!

Пример 2. Треугольная ферма (рис. 6.21). Расчет фермы начнем с определения реакций опор.

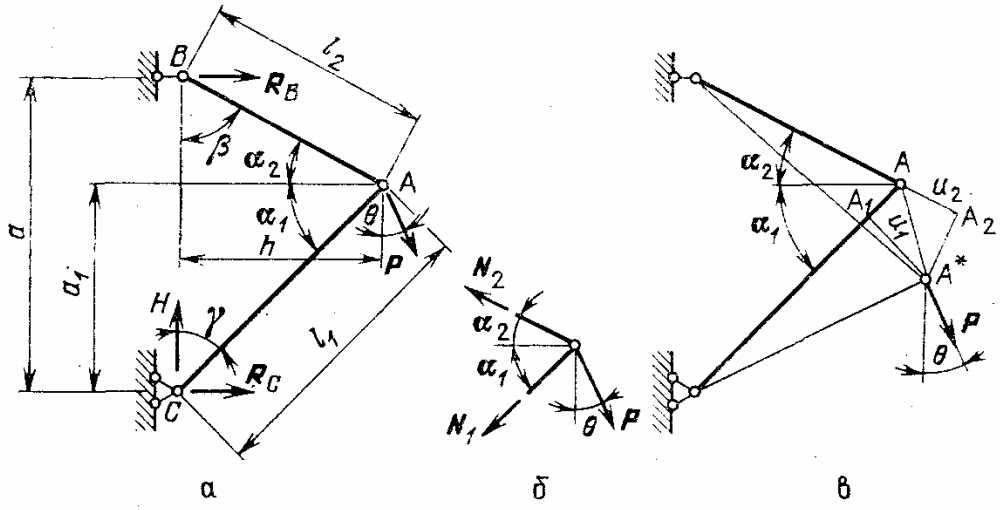


Рис. 6.21. Треугольная ферма: *а* — расчетная схема; *б* — равновесие узла A; *в* — определение перемещений точки A

В точке B действует реакция опоры R_B, в точке C — реактивные усилия H и R_C. По отношению к ферме реактивные усилия следует рассматривать как внешние нагрузки.

Проектируя все силы на горизонтальное и вертикальное направления, находим

$$R_C + R_B + P\sin\theta = 0, \quad H - P\cos\theta = 0. \tag{77}$$

Из условия равенства нулю момента относительно какой-либо точки, например точки C, получаем

$$R_B a + Ph\cos\theta + Pa_1\sin\theta = 0. \tag{78}$$

Из приведенных общих уравнений равновесия фермы (77) и (78) следует

$$R_B = -P\left(\frac{h}{a}\cos\theta + \frac{a_1}{a}\sin\theta\right), \quad R_C = \left[\frac{h}{a}\cos\theta + \left(\frac{a_1}{a} - 1\right)\sin\theta\right]P.$$

Методом сечения выделим узел A и рассмотрим условия его равновесия. Приравнивая нулю сумму проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} -N_1\cos\alpha_1 - N_2\cos\alpha_2 + P\sin\theta &= 0, \\ -N_1\sin\alpha_1 + N_2\sin\alpha_2 - P\cos\theta &= 0. \end{aligned} \tag{79}$$

Из последних соотношений находим

$$N_1 = -P\frac{\cos(\alpha_2+\theta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad N_2 = P\frac{\cos(\alpha_1-\theta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{80}$$

Соотношения (80) можно получить и проще, спроектировав усилия, приложенные к A, на направления, перпендикулярные N_1 и N_2. Проекции полного смещения точки A на направления стержней (удлинения стержней)

$$u_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad u_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}, \tag{81}$$

где l_i, E_iF_i — длины и жесткости стержней.

Восставив перпендикуляры из точек A_1 и A_2, найдем на их пересечении точку A^*, в которой окажется узел A после приложения нагрузки.

На рис. 6.22 дана картина перемещения точки A. Проекция полного перемещения δ на ось первого стержня показана с учетом его действительного знака по равенству (81). Отрезки $A_1A^* = v_1$ и $A_2A^* = v_2$ легко определяются, если спроектировать отрезок $AA^* = \delta$ на направления стержней:

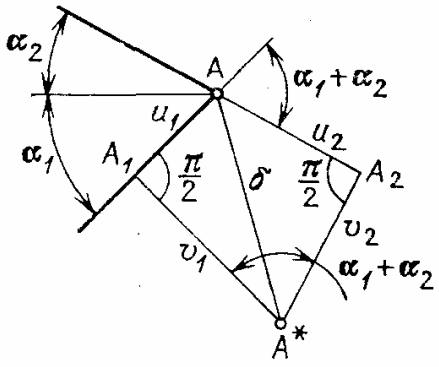


Рис. 6.22. Картина перемещений точки A

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_2\cos(\alpha_1+\alpha_2) + v_2\sin(\alpha_1+\alpha_2), \\ u_2 &= -u_1\cos(\alpha_1+\alpha_2) + v_1\sin(\alpha_1+\alpha_2). \end{aligned} \tag{82}$$

Так как значения u_1 и u_2 известны, то становятся известными значения v_1 и v_2 и величина

$$\delta = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}. \tag{83}$$

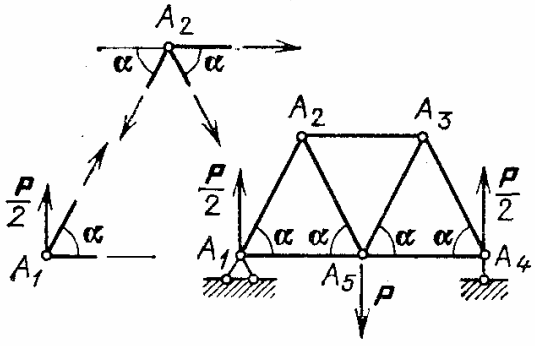


Рис. 6.23. Ферма из равнобедренных треугольников

Пример 3. Ферма составлена из равнобедренных треугольников (рис. 6.23). При большом числе узлов и стержней полезно установить общее правило для их обозначения. Будем обозначать узлы A_1, A_2, ... в порядке обхода контура по часовой стрелке.

Обозначения усилий в стержнях составим из номеров узлов, которые они соединяют: $N_{1,2}$, $N_{2,5}$ ...; номера узлов разделяются запятой, так как возможны многоразрядные номера.

Расчет начинается с определения усилий в опорных узлах. Они составляют $P/2$ (рис. 6.23). Далее удобно рассмотреть условия равновесия узла, к которому подходят не более двух стержней (например, узла A_1).

Из условия равновесия узла A_1 (неизвестные усилия считаем направленными на растяжение стержней) получаем

$$N_{1,2}\sin\alpha+\frac{1}{2}P=0,\quad N_{1,2}\cos\alpha+N_{1,5}=0,$$

откуда

$$N_{1,2}=-\frac{1}{2\sin\alpha}P,\quad N_{1,5}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}P. \tag{84}$$

Условия равновесия узла A_2 дают

$$-N_{1,2}\sin\alpha-N_{2,5}\sin\alpha=0,\quad (N_{2,5}-N_{1,2})\cos\alpha+N_{2,3}=0.$$

Учитывая соотношения (84), получаем

$$N_{2,5}=\frac{1}{2\sin\alpha}P,\quad N_{2,3}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}P.$$

Окончательные результаты имеют вид

$$\begin{aligned}N_{1,2}&=N_{3,4}=-\frac{1}{2\sin\alpha}P,\\ N_{2,3}&=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}P,\\ N_{4,5}&=N_{1,5}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}P,\\ N_{2,5}&=N_{3,5}=\frac{1}{2\sin\alpha}P.\end{aligned} \tag{85}$$

Объясните, почему стержень 2, 3 оказался сжатым!

Общие замечания о статически определимых фермах и сопоставление со статически неопределимыми. В статически определимых системах стержней (фермах) усилие, приходящееся на стержень, не зависит от размеров его поперечного сечения и физических свойств материала. Следовательно, усилия будут одинаковыми при упругих и пластических деформациях материала, при его ползучести и т. п.

При разрушении одного из стержней разрушается сразу вся статически определимая система, которая превращается после этого в механизм. Вместе с тем в таких фермах получаются вполне определенные значения усилий в стержнях; отсутствуют начальные (монтажные) и температурные напряжения.

В статически неопределимых системах размеры сечения и свойства материала стержней влияют не только на деформации и перемещения, но и на величину усилий в стержнях. В таких системах имеется *резервирование*: при выходе из строя одного из стержней нагрузка передается, как правило, на другие.

Распределение усилий в стержнях статически неопределимой фермы зависит от целого ряда факторов (точности изготовления, начальных и температурных напряжений и т. д.). Оптимальный выбор силовой схемы системы стержней зависит от особенностей конструкции и условий работы. В машиностроении чаще используются статически определимые системы стержней.

Определение статической определимости или неопределимости ферм. В простых случаях удается сразу сделать вывод о характере системы. Например, для системы на рис. 6.15, *а* ясна ее статическая определимость, для системы на рис. 6.15, *в* — неопределимость. Для ферм на рис. 6.15, *б*, *г* и *д* решение подобного вопроса требует специального анализа.

Остановимся сначала на условиях закрепления.

Если реакции (усилия) в опорах фермы от внешних сил могут быть определены из условий равновесия, то закрепление называется *статически определимым*. Так как опоры являются шарнирными, то они могут воспринимать только силы и не могут воспринимать моменты (отсутствуют «плечи» для уравновешивания).

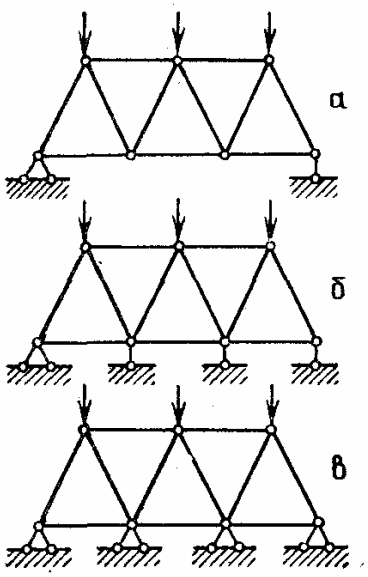


Рис. 6.24. Статическая определимость закрепления фермы

В зависимости от структуры опора уравновешивает силу произвольного направления (см. рис. 6.17, *а*) или только одного направления (рис. 6.17, *б*). В первом случае опора обладает двумя связями (двумя «стерженьками»), во втором — одной связью (одним «стерженьком»).

Как известно, плоская система сил может быть уравновешена силами в двух точках плоскости. Одна из точек должна иметь возможность воспринять силу произвольного направления, вторая — силу, создающую момент относительно другой точки. Следовательно, статически определимое закрепление фермы при плоской системе сил осуществляется двумя опорами, одна из которых воспринимает силу произвольного направления.

На рис. 6.24, *а* показана ферма со статически определимыми опорами. Она имеет три опорные связи (три опорных стержня). На рис. 6.24, *б* имеются в опорных узлах две дополнительные связи (система два раза статически неопределима по опорным узлам). Ферма на рис. 6.24, *в* по условиям закрепления 5 раз статически неопределима (имеет 5 «лишних» опорных стержней).

Замечание. Статическая определимость закрепления определяется числом связей в опорах. Для плоской фермы оно должно быть равно трем, так как имеются три условия равновесия плоской системы сил (равенство нулю двух проекций равнодействующей внешней системы сил и равенство нулю момента относительно произвольной точки). Однако имеется один исключительный случай, когда при трех связях (в двух точках) уравнения равновесия не могут быть удовлетворены. Такое закрепление называется мгновенно изменяемым. Оно характеризуется тем, что в точке закрепления с одной связью направление связи проходит через другую точку закрепления, и поэтому опоры не могут воспринимать момент от внешних сил. Такая конструкция неработоспособна! Закрепление называется мгновенно изменяемым, так как после

некоторого довольно значительного поворота включится в работу имеющаяся связь и движение фермы остановится.

Установление степени статической неопределимости ферм. В основе конструкции всякой фермы лежит ячейка в виде треугольника как геометрически неизменяемой конфигурации с шарнирными узлами. Каждый новый узел в статически определимой форме присоединяется двумя стержнями.

При статически определимом закреплении число стержней c и число узлов n в статически определимой ферме связаны соотношением

$$c = 2n - 3. \tag{86}$$

В число узлов n входят и опорные узлы. Например, ферма на рис. 6.23 имеет 5 узлов и 7 стержней и условие статической определимости (86) соблюдается: $7 = 2 \cdot 5 - 3$. При $c > 2n - 3$ система шарнирно связанных стержней статически неопределима, при $c < 2n - 3$ система превращается в механизм (имеет свободное движение).

Для фермы со статически неопределимым закреплением опорных узлов условие статической определимости всей конструкции

$$c = 2n - 3 - r, \tag{87}$$

где r — число статической неопределимости или число «лишних» связей в опорном закреплении. Например, для системы стержней на рис. 6.15, *а* $r = 1$, $c = 2$, $n = 3$. Условие (87) удовлетворяется:

$$2 = 2 \cdot 3 - 3 - 1.$$

Будем условно называть степенью статической неопределимости системы стержней число «лишних» связей (стержней) в системе. Обозначая степень статической неопределимости R, получим с помощью равенства (87)

$$R = c - 2n + 3 + r. \tag{88}$$

Для системы, показанной на рис. 6.15, *в*,

$$R = 3 - 2 \cdot 4 + 3 + 3 = 1. \tag{89}$$

Степень статической неопределимости R показывает, что удаление R стержней из системы делает ее статически определимой.

24. Статически неопределимые стержневые системы

Вводные замечания. Всякое деформируемое тело при определении в нем напряжений и деформаций представляет собой в общем случае статически неопределимую систему, так как уравнений статики недостаточно для решения задачи.

Статически неопределимые стержневые системы являются простейшими моделями общих задач механики деформируемого тела.

Они позволяют выявить закономерности поведения элементов конструкции в рабочих условиях при работе материала в упругой области при возникновении пластичности и ползучести, температурных напряжений и т. д. Однако не только методические соображения делают полезным изучение статически неопределимых стержневых систем — они встречаются на практике в различного рода машинах и сооружениях.

Особенности поведения статически неопределимых систем разберем на примере трехстержневой системы.

Трехстержневая система. Работа в упругой области. Модель надежности по допускаемым напряжениям. Система показана на рис. 6.25. Усилие P воспринимается тремя стержнями, причем крайние стержни одинаковые. Требуется определить при работе материала в упругой области усилия и напряжения в стержнях и

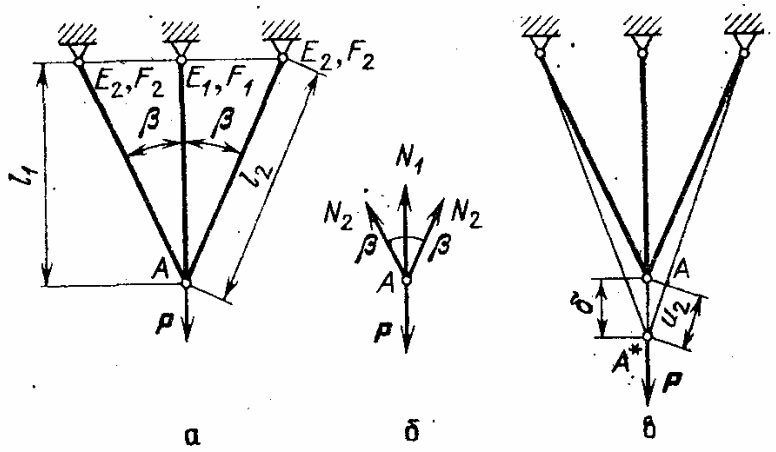


Рис. 6.25. Трехстержневая система

построить модель прочностной надежности системы. Статические уравнения задачи представляют собой условие равновесия узла A (рис. 6.25, *б*):

$$N_1 + 2N_2 \cos\beta = P, \tag{90}$$

где N_1, N_2 — усилия в стержнях. Геометрические уравнения связывают перемещение точки A и удлинение стержней:

$$u_1 = \delta, \tag{91}$$

$$u_2 = \delta \cos\beta, \tag{92}$$

где δ — перемещение точки A в результате действия усилия P. Из последних уравнений вытекает равенство

$$u_2 = u_1 \cos\beta. \tag{93}$$

Условие (93) представляет собой условие совместности перемещений стержней в узле A.

Деформации в стержнях связаны соотношением

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cos^2\beta, \tag{94}$$

так как

$$l_1 = l_2 \cos\beta. \tag{95}$$

Физические уравнения выражают работу материала стержней в упругой области (см. гл. 5):

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1, \tag{96}$$

$$\varepsilon_2 = \sigma_2/E_2, \tag{97}$$

где ε_i, σ_i, E_i $(i = 1, 2)$ — деформация, напряжение, модуль упругости.

Так как

$$\varepsilon_1 = u_1/l_1, \quad \varepsilon_2 = u_2/l_2, \quad \sigma_1 = N_1/F_1, \quad \sigma_2 = N_2/F_2, \tag{98}$$

находим перемещения концов стержней:

$$u_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \tag{99}$$

$$u_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}. \tag{100}$$

Соотношения (90)—(92), (94) и (98) образуют систему линейных уравнений, которая легко решается относительно перемещений u_1 и u_2 или усилий (напряжений).

При решении задачи «в перемещениях» усилия N_1 и N_2 в уравнении равновесия выражают через удлинения стержней. Из уравнений (99) и (100) получаем

$$N_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1} u_1, \tag{101}$$

$$N_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2} u_2. \tag{102}$$

Внося значения N_1 и N_2 в соотношение (90) и учитывая зависимость (93), получаем

$$\frac{E_1 F_1}{l_1} u_1 + 2\cos\beta \frac{E_2 F_2}{l_2} u_1 \cos\beta = P. \tag{103}$$

Из последнего соотношения находим

$$u_1 = \frac{P}{\dfrac{E_1 F_1}{l_1} + 2\cos^2\beta \dfrac{E_2 F_2}{l_2}}. \tag{104}$$

Внося значение u_1 в равенство (101) и учитывая (95), находим

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta \dfrac{E_2 F_2}{E_1 F_1}} = \frac{P}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \tag{105}$$

Из условия (90) следует, что

$$N_2 = (P - N_1)\frac{1}{2\cos\beta} = \frac{\lambda\cos^2\beta P}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \quad (106)$$

В последних соотношениях коэффициент

$$\lambda = \frac{E_2F_2}{E_1F_1} \quad (107)$$

представляет отношение жесткостей сечений стержня. Удлинение центрального стержня

$$u_1 = \delta = \frac{Pl_1}{E_1F_1}\frac{1}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \quad (108)$$

Если модули упругости материала и площади поперечных сечений стержней одинаковы, то $\lambda = 1$.

Для решения задачи «в напряжениях или усилиях» используем уравнение совместности (93), куда вносятся значения u_1 и u_2 из соотношений упругости

$$\frac{N_2l_2}{E_2F_2} = \frac{N_1l_1}{E_1F_1}\cos\beta$$

или

$$N_2 = \lambda N_1\cos^2\beta. \quad (109)$$

Используя уравнение равновесия (90), получим соотношения (105) и (106). В рассматриваемом случае решение задачи в усилиях проще, чем в перемещениях.

Модель надежности по допускаемым напряжениям исходит из условия

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}, \quad (110)$$

где σ_{max} — наибольшее напряжение растяжения; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение; σ_b — предел прочности материала; n_b — запас прочности по пределу прочности.

Так как материалы стержней разные, то допускаемое значение для внешней нагрузки P определяется по условиям прочности отдельных стержней.

Из условия прочности для центрального стержня

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = N_1/F_1 \leqslant \sigma_{b1}/n_b, \quad (111)$$

где σ_{b1} — предел прочности материала центрального стержня. Для боковых стержней условие прочности имеет вид

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = N_2/F_2 \leqslant \sigma_{b2}/n_b, \quad (112)$$

где σ_{b2} — предел прочности материала боковых стержней.

Модель надежности системы будет содержать два условия:

$$P \leqslant \frac{\sigma_{b1} F_1}{n_b} (1 + 2\lambda \cos^2\beta), \tag{113}$$

$$P \leqslant \frac{\sigma_{b2} F_2}{n_b} \frac{1 + 2\lambda \cos^3\beta}{\lambda \cos^2\beta}. \tag{114}$$

Неравенства (113) и (114) вытекают из (111) и (112), если учесть соотношения (105) и (106).

По условиям надежности ограничение величины усилия P определяется наиболее слабым звеном системы, т. е. минимальным значением P.

Если площади сечений и материалы стержней одинаковы ($F_1 = F_2 = F$, $E_1 = E_2 = E$), надежность лимитируется центральным стержнем:

$$P \leqslant \frac{\sigma_b F}{n_b} (1 + 2\cos^3\beta). \tag{115}$$

В некоторых случаях запас прочности определяют относительно предела текучести σ_T. Тогда модель надежности приобретает следующий вид:

$$P \leqslant \frac{\sigma_{T1} F_1}{n_T} (1 + 2\lambda \cos^3 \beta), \tag{116}$$

$$P \leqslant \frac{\sigma_{T2} F_2}{n_T} \frac{(1 + 2\lambda \cos^3\beta)}{\lambda \cos^2\beta}, \tag{117}$$

где n_T — запас прочности по пределу текучести.

Анализ работы конструкции в упругой области проведем для случая стержней с одинаковой площадью поперечного сечения и выполненных из одного материала ($\lambda = 1$). Из формулы (109) сразу следует

$$N_2 = N_1 \cos^2 \beta.$$

Центральный стержень под действием усилия P (см. рис. 6.26) загружен существенно больше боковых. Например, при $\beta = 45°$

$$N_2 = 0{,}5N_1.$$

Это объясняется тем, что удлинение центрального стержня больше удлинений боковых ($u_1 > u_2$), а деформация еще больше, так как $l_2 > l_1$. При $\beta = \pi/4$ центральный стержень воспринимает больше половины всей нагрузки:

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{P}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}59P.$$

С точки зрения оптимального проектирования целесообразно принять $\beta = 0$ (рис. 6.26), и тогда $N_1 = N_2 = N_3 = P/3$. Такое решение

является оптимальным, если на систему не могут действовать случайные (нерасчетные) усилия, имеющие составляющие, перпендикулярные оси стержней.

Замечание. При создании инженерных конструкций необходимо учесть все возможные внешние силы не только в рабочих условиях, но и при транспортировке, монтаже и т. п.

Здравый смысл, жизненный опыт крайне необходимы при проектировании!

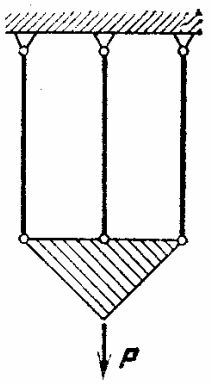


Рис. 6.26. Трехстержневая система при $\beta = 0$

Работа статически неопределимой системы после возникновения пластических деформаций. Продолжим рассмотрение трехстержневой системы (см. рис. 6.25). Напряжение в центральном стержне в упругой области

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{F_1}\frac{1}{1+2\lambda\cos^3\beta}. \qquad (118)$$

В боковых стержнях

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{F_2}\frac{\lambda\cos^2\beta}{1+2\lambda\cos^3\beta}. \qquad (119)$$

Примем для материалов стержней схематизированные диаграммы деформирования, показанные на рис. 6.27.

Если при возрастании нагрузки P напряжение σ_1 превысит предел текучести σ_{T1}, то в центральном стержне возникнут пластические деформации; то же самое можно сказать о боковых стержнях, если $\sigma_2 > \sigma_{T2}$.

Рассмотрим приближенное решение, когда упрочнение материала не учитывается (рис. 6.27, *б*). Такое решение пригодно для материалов, у которых значения пределов текучести и прочности

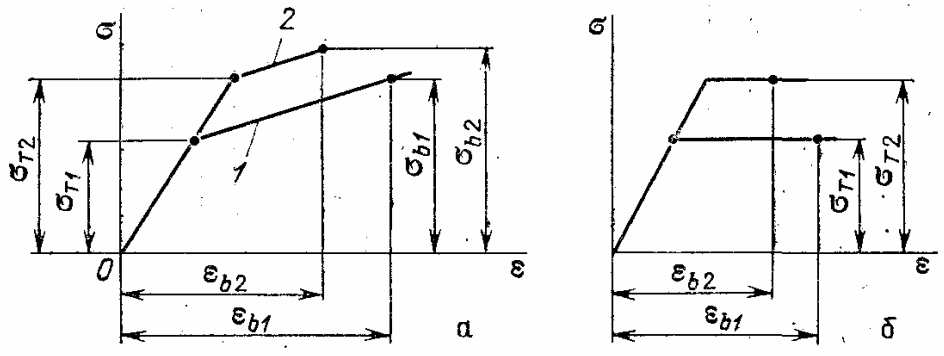


Рис. 6.27. Схематизированные диаграммы деформирования материалов стержней: *а* — диаграмма с учетом упрочнения; *б* — диаграмма без учета упрочнения

близки между собой. Оно применяется и в тех случаях, когда возникновение больших пластических деформаций недопустимо, а материалы имеют незначительное упрочнение на начальном участке

пластического деформирования (типа «площадок» текучести). Предельное значение усилия в центральном стержне

$$N_{1T} = \sigma_{T1} F_1 = P_{1T} \frac{1}{1 + 2\lambda \cos^3 \beta}, \tag{120}$$

где P_{1T} — значение внешней нагрузки, при которой возникает пластичность в центральном стержне (предполагается $\sigma_{T1} \leqslant \sigma_{T2}$). При дальнейшем увеличении нагрузки при $P > P_{1T}$ усилие в стержне *1* остается неизменным, а усилия в боковых стержнях будут возрастать до предельного значения

$$N_{2T} = \sigma_{T2} F_2. \tag{121}$$

Внешнее усилие P при возникновении пластических деформаций во всех стержнях достигает для принятых кривых деформирования (см. рис. 6.27, *б*) предельного значения $P = P_{\text{разр}}$.

Так как в предельном состоянии усилия в стержнях известны, то из условия равновесия имеем

$$P = N_{1T} + 2N_{2T} \cos \beta = \sigma_{T1} F_2 + 2\sigma_{T2} F_2 \cos \beta. \tag{122}$$

Построим зависимость перемещения точки приложения силы (точки A, см. рис. 6.25) от величины P.

На первом этапе деформирования ($P \leqslant P_{1T}$) перемещение определяется соотношениями упругости (формула (104)). Максимальное смещение на первом этапе — точка C_1 на рис. 6.28, *а*.

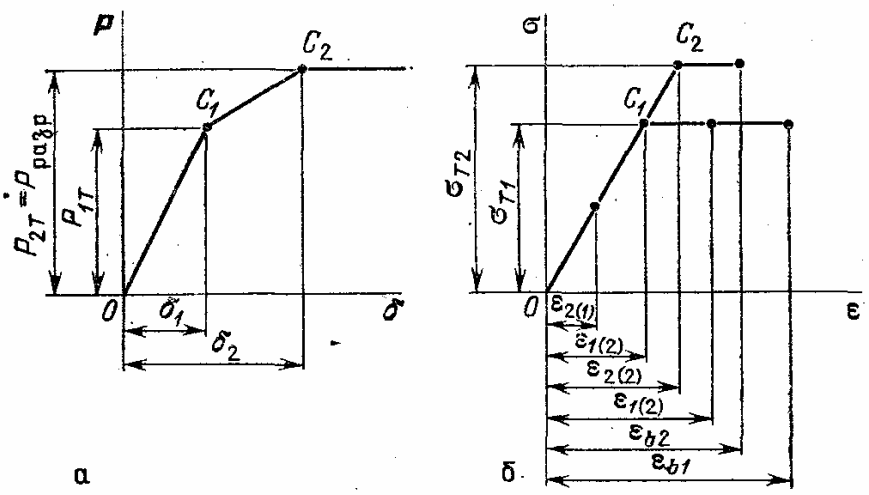


Рис. 6.28. Зависимости усилие — перемещение (*а*) и напряжение — деформация (*б*) для трехстержневой системы

На втором этапе ($P_{1T} < P \leqslant P_{\text{разр}}$) наибольшее смещение будет в точке C_2, когда наступает текучесть в боковых стержнях:

$$\delta_2 = \frac{u_2}{\cos \beta} = \frac{\varepsilon_2 l_2}{\cos \beta} = \frac{\sigma_{T2} l_2}{\cos \beta E_2}.$$

В этот момент исчерпывается несущая способность системы. Даже

при небольшом повышении нагрузки сверх $P_{разр}$ перемещение точки A резко возрастает ($\delta \to \infty$).

В точке C_1 деформация центрального стержня (см. рис. 6.28, *б*)

$$\varepsilon_{1(1)} = \frac{\sigma_{T1}}{E_1}, \quad \varepsilon_{2(1)} = \varepsilon_{1(1)} \cos^2\beta.$$

В точке C_2

$$\varepsilon_{2(2)} = \frac{\sigma_{T2}}{E_2}, \quad \varepsilon_{1(2)} = \frac{\varepsilon_{2(2)}}{\cos^2\beta}.$$

Какой из стержней разрушится раньше при возрастании нагрузки? Это зависит от свойств материалов стержней.

Соотношение между деформациями стержней (94) справедливо в любой момент нагружения.

Если (рис. 6.28, *б*)

$$\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b2}} < \frac{1}{\cos^2\beta},$$

то первым разрушится центральный стержень.

Модель надежности по несущей способности. Несущая способность трехстержневой системы (см. рис. 6.25) исчерпывается, когда нагрузка достигает величины $P_{разр}$.

Модель надежности по предельной нагрузке имеет вид

$$P \leqslant \frac{P_{разр}}{n_н}, \tag{123}$$

где $n_н$ — запас прочности по несущей способности. Для принятых кривых деформирования (без упрочнения) допускаемая нагрузка

$$P \leqslant \frac{1}{n_н}(\sigma_{T1}F_1 + 2\cos\beta\sigma_{T2}F_2). \tag{124}$$

Сопоставление двух моделей надежности. Сопоставим допускаемую нагрузку в моделях надежности по напряжениям и по несущей способности.

Для этого сравним значение P из уравнений (116), (117) и (124) при одинаковой величине запаса прочности ($n_т = n_н$). Предполагая, как и раньше, $E_1 = E_2$, получим из условий (116) и (117)

$$P \leqslant \frac{1}{n_T}(\sigma_{T1}F_1 + 2\cos^3\beta\sigma_{T1}F_2), \tag{125}$$

$$P \leqslant \frac{1}{n_T\cos^2\beta}(\sigma_{T2}F_1 + 2\cos^3\beta\sigma_{T2}F_2). \tag{126}$$

При $\sigma_{T1} \leqslant \sigma_{T2}$ определяющим будет условие (125).

Сопоставляя значения P по формулам (124) и (125), при равенстве пределов текучести материалов стержней ($\sigma_{T1} = \sigma_{T2}$) и

равенстве запасов прочности получим

$$\frac{P_{\text{нес.сп}}}{P_{\text{доп.напр}}} = \frac{F_1 + 2\cos\beta F_2}{F_1 + 2\cos^3\beta F_2} \geqslant 1.$$

Допускаемое усилие по несущей способности больше, чем по допускаемым напряжениям. Это понятно, так как модель надежности по допускаемым напряжениям считает опасной нагрузку P, при которой в каком-либо одном элементе системы возникает напряжение, равное пределу текучести. В модели надежности по несущей способности допускаемое усилие определяется при условии, что пластичность охватывает все элементы системы.

Замечание. Не следует думать, что во всех случаях надо применять модель по несущей способности: она эффективна для оценки прочности при действии однократной статической нагрузки.

При циклических нагрузках разрушение наступает в наиболее напряженном элементе конструкции задолго до того, как исчерпывается несущая способность всей конструкции.

Для расчета инженер должен выбирать подходящую модель надежности!

Расчет в упругопластической стадии методом переменных параметров упругости. Метод переменных параметров упругости (см. разд. 19) является общим методом определения напряжений и деформаций при работе конструкции в упругопластической стадии. Покажем применение метода для рассматриваемой трехстержневой

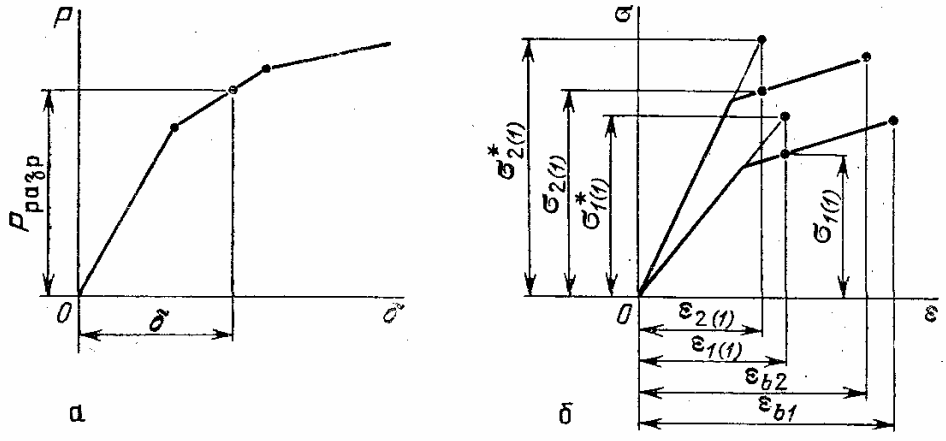


Рис. 6.29. Зависимости усилие — перемещение (*а*) и напряжение — деформация (*б*). Решение методом переменных параметров упругости

системы (см. рис. 6.25) и построим зависимость «усилие — перемещение» при произвольных кривых деформирования (рис. 6.29, *а*).

Пусть задано действующее усилие P и требуется найти напряжения в стержнях и перемещение точки приложения силы. Расчет ведется методом последовательных приближений. В первом приближении материал считается упругим. Из равенств (28) и (29)

находим напряжения первого приближения:

$$\sigma^*_{1(1)} = \frac{P}{F_1}\frac{1}{1+2\lambda_{(1)}\cos^3\beta}, \tag{127}$$

$$\sigma^*_{2(1)} = \frac{P}{F_2}\frac{\lambda_{(1)}\cos^2\beta}{1+2\lambda_{(1)}\cos^3\beta}, \tag{128}$$

где

$$\lambda_{(1)} = \frac{E_2F_2}{E_1F_1}.$$

На кривых деформирования напряжениям $\sigma^*_{1(1)}$ и $\sigma^*_{2(1)}$ соответствуют деформации $\varepsilon_{1(1)}$ и $\varepsilon_{2(1)}$ (см. рис. 6.29, *б*) и напряжения $\sigma_{1(1)}$ и $\sigma_{2(1)}$. Во втором приближении рассматривается снова упругая конструкция, имеющая параметры упругости

$$E_1 = E_{1c(1)} = \frac{\sigma_{1(1)}}{\varepsilon_{1(1)}}, \quad E_2 = E_{2c(1)} = \frac{\sigma_{2(1)}}{\varepsilon_{2(1)}}.$$

Напряжения в стержнях во втором приближении равны

$$\sigma^*_{1(2)} = \frac{P}{F_1}\frac{1}{1+2\lambda_{(2)}\cos^3\beta}, \tag{129}$$

$$\sigma^*_{2(2)} = \frac{P}{F_2}\frac{\lambda_{(2)}\cos^2\beta}{1+2\lambda_{(2)}\cos^3\beta}, \tag{130}$$

где

$$\lambda_{(2)} = \frac{E_{2c(1)}F_2}{E_{1c(1)}F_1}.$$

Процесс продолжается до n-го приближения, когда $\sigma^*_{1(n)} \approx \sigma_{1(n)}$ и $\sigma^*_{2(n)} \approx \sigma_{2(n)}$. Обычно это достигается после трех-четырех приближений. После определения $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{1(n)}$ находят $\delta = \varepsilon_1 l_1$ и получается точка (P, δ) (см. рис. 6.29, *а*).

25. Гибкие нити

В современных конструкциях часто используются в качестве несущих элементов гибкие нити (мосты, перекрытия, подвесные дороги, расчалки, детали из композиционных материалов и т. п.). Это связано с тем, что в гибких нитях осуществляется наиболее полное использование механических свойств материала. Модели гибких нитей служат для расчета тросов, цепей, струн, ремней, проводов и т. п.

Основные свойства гибких нитей и условия равновесия. Основное свойство гибких нитей — нить работает только на растяжение. Сечение нити не может передавать изгибающий момент (два звена

цепи не сопротивляются взаимному повороту); участок нити не может выдержать сжатие — он будет искривляться. Вместе с тем нить может воспринимать поперечную нагрузку — за счет изменения направления нити (рис. 6.30). Усилие, растягивающее нить,

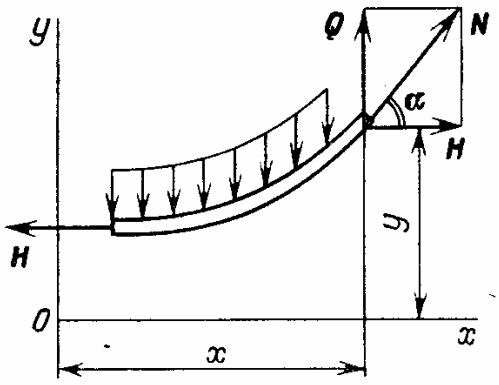


Рис. 6.30. Усилия, действующие в сечении нити

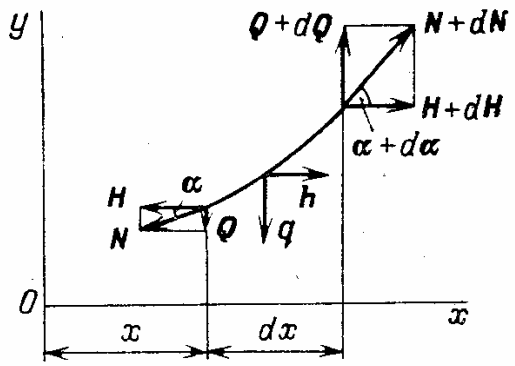


Рис. 6.31. Условия равновесия элемента нити

всегда направлено по касательной к ней (см. рис. 6.30). Это вытекает из того, что сечение нити не может уравновешивать изгибающий момент (каждое сечение нити является шарниром!).

Полное усилие

$$N = \sqrt{Q^2 + H^2}, \tag{131}$$

где Q — поперечная сила (вертикальная составляющая натяжения нити N), H — горизонтальное натяжение (горизонтальная составляющая натяжения нити N).

Из условия равновесия нити сила Q равна алгебраической сумме всех вертикальных сил, приложенных к отсеченной (левой) части нити. Обычно значения силы Q в сечениях нити можно считать известными.

Так как усилие N направлено по касательной к нити, то

$$\operatorname{tg}\alpha = dy/dx = Q/H. \tag{132}$$

Рассмотрим условие равновесия элемента нити (рис. 6.31). Если q и h — составляющие распределенной внешней нагрузки, приложенной к нити, то из условия равновесия участка найдем

$$dQ/dx = q, \tag{133}$$

$$dH/dx = h. \tag{134}$$

Если внешние нагрузки на нить направлены вертикально ($h = 0$), то горизонтальное натяжение H постоянно по длине нити ($H = \text{const}$).

Из уравнений (132) и (133) получается основное уравнение равновесия нити:

$$\frac{d}{dx}\left(H\frac{dy}{dx}\right) = q. \tag{135}$$

По физическому смыслу q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины оси x. Размерность $q = \left[\frac{\text{сила}}{\text{длина}}\right]$ (единицы измерения, например, Н/м, Н/см и т. п.).

Гибкая нить под действием сосредоточенных усилий (рис. 6.32). Предполагается, что собственный вес нити мал по сравнению с приложенными усилиями. На практике встречаются две постановки задачи:

1. Заданы внешние нагрузки и горизонтальное натяжение нити; требуется определить натяжение нити и ее длину.

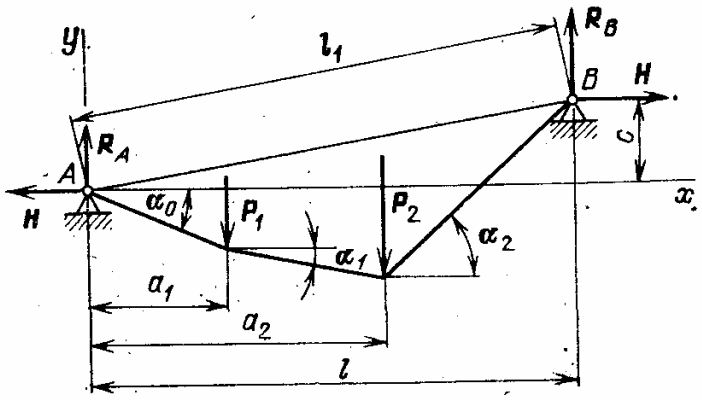


Рис. 6.32. Нить под действием сосредоточенных сил

2. Заданы внешние нагрузки и длина нити L $(L > l_1)$; требуется найти натяжение нити.

Рассмотрим сначала первый вариант и определим реакции R_A и R_B из общих уравнений равновесия (суммы моментов относительно точек A и B равны нулю)

$$R_A = \frac{P_1(l-a_1)}{l} + \frac{P_2(l-a_2)}{l} - H\frac{c}{l}, \tag{136}$$

$$R_B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l} + H\frac{c}{l}. \tag{137}$$

Теперь можно определить перерезывающую силу $Q(x)$ в сечении нити (см. рис. 6.30). Будем иметь

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x < a_1, \quad Q(x) = -R_A, \\ &a_1 \leqslant x < a_2, \quad Q(x) = -R_A + P_1, \\ &a_2 \leqslant x < l, \quad Q(x) = -R_A + P_1 + P_2. \end{aligned} \tag{138}$$

По равенству (132) находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_0 &= -\frac{R_A}{H} = -\frac{P_1}{H}\frac{l-a_1}{l} - \frac{P_2}{H}\frac{l-a_2}{l} + \frac{c}{l}, \\ \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{P_1}{H}\frac{a_1}{l} - \frac{P_2}{H}\frac{l-a_2}{l} + \frac{c}{l}, \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{P_1}{H}\frac{a_1}{l} + \frac{P_2}{H}\frac{a_2}{l} + \frac{c}{l}. \end{aligned} \tag{139}$$

Натяжение нити составит

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x < a_1, \quad & N = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}, \\ a_1 \leqslant x < a_2, \quad & N = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}, \\ a_2 \leqslant x < l, \quad & N = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2}. \end{aligned} \tag{140}$$

Прогибы нити определяются равенством

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{Q(x)}{H}\,dx. \tag{141}$$

Учитывая равенства (139), получим

$$y(a_1) = \operatorname{tg}\alpha_0 a_1 = -\frac{P_1(l-a_1)a_1}{Hl} - \frac{P_2(l-a_2)a_1}{Hl} + c\frac{a_1}{l},$$

$$y(a_2) = -\frac{P_1(l-a_2)a_1}{Hl} - \frac{P_2(l-a_2)a_2}{Hl} + c\frac{a_2}{l}.$$

Если обе опоры находятся на одном уровне ($c = 0$), то прогибы нити обратно пропорциональны величине горизонтального натяжения (распора). При подъеме опоры B на высоту c получается дополнительный прогиб

$$y_д = c\frac{x}{l},$$

не зависящий от H.

Длина нити (деформацией растяжения нити пренебрегаем) равна

$$L = \int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^l \sqrt{1+\frac{Q^2}{H^2}}\,dx. \tag{142}$$

В рассматриваемом случае

$$L = a_1\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0} + (a_2-a_1)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1} + (l-a_2)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2}, \tag{143}$$

где значения $\operatorname{tg}\alpha_0$, $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ определяются равенствами (139).

При решении задачи по второму варианту, когда задана длина нити L и требуется найти H, решение строится методом последовательных приближений. Сначала задаются произвольным значением $H = H_{(1)}$ и находят соответствующую этому значению $L_{(1)}$. Если $L_{(1)} < L$, то выбирают второе приближение: $H_{(2)} < H_{(1)}$, и расчет повторяется. Задачу можно решить графическим способом, построив зависимость $L(H)$ и определив значение H для заданной величины L.

В простейших случаях зависимость $L(H)$ может быть найдена аналитически.

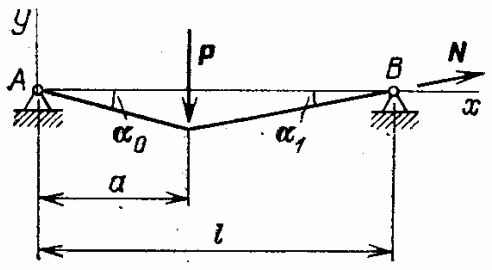


Рис. 6.33. Модель надежности для нити под действием сосредоточенной силы

Пример построения модели надежности. Требуется разработать модель надежности для конструкции в виде гибкой нити при действии сосредоточенной силы (рис. 6.33).

Из уравнений (139) при $P_2 = 0$ и $c = 0$ находим

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{P(l-a)}{Hl}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{Pa}{Hl}.$$

Наибольший прогиб нити составит

$$y(a) = \operatorname{tg}\alpha_0 a = -\frac{P(l-a)a}{Hl}. \tag{144}$$

Натяжение нити будет равно

$$\begin{aligned} N(x) = N_0 &= H\sqrt{1+\frac{P^2}{H^2}\left(\frac{l-a}{l}\right)^2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < a, \\ N(x) = N_1 &= H\sqrt{1+\frac{P^2a^2}{H^2l^2}} \qquad\quad \text{при} \quad a \leqslant x < l. \end{aligned} \tag{145}$$

Длина нити по формуле (143) составляет

$$L = a\sqrt{1+\frac{P^2(l-a)^2}{H^2l^2}} + (l-a)\sqrt{1+\frac{P^2a^2}{H^2l^2}}. \tag{146}$$

Проведем анализ для наиболее неблагоприятного случая, когда сила приложена в середине пролета. При $a = l/2$ получаем

$$L = l\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{P^2}{H^2}}. \tag{147}$$

Из последнего равенства получаем зависимость горизонтального натяжения от длины нити

$$H = P\frac{1}{2\sqrt{L^2/l^2-1}}. \tag{148}$$

Натяжение нити при $a = l/2$ будет таким:

$$N = H\sqrt{1+\frac{P^2}{4H^2}} = H\frac{L}{l}. \tag{149}$$

Модель надежности принимаем по допускаемому напряжению

$$\sigma_{max} = N/F \leqslant [\sigma], \tag{150}$$

где F — площадь сечения нити.

Наибольшая допустимая нагрузка на нить

$$P \leqslant [\sigma]F \cdot 2\sqrt{1-l^2/L^2}. \tag{151}$$

Из модели надежности следует, что при $L \to l$ допустимое значение $P \to 0$. Это становится понятным, если учесть равенство (148). При $L = l$ в нити возникают бесконечно большие напряжения.

Замечание. Следует учесть, что модель относится к нерастяжимой нити. С учетом упругости нити напряжения в рассматриваемом случае ($L = l$) будут определены в дальнейшем. Они окажутся не бесконечно большими, но весьма значительными.

При анализе надежности всегда необходимо составить отчетливое представление о тех допущениях, которые были приняты для упрощения модели.

Гибкая нить под действием распределенной нагрузки. Распределенные нагрузки создаются внешними усилиями и собственным весом нити. Для гибких нитей в строительных конструкциях следует учитывать возможность обледенения, ветровую нагрузку, изменение температурных условий и т. д.

Если q_0, Н/см — вес единицы длины нити, то на единицу длины вдоль оси x (рис. 6.34) приходится нагрузка

$$q(x) = q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{152}$$

При малых прогибах (отклонениях от оси x) $y'^2 \leqslant 1$ и $q(x) = q_0$. Из уравнения равновесия (135) при $H = \text{const}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(x)}{H}. \tag{153}$$

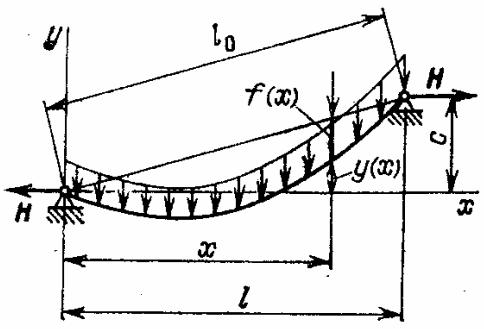


Рис. 6.34. Гибкая нить под действием распределенной (вертикальной) нагрузки

Интегрируя обе части равенства от 0 до x, находим

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{H}\int_0^x q(x_1)\,dx_1 + y'(0). \tag{154}$$

Переменная интегрирования обозначена x_1, так как под x понимается верхний предел интегрирования. Напомним, что величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования. Снова интегрируя от 0 до x, получаем

$$y(x) = \frac{1}{H}\int_0^x\int_0^{x_1} q(x_2)\,dx_2\,dx_1 + y(0) + y'(0)\,x. \tag{155}$$

Обозначения переменных указывают порядок проведения интегрирования. По условиям закрепления

$$y(0) = 0, \quad y(l) = c \tag{156}$$

получаем

$$y(x) = \frac{1}{H}\left(\int_0^x\int_0^{x_1} q(x_2)\,dx_2\,dx_1 - \frac{x}{l}\int_0^l\int_0^{x_1} q(x_2)\,dx_2\,dx_1\right) + c\,\frac{x}{l}. \tag{157}$$

Длина нити определяется из уравнения

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{158}$$

Нить при малых провисаниях. Назовем провисанием нити $f(x)$ (см. рис. 6.34) разность между точками прямой, соединяющей опоры нити, и точками нити.

При малых провисаниях величину $q(x)$ можно считать постоянной:

$$q(x) \approx q_0 \sqrt{1 + \frac{c^2}{l^2}} = q. \tag{159}$$

Из уравнения (157), полагая $q(x) = q$, находим

$$y(x) = -\frac{q}{2H}(lx - x^2) + c\,\frac{x}{l}. \tag{160}$$

Провисание нити составит

$$f(x) = c\frac{x}{l} - y(x) = \frac{q}{2H}(lx - x^2). \tag{161}$$

Провисание нити $f(x)$ представляет собой параболу, проходящую через точки подвески нити.

Длина нити определяется по формуле (158):

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left[-\frac{ql}{2H} + \frac{q}{H}x + \frac{c}{l}\right]^2}\, dx.$$

Используя равенство

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha,$$

справедливое при $|\alpha| \leqslant 1$, находим

$$L = \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2}\left[-\frac{ql}{2H} + \frac{q}{H}x + \frac{c}{l}\right]^2\right) dx.$$

После интегрирования получаем

$$L = l + \frac{1}{24}\frac{q^2 l^3}{H^2} + \frac{c^2}{2l}. \tag{162}$$

Из последнего соотношения вытекает равенство

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{l} - 1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{l^2}}}. \tag{163}$$

Наибольшее провисание нити определяется из условия

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{q}{2H}(l - 2x) = 0,$$

что дает $x = l/2$. Наибольшее провисание нити получается в середине пролета и равно по формуле (161)

$$f_{\max} = \frac{ql^2}{8H}, \tag{164}$$

или

$$\frac{f_{\max}}{l} = \frac{ql}{8H}. \tag{165}$$

В практических задачах натяжение нити больше суммарной нагрузки на нить:

$$H > ql, \tag{166}$$

и

$$\frac{f_{\max}}{l} < 0{,}1.$$

Случай малого провисания является основным для практических расчетов нитей.

Учет упругой и температурной деформации при малых провисаниях нити. Если L_0 — первоначальная длина нити (при монтаже), то в рабочем состоянии

$$L = L_0(1 + \varepsilon + \varepsilon_T), \tag{167}$$

где ε и ε_T — упругая и температурная деформации.

При малых провисаниях можно считать усилие, растягивающее нить, постоянным $N = H\sqrt{1+y'^2} = H\sqrt{1+c^2/l^2}$, и тогда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF} = \frac{H\sqrt{1+c^2/l^2}}{EF}, \tag{168}$$

где E — модуль упругости, F — площадь сечения нити, σ — напряжение растяжения нити.

Температурная деформация

$$\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0), \tag{169}$$

где α_T — коэффициент линейного расширения, $(T - T_0)$ — разность температур в рабочих условиях и условиях монтажа.

Из уравнений (162) и (167) получаем

$$L_0(1 + \varepsilon + \varepsilon_T) = l + \frac{1}{24}\frac{q^2l^3}{H^2} + \frac{c^2}{2l}. \tag{170}$$

При малых провисаниях можно считать, что

$$L_0 \approx l_0, \tag{171}$$

где l_0 — расстояние между точками подвеса нити. Так как $l_0 = \sqrt{l^2 + c^2} \approx l + c^2/(2l)$, то равенство (170) можно представить в следующем виде:

$$\Delta + \Delta_н + \Delta_T = \frac{1}{24}\frac{q^2l^3}{H^2}, \tag{172}$$

где

$$\Delta = L_0 - l_0 \tag{173}$$

— разность длины нити и расстояния между точками подвеса;

$$\Delta_н = \frac{Hl_0\sqrt{1+c^2/l^2}}{EF} = \frac{Hl_0^2}{EFl} \tag{174}$$

— упругое удлинение нити;

$$\Delta_T = \alpha_T(T - T_0)l_0 \tag{175}$$

— температурное удлинение (или укорочение) нити.

Из уравнения (172) следует, что учет упругой деформации и температурного удлинения существен только в тех случаях, когда величины $\Delta_н$ и Δ_T одного порядка с разностью первоначальной длины нити и расстояния между опорами.

Замечание. Последнее обстоятельство весьма существенно при инженерных расчетах.

Прежде чем учитывать или отбрасывать какие-либо факторы, надо оценить их значение по сравнению с другими подобными факторами, действующими на конструкцию.

Модель надежности гибкой нити. Из условий статической прочности найдем напряжение в нити:

$$\sigma \leqslant \sigma_b/n = [\sigma], \tag{176}$$

где σ_b — предел прочности материала, n — запас прочности (обычно $n = 2$—3). Часто ставится условие

$$f_{max} < [f], \tag{177}$$

где $[f]$ — допускаемая величина провисания в связи с габаритными условиями.

Основными для расчета являются уравнения (172) и (165).

ГЛАВА 7

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

Вводные замечания. Элементы конструкции, как уже указывалось, часто схематизируются в виде стержней. Такая модель формы используется и для расчета валов, передающих крутящий момент. Примерами являются валы, приводящие в движение воздушные винты или лопасти вертолета; валы редукторов, станков и т. п.

Работа стержней на кручение встречается во многих других элементах конструкций.

26. Кручение круглых валов

Деформации и напряжения при кручении круглого вала. Экспериментально установлено, что при кручении круглого вала (рис. 7.1) приложенным на его торце крутящим моментом поперечные сечения остаются плоскими (рис. 7.2). Можно считать, что поперечные

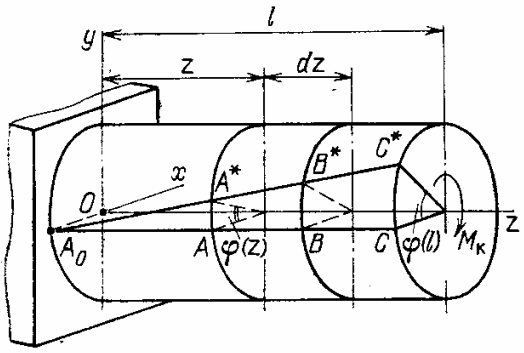


Рис. 7.1. Кручение круглого вала

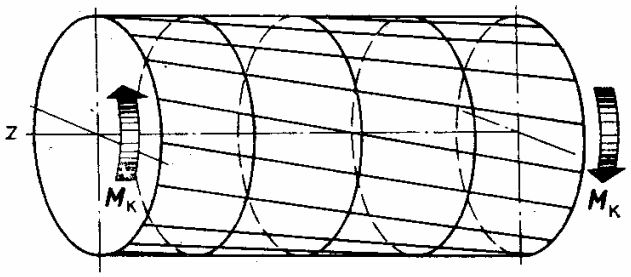


Рис. 7.2. Кручение модели вала с предварительно нанесенной сеткой

сечения как жесткие круглые диски поворачиваются относительно оси вала на угол $\varphi(z)$.

Образующие, расположенные на цилиндрической поверхности радиусом r, поворачиваются на угол γ, постоянный по длине цилиндра (вала). Для малых углов

$$\gamma(r) = \operatorname{tg}\gamma = \frac{CC^*}{A_0C} = \frac{\varphi(l)\,r}{l} = \vartheta r, \qquad (1)$$

где $\vartheta = \varphi(l)/l$ — угол закрутки на единицу длины вала; при измерении угла φ в радианах угол ϑ измеряется в единицах 1/см, 1/м.

Угол поворота в сечении z

$$\varphi(z) = z\varphi(l)/l = \vartheta z. \qquad (2)$$

Из последнего соотношения можно установить, что

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz}. \qquad (3)$$

Рассмотрим перемещения и деформации в произвольной точке поперечного сечения A, лежащей на расстоянии r от оси вала (рис. 7.3). Перемещение точки A_1 равно $A_1A_1^*$ и направлено перпендикулярно радиусу. В кольцевом слое толщиной dr возникает деформация сдвига (рис. 7.4)

$$\gamma(r) = \frac{d\varphi(z)\, r}{dz} = \vartheta r. \tag{4}$$

По закону упругости углу сдвига соответствует касательное напряжение (разд. 18)

$$\tau = G\gamma,$$

где G — модуль сдвига, $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

Учитывая (4), находим важную зависимость:

$$\tau(r) = G\gamma(r) = \vartheta G r. \tag{5}$$

Касательное напряжение $\tau(r)$ направлено по касательной к окружности радиусом r. Величина касательного напряжения пропорциональна радиусу (рис. 7.5).

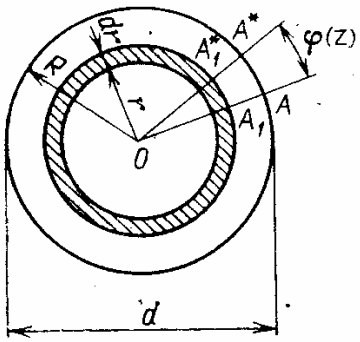


Рис. 7.3. Картина перемещений точек вала при кручении

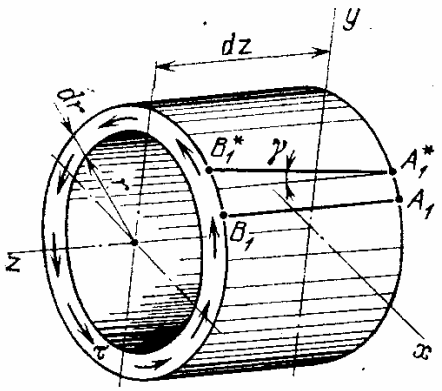


Рис. 7.4. Деформация сдвига в кольцевом слое

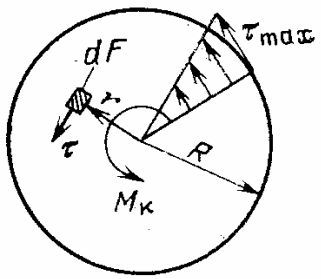


Рис. 7.5. Распределение касательных напряжений при кручении

Из общих условий равновесия следует, что касательные усилия $\tau(r)\,dF$ должны создавать крутящий момент

$$M_к = \int_F \tau r\, dF = \vartheta G \int_F r^2\, dF = \vartheta G J_p, \tag{6}$$

где $J_p = \int_F r^2\, dF$ — полярный момент инерции сечения вала. Величину полярного момента легко вычислить, приняв

$$dF = 2\pi r\, dr,$$

тогда

$$J_p = \int_0^R 2\pi r^3\, dr = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{7}$$

Из соотношения (6) получаем формулу для относительного угла закрутки

$$\vartheta = \frac{M_к}{GJ_p}. \tag{8}$$

Величина GJ_p называется *жесткостью* (сечения) *вала на кручение*. Угол поворота сечения вала

$$\varphi(z) = \vartheta z = \frac{M_к z}{GJ_p}.$$

Взаимный поворот сечений на участке вала длиной l

$$\varphi(l) = \frac{M_к l}{GJ_p}. \tag{9}$$

Внося значение ϑ в формулу (5), находим важную расчетную зависимость:

$$\tau(r) = \frac{M_к}{J_p} r. \tag{10}$$

Наибольшее касательное напряжение получается на внешнем радиусе

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_к}{\pi d^3/16}. \tag{11}$$

Величина

$$W_к = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3 \tag{12}$$

называется *моментом сопротивления* кручению; таким образом,

$$\tau_{max} = M_к / W_к. \tag{13}$$

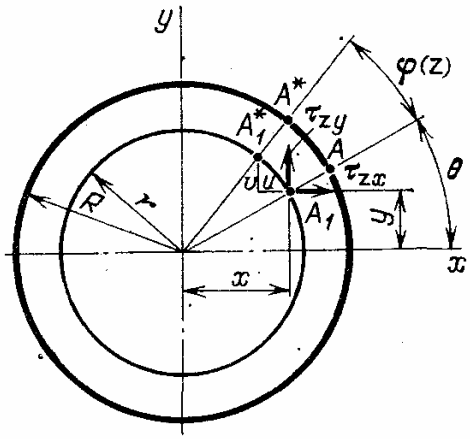


Рис. 7.6. Кручение круглого вала. Расчет методом теории упругости

Анализ решения методами теории упругости. Полученное решение о распределении напряжений и деформаций при кручении вала основывалось на экспериментальных наблюдениях. Попробуем подвергнуть его анализу с позиции общих уравнений механики деформируемого тела. В соответствии с принятой моделью деформации вала перемещение точки $A_1(x, y)$, равное $A_1^* A_1$ (рис. 7.6), имеет составляющие по осям

$$\begin{aligned} u &= -r\varphi(z)\sin\theta = -r\varphi(z)\frac{y}{r} = -\varphi(z)\, y, \\ v &= r\varphi(z)\cos\theta = r\varphi(z)\frac{x}{r} = \varphi(z)\, x. \end{aligned} \tag{14}$$

Перемещение вдоль оси z отсутствует ($w = 0$). Составляющие касательного напряжения равны

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = -G\frac{d\varphi}{dz}y = -G\vartheta y,$$
$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\frac{d\varphi}{dz}x = G\vartheta x. \qquad (15)$$

Полное касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\vartheta r,$$

что совпадает с равенством (5).

Можно показать, что при $M_к = \text{const}$ удовлетворяются уравнения равновесия и краевые условия на боковых поверхностях вала. Принятую модель деформации круглого вала следует признать точной.

Замечания. 1. Предполагается, что в концевых сечениях вала внешний крутящий момент реализуется в виде линейно распределенных касательных напряжений (см. рис. 7.5). В действительности момент обычно прикладывается по-другому (например, с помощью шлицевого соединения (рис. 7.7)), и

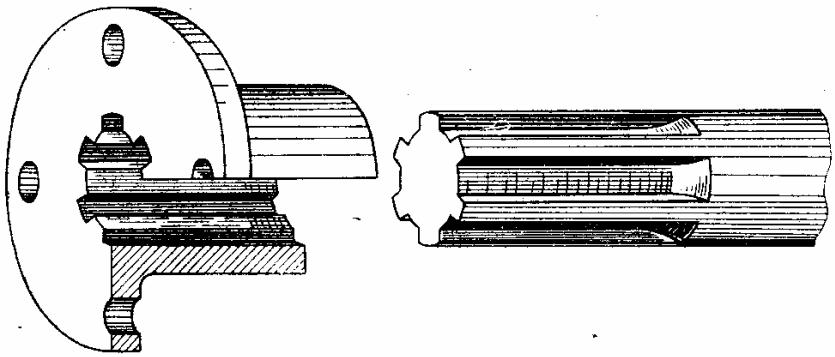


Рис. 7.7. Передача крутящего момента на вал с помощью шлицевого соединения

поэтому по принципу Сен-Венана решение будет справедливым на некотором удалении от торцов.

Более строго следовало бы сказать, что решение является точным для неконцевых областей вала.

2. Граница между понятиями «точного» и «приближенного» решения в применении к практическим задачам часто носит условный характер. Например, можно получить точное решение для весьма приближенной модели (расчетной схемы) или приближенное решение для более точной модели. Что лучше для практических целей? Однозначного ответа на этот вопрос не существует.

На основании практического опыта вырабатываются модели различных уровней, используемые на разных этапах проектирования (предварительный выбор размеров на стадии технического предложения, более точные модели на этапах эскизного и рабочего проектирования).

Кручение полого вала. Полые круглые валы (трубы) часто используются для передачи крутящего момента, так как приводят к конструкции с наименьшей массой по сравнению со сплошным ва-

лом. Кинематическая картина деформации остается такой же, как при кручении сплошного круглого вала. Распределение касательных напряжений определяется соотношением (10). Полярный момент инерции сечения будет таким:

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_0^4),$$

где d_0 — внутренний диаметр вала (рис. 7.8). Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_p}\frac{d}{2} = \frac{M_к}{\frac{\pi}{16}\left(d^3 - \frac{1}{d}d_0^4\right)}. \qquad (16)$$

Кручение вала с переменными параметрами упругости по радиусу. Такая модель описывает кручение вала с покрытиями из другого материала, биметаллического вала и т. п. Модель используется для расчета упругопластической деформации вала. Кинематическая картина деформации остается прежней, что можно показать с помощью точного решения. Касательное напряжение в соответствии с равенством (5) составит

$$\tau(r) = \vartheta G(r) r, \qquad (17)$$

где $G(r)$ — модуль сдвига материала в слое на расстоянии r.

Из условия равновесия (6) имеем

$$M_к = \int_F \tau r\, dF = \vartheta \int_F G(r) r^2\, dF. \qquad (18$$

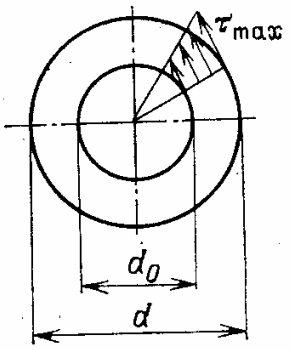


Рис. 7.8. Распределение напряжений при кручении полого вала

Относительный угол закручивания

$$\vartheta = \frac{M_к}{\int_F G(r) r^2\, dF}. \qquad (19)$$

Теперь для касательного напряжения получаем из соотношений (17) и (19)

$$\tau(r) = \frac{G(r) M_к}{\int_F G(r) r^2\, dF} r. \qquad (20)$$

При $G(r) = \text{const} = G$ равенства (20) и (10) совпадают.

Замечание. Структура формулы (20) представляет интерес. Кольцевой слой воспринимает касательное напряжение пропорционально модулю сдвига (модулю упругости) слоя. Это означает, что слой из непрочного материала может работать на поверхности высокопрочного вала, если слой имеет малый модуль упругости.

Кручение вала переменного сечения при переменных по длине крутящих моментах. Полученные ранее расчетные зависимости установлены для круглого вала постоянного сечения при действии постоянного крутящего момента по длине. В этом случае решение

удовлетворяет уравнениям теории упругости. На концевых сечениях краевые условия соответствуют действующему крутящему моменту, т. е. удовлетворяются в смысле Сен-Венана. Если крутящий момент изменяется по длине или диаметр вала различен на разных участках, то в инженерных расчетах используется приближенное решение.

Касательное напряжение в сечении вала определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_к(z)}{J_p(z)} r. \tag{21}$$

Угол закрутки на единицу длины вала

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M_к(z)}{GJ_p(z)}. \tag{22}$$

Таким образом, основные расчетные зависимости (21) и (22) используются для параметров рассматриваемого сечения вала.

Замечание. Приближенный метод, несколько расширяющий область применения расчетных зависимостей за пределы принятых допущений, является типичным для инженерных расчетов прикладных моделей надежности. Уравнения (21) и (22) строго справедливы только для вала постоянного сечения при действии крутящего момента по концам вала.

В приближенном решении предполагается, что каждый малый участок вала «ведет себя» так, как будто весь вал имеет такое же сечение и закручен тем же моментом. Влияние соседних участков признается второстепенным.

Справедливость приближенных методов обосновывается практическим опытом и экспериментальными исследованиями. Часто весьма убедительным оказывается сопоставление с примерами более точных решений, полученных численными или аналитическими методами.

Кручение вала в упругопластической стадии. Если напряжения при кручении

$$\tau > \tau_т, \tag{23}$$

где $\tau_т$ — предел текучести при сдвиге (кручении), то в материале вала возникнут пластические деформации.

На рис. 7.9 показаны кривые деформирования при кручении (зависимости $\tau - \gamma$). Они могут быть получены при кручении тонкостенных труб, для которых можно считать известным значение касательных напряжений при заданной величине крутящего момента:

$$\tau = \frac{M_к}{2\pi R_0^2 \delta}, \tag{24}$$

где R_0, δ — средний радиус и толщина трубы. Приближенно кривые

деформирования при кручении могут быть найдены из обычных кривых деформирования, если положить

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0, \quad \gamma = \sqrt{3}\,\varepsilon_0,$$

где σ_0, ε_0 — напряжение и деформация при растяжении образцов. Часто для упрощенных оценок принимается кривая деформирования без участка упрочнения (рис. 7.9, *б*).

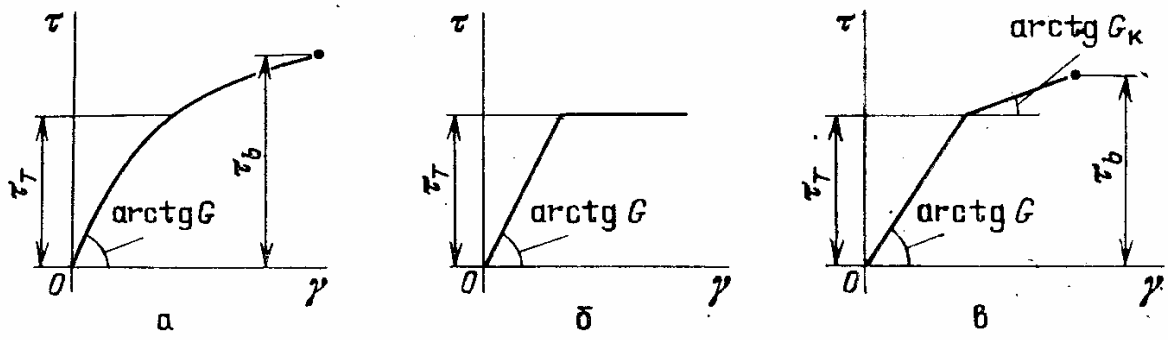


Рис. 7.9. Кривые деформирования при кручении (τ_T — предел текучести на срез, τ_b — предел прочности на срез): *а* — экспериментальная кривая деформирования; *б* — кривая деформирования без упрочнения; *в* — кривая деформирования с линейным упрочнением

Рассмотрим кручение сплошного вала при наличии пластических деформаций. При крутящем моменте

$$M^0_{\text{кТ}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{16} \tag{25}$$

впервые появляется пластическая деформация на наружной поверхности вала.

Эксперименты показывают, что при возникновении пластичности кинематическая картина деформаций вала остается неизменной — сечения остаются плоскими, радиальные направления до деформации остаются радиальными и после деформации.

Рассмотрим упрощенную диаграмму деформирования без упрочнения. При $M_к > M^0_{\text{кТ}}$ в сечении возникают две зоны (рис. 7.10). При $r < r_1$ (зона упругих деформаций)

$$\tau = \tau_T \frac{r}{r_1}. \tag{26}$$

При $r \geqslant r_1$ (зона пластических деформаций)

$$\tau = \tau_T. \tag{27}$$

Из условия равновесия имеем

$$M_к = \int_F \tau r\, dF = 2\pi \int_0^{r_1} \tau_T \frac{r^3}{r_1} dr + 2\pi \int_{r_1}^{R} \tau_T r^2\, dr.$$

или

$$M_к = \tau_T \cdot 2\pi \left(\frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{12} r_1^3 \right).$$

Из последнего соотношения получим

$$r_1 = \sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_к}{\pi\tau_T}}. \tag{28}$$

Зависимость (28) показывает, что при возрастании крутящего момента зона упругих деформаций в центре вала уменьшается. При

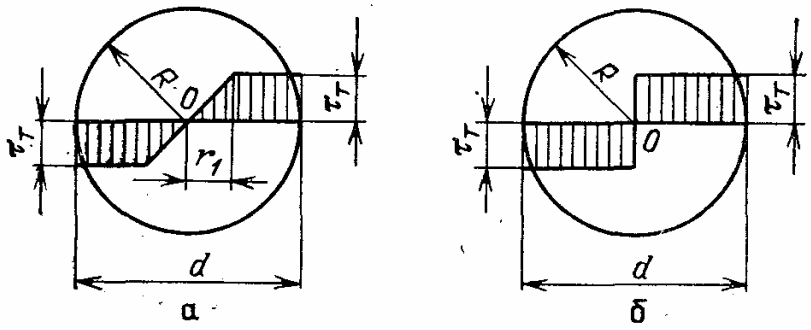


Рис. 7.10. Распределение касательных напряжений при кручении вала (материал не обладает упрочнением): *а* — предельное значение крутящего момента $M_к$; *б* — распределение напряжений при действии предельного момента

$r_1 = 0$ наступает предельное состояние — наибольшее (предельное) значение крутящего момента

$$M_{кT} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}. \tag{29}$$

Сопоставляя равенства (25) и (29), получаем

$$M_{кT} = \frac{4}{3} M_{кT}^0. \tag{30}$$

Развитие пластических деформаций увеличивает приблизительно на 30% сопротивление вала. Угол закрутки вала на единицу длины (см. (4))

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma}{r}.$$

Применяя это равенство при $r = r_1$ ($\tau = \tau_T$), находим

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau_T}{Gr_1} = \frac{\tau_T}{G} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_к}{\pi\tau_T}}}. \tag{31}$$

При приближении $M_к$ к $M_{кT}$ величина $d\varphi/dz \to \infty$ и деформация вала резко возрастает.

Более полное описание свойств материала дает схематизация в виде кривой деформирования с линейным упрочнением (рис. 7.9, *в*). Распределение касательных напряжений при действии предельного момента показано на рис. 7.11; имеем

$$\tau = \tau_T + \frac{r}{R}(\tau_b - \tau_T), \tag{32}$$

где τ_b — предел прочности на срез (сдвиг).

Из условия равновесия

$$M_{\text{к разр}} = \int_F r\tau\, dF = 2\pi \int_0^R \left[\tau_T + \frac{r}{R}(\tau_b - \tau_T)\right] r^2\, dr.$$

После интегрирования получаем

$$M_{\text{к разр}} = \frac{\pi R^3}{2}\tau_b + \frac{\pi R^3}{6}\tau_T = \frac{2\pi}{3}R^3\tau_T + \frac{\pi R^3}{2}(\tau_b - \tau_T). \tag{33}$$

Из сравнения равенств (29) и (33) устанавливаем влияние учета упрочнения материала. Например, если

$$\tau_b = \frac{4}{3}\tau_T,$$

то

$$M_{\text{к. разр}} = 1{,}25 M_{\text{кт}}.$$

В общем случае для расчета применяется метод переменных

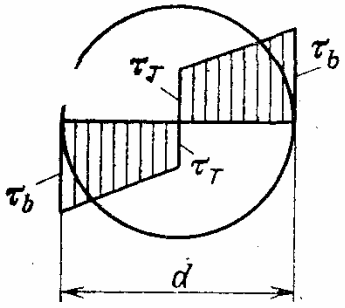


Рис. 7.11. Определение предельного момента при кручении вала из материала с линейным упрочнением

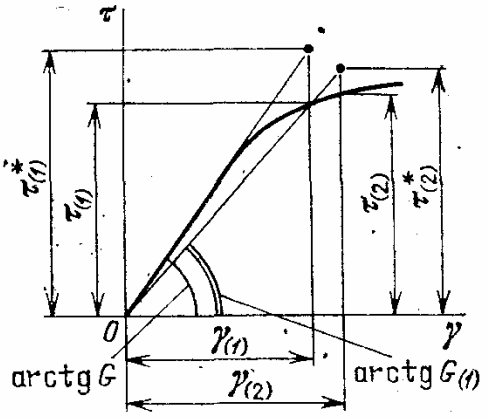


Рис. 7.12. Применение метода переменных параметров упругости

параметров упругости (рис. 7.12). В первом приближении рассматривается вал из упругого материала.

Из соотношения (21) находим

$$\tau^*_{(1)} = \frac{M_{\text{к}}}{J_\rho} r,$$

затем

$$\gamma_{(1)} = \frac{\tau^*_{(1)}}{G}, \quad G_{(1)} = \frac{\tau_{(1)}}{\gamma_{(1)}}.$$

Далее по равенству (20) находим второе приближение:

$$\tau^*_{(2)} = \frac{G_{(1)}(r)\, M_к}{\int\limits_F G_{(1)}(r)\, r^2\, dF},$$

и, следовательно,

$$\gamma_{(2)} = \frac{\tau^*_{(2)}}{G_{(1)}}, \quad G_{(2)} = \frac{\tau_{(2)}}{\gamma_{(2)}}$$

и т. д. Обычно достаточную точность дает второе-третье приближение. В рассматриваемом случае можно найти замкнутое решение, если учесть линейное распределение деформации сдвига по радиусу. Однако в более сложных случаях (например, при действии крутящего момента и осевой силы) решение приходится выполнять методом переменных параметров упругости.

Кручение вала в стадии установившейся ползучести. В этой стадии скорость возрастания деформации сдвига зависит только от величины касательного напряжения. Применяя уравнение (124) гл. 5 для случая кручения ($\tau_{xy} = \tau$, $\gamma_{xy} = \gamma$, остальные компоненты напряжений и деформаций равны нулю), находим

$$V_{xy} = \frac{d\gamma}{dt} = 3B\sigma_i^{n-1}\tau, \tag{34}$$

где B и n — параметры экспериментальных кривых ползучести (гл. 5, формула (121)).

Так как

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau,$$

то получаем

$$\frac{d\gamma}{dt} = 3^{(n+1)/2} B\tau^n = B_к\tau^n. \tag{35}$$

Кинематическая картина деформации остается такой же, как в упругой стадии, и поэтому

$$\gamma = \vartheta r. \tag{36}$$

Из последних соотношений находим

$$\tau = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\frac{1}{B_к}\right)^{1/n} r^{1/n}. \tag{37}$$

При ползучести касательные напряжения кручения распределяются по закону $r^{1/n}$.

Из условия равновесия

$$M_к = \int_F \tau r\, dF = 2\pi \int_0^R \tau r^2\, dr, \tag{38}$$

учитывая соотношение (37), находим

$$M_к = 2\pi \left(\frac{d\vartheta}{dt}\frac{1}{B_к}\right)^{1/n} \cdot \frac{1}{3+1/n} R^{3+1/n}. \tag{39}$$

Теперь по равенству (37) получаем

$$\tau = \left(3 + \frac{1}{n}\right) \frac{M_к}{2\pi R^{3+1/n}} r^{1/n}. \tag{40}$$

При $n = 1$ касательные напряжения распределяются по линейному закону, и формулы (40) и (10) совпадают.

Замечание. Интересно отметить, что распределение касательных напряжений кручения (40) при установившейся ползучести совпадает с распределением напряжений в упругопластической стадии, если принять уравнение кривой деформирования в виде

$$\gamma = B_к \tau^n.$$

Действительно, в силу равенства (36) получаем

$$\tau = (\vartheta/B_к)^{1/n} r^{1/n}$$

и далее соотношение (39), в котором вместо $d\vartheta/dt$ стоит ϑ, и, наконец, формулу (40). При одинаковом распределении напряжений в стадии ползучести и пластичности есть существенная разница в поведении вала: при ползучести все время увеличивается угол закрутки вала, тогда как при пластичности он не изменяется во времени.

Деформации или скорости деформаций часто играют одну и ту же роль в механике твердого деформируемого тела — они отражают геометрическую картину деформации.

Модели прочностной надежности вала при кручении. При построении модели прочностной надежности (разд. 2) следует прежде всего рассмотреть характер напряженного состояния, условия работы вала в составе всего изделия, особенности нагружения и возможных разрушений.

На площадках, лежащих в плоскости поперечного сечения скручиваемого вала, действуют только касательные напряжения. Для анализа рассмотрим точку A, находящуюся на поверхности вала, и расположим оси x, y так, как показано на рис. 7.13. Напряженное состояние характеризуется следующими значениями компонентов:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\tau, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0.$$

Напряженное состояние в каждой точке вала является плоским, так как в площадках, нормаль к которым совпадает с осью z (радиальное направление), напряжения отсутствуют. Главные

напряжения вычислим по формулам (26) и (27) гл. 2:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \tau,$$
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = -\tau. \qquad (41)$$

Далее устанавливаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty, \quad 2\alpha^* = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha^* = \frac{\pi}{4}.$$

Площадки главных напряжений направлены под углом 45° к оси вала. По формулам (35) и (36) гл. 2 находим

$$\operatorname{tg}\alpha^*_{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau}{-\tau} = -1, \quad \operatorname{tg}\alpha^*_{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{-\tau}{-\tau} = 1.$$

Растягивающее главное напряжение σ_1 направлено вдоль винтовой

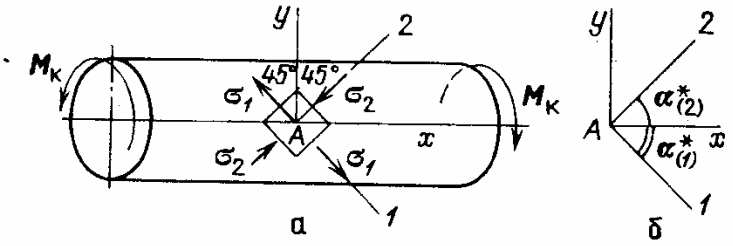


Рис. 7.13. Площадки главных напряжений при кручении вала: *а* — схема напряженного состояния; *б* — главное напряжение

линии; при взаимном повороте поперечных сечений такие волокна растягиваются (направление α_1^*). Для волокон, идущих по ортогональным винтовым линиям (направление α_2^*), при действии момента $M_к$ (см. рис. 7.13) происходит укорочение.

Замечание. Анализ напряженного состояния очень важен, например, для правильного конструирования деталей из композиционных материалов. Если труба из материала, усиленного волокнами, должна работать на кручение, то волокна следует располагать по винтовым линиям, составляющим угол 45° с осью вала.

При построении модели статической прочности исходят из условия прочности для пластичного материала

$$\tau_{max} \leqslant \tau_b / n_b, \qquad (42)$$

где n_b — запас по напряжениям, τ_b — предел прочности материала на срез (сдвиг).

Используя равенство (11), найдем допускаемое значение крутящего момента:

$$M_к \leqslant \frac{\tau_b}{n_b}\frac{\pi}{16}d^3. \qquad (43)$$

Модель статической прочности по несущей способности использует условие

$$M_к \leqslant \frac{1}{n_{н.с}} M_{кразр}, \tag{44}$$

где $n_{н.с}$ — коэффициент запаса по несущей способности. С учетом равенства (33) получаем допускаемую величину крутящего момента

$$M_к \leqslant \frac{1}{n_{н.с}}\left(\frac{\pi d^3}{12}\tau_T + \frac{\pi d^3}{16}(\tau_b - \tau_T)\right) = \frac{1}{n_{н.с}}\left(\tau_b \frac{\pi d^3}{16} + \tau_T \frac{\pi d^3}{48}\right). \tag{45}$$

При одинаковых значениях n_b и $n_{н.с}$ условие (45) дает значение $M_к$, на 15—30% большее. Однако это увеличение может быть использовано только при действии однократной статической нагрузки, например для оценки величины крутящего момента, разрушающего вал.

Если вал выполнен из хрупкого материала (удлинение при разрыве меньше 3%), то условие статической прочности следует принять, исходя из величины наибольшего растягивающего напряжения:

$$\sigma_{1max} < \sigma_b / n_b, \tag{46}$$

где σ_b — предел прочности материала на растяжение.

Так как

$$\sigma_{1max} = \tau_{max}, \tag{47}$$

то допускаемое значение крутящего момента

$$M_к \leqslant \frac{\sigma_b}{n_b}\frac{\pi d^3}{16}. \tag{48}$$

Значение n_b для хрупких материалов обычно принимается в 1,5—2 раза больше, чем для пластичных материалов. Значение $M_к$ по условию (47) одновременно характеризует и несущую способность вала, так как у хрупких материалов перераспределение напряжений не происходит — они работают в упругой области практически до разрушения. При построении моделей статической прочности вопросы концентрации напряжений не являются главными, так как у пластичных материалов происходит выравнивание напряжений.

Для моделей прочностной надежности, связанных с усталостью (вал при действии переменных напряжений), прочность в местах концентрации напряжений обычно является определяющей.

В некоторых случаях при построении моделей прочностной надежности используют ограничения по углу поворота (на единицу длины вала)

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_к}{GJ_p} \leqslant [\vartheta] \tag{49}$$

или по полному углу поворота

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p} \leqslant [\varphi]. \tag{50}$$

Наконец, дополнительные ограничения могут быть связаны с динамическими явлениями (например, с необходимостью устранения крутильных колебаний). Эти вопросы частично рассматриваются в дальнейшем. Перейдем к изучению работы на кручение стержней некруглого сечения.

27. Общая задача кручения стержней и концентрация напряжений

Перемещения и деформации. Рассмотрим кручение упругого стержня постоянного сечения под действием крутящего момента. Сечение стержня показано на рис. 7.14.

Допустим сначала, что общая картина перемещений остается такой же, как при кручении круглого вала: сечение стержня как жесткая пластинка поворачивается вокруг оси стержня, причем относительный угол закрутки остается постоянным по длине. Тогда точка сечения A на расстоянии r от оси переходит в точку A^*, а сечение поворачивается на угол

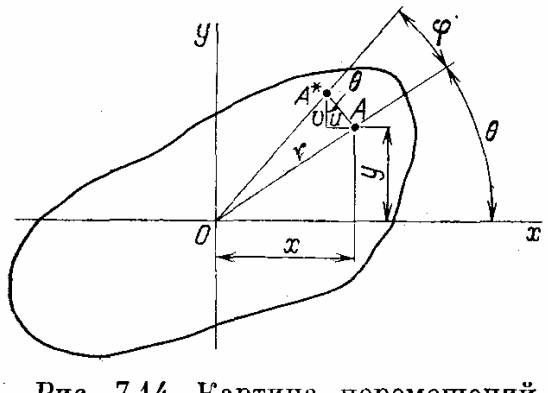


Рис. 7.14. Картина перемещений точек при кручении стержня

$$\varphi = \vartheta z, \tag{51}$$

где ϑ — угол поворота на единицу длины $\left(\dim \vartheta = \left[\frac{\text{угол}}{\text{длина}}\right]\right.$, например $\left.\frac{\text{рад}}{\text{м}}\right)$ — постоянная величина.

Составляющие перемещения по осям x и y равны

$$u = -AA^* \sin\theta = -r\varphi \sin\theta = -r\varphi \frac{y}{r} = -\vartheta z y, \tag{52}$$

$$v = AA^* \cos\theta = r\varphi \cos\theta = r\varphi \frac{x}{r} = \vartheta z x. \tag{53}$$

Далее допустим, что перемещение вдоль оси z (оси стержня)

$$w = w(x, y) \tag{54}$$

не зависит от координаты z.

При кручении круглого вала принималось $w = 0$; в общей задаче кручения существует перемещение, перпендикулярное плоскости поперечного сечения w, которое называется *депланацией*.

С помощью формул Коши (разд. 9) находим следующие значения деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta x, \tag{55}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta y.$$

Напряжения, условия равновесия. Так как линейные деформации равны нулю, то по уравнениям упругости (разд. 18) обращаются в нуль и нормальные напряжения:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0. \tag{56}$$

Касательное напряжение τ_{xy} также равно нулю. Отличными от нуля будут только касательные напряжения, действующие в плоскости поперечного сечения:

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta y\right), \tag{57}$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta x\right), \tag{58}$$

где G — модуль сдвига.

Перейдем к рассмотрению уравнений равновесия (разд. 7).

Первые два уравнения удовлетворяются тождественно (массовые силы считаем отсутствующими), а из третьего уравнения вытекает

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{59}$$

Учитывая соотношения (57) и (58), получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{60}$$

Из последнего уравнения следует важный результат: для того чтобы удовлетворились уравнения равновесия, осевое смещение не может быть произвольной функцией — оно должно удовлетворять уравнению Лапласа (уравнению (60)).

Замечание. Дифференциальное уравнение для функции двух переменных $F(x, y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F = \nabla^2 F = 0$$

называется *уравнением Лапласа.*

Уравнение Лапласа часто встречается в технических науках, в гидродинамике, теории теплопроводности и др. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Краевые условия. Рассмотрим теперь краевые условия для напряжений. Нормаль к боковой поверхности (рис. 7.15) образует с осями x, y, z углы соответственно α, $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2$. Направляющие косинусы указанных углов

$$l = \cos\alpha, \quad m = \sin\alpha, \quad n = 0.$$

Считая боковую поверхность стержня свободной от распределенных усилий, получим из краевых условий (формула (103) гл. 2)

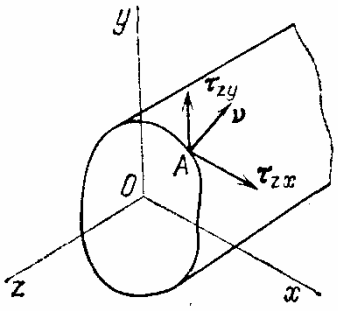


Рис. 7.15. Краевые условия на боковой поверхности стержня

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m = 0, \tag{61}$$

или

$$\tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \sin\alpha = 0. \tag{62}$$

Последнее условие имеет следующий физический смысл. Величины τ_{zx} и τ_{zy} представляют собой составляющие касательного напряжения в точке поперечного сечения по осям x и y. В точке A, лежащей на контуре поперечного сечения, составляющая полного касательного напряжения по направлению нормали

$$\tau_\nu = \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \sin\alpha = 0. \tag{63}$$

Краевое условие на боковой поверхности (условие (62)) означает, что в точках контура касательное напряжение направлено вдоль касательной к контуру, составляющая по нормали равна нулю. Соотношение (63) можно было написать сразу из условия парности касательных напряжений, так как на боковой поверхности касательные напряжения отсутствуют. Из равенства (62) возникают краевые условия для $w(x, y)$. Внося в (62) соотношения (57) и (58), получаем

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta y\right)\cos\alpha + G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta x\right)\sin\alpha = 0, \tag{64}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha = \vartheta\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha). \tag{65}$$

Рассмотрим теперь краевые условия на торцах стержня, где приложен крутящий момент. Точное распределение внешних касательных условий неизвестно — оно зависит от конструктивных особенностей конкретных способов передачи крутящего момента. Но при любом способе задания внешних распределенных усилий на торцах стержня они должны быть статически эквивалентными крутящему моменту $M_к$.

Краевые условия на торцевых поверхностях будем выполнять не в отдельных точках, а для всего сечения в целом:

$$\int_F (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dF = M_к. \tag{66}$$

Последнее условие можно также рассматривать как условие равновесия участка стержня (рис. 7.16).

Замечание. Краевые условия, которые выполняются интегрально для главного вектора или главного момента внешних сил, называются *краевыми условиями Сен-Венана*, по имени знаменитого французского ученого и инженера, впервые решившего задачи о кручении и изгибе стержней.

Отказ от строгого, пунктуального выполнения краевых условий во всех точках поверхности тела, использование интегрального краевого условия составили новый этап развития механики деформируемого тела. Существенно, что искажения напряженного состояния, вызванные различными способами передачи крутящего момента, при условии (66) распространяются только на области вблизи торцов стержня (принцип Сен-Венана).

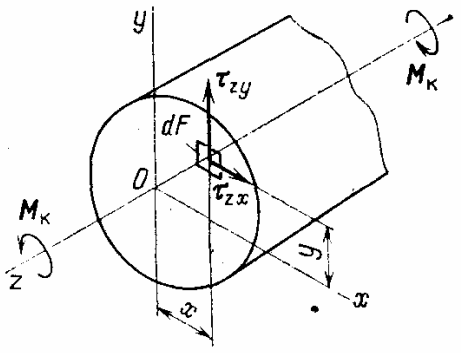


Рис. 7.16. Краевые условия на торцевой поверхности стержня

Математическая постановка задачи. Функция кручения. Математическая постановка задачи означает сведение задачи к разрешающей системе уравнений и условиям однозначного их решения.

Полученные ранее основные уравнения достаточны для математической постановки задачи, но часто оказывается целесообразным преобразование уравнений, переход к другим переменным и т. п. Для решения задачи введем *функцию кручения* $\Phi(x, y)$, положив осевое смещение

$$w(x, y) = \vartheta\Phi(x, y); \tag{67}$$

тогда из уравнения (60) следует, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0. \tag{68}$$

Для точек контура сечения находим из условия (65)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\alpha = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \tag{69}$$

Отметим, что для всех контурных точек можно считать известными их координаты и значение угла нормали контура с осью x (угла α).

Отыскание функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей для всех точек области (поперечного сечения) уравнению Лапласа, а на внешнем контуре условию для производных, называется *задачей Неймана*. В математической физике доказывается существование и однозначность решения.

Замечания. Если составлять разрешающее уравнение для функции $w(x, y)$, то краевое условие содержало бы неизвестную постоянную ϑ. Функция кручения $\Phi(x, y)$ определяется только сечением стержня и не зависит от величины приложенного крутящего момента, разумеется, в пределах упругих деформаций.

По физическому смыслу она численно равна осевому смещению при $\vartheta = 1$.

Краевое условие (69) можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = y\cos\alpha - x\sin\alpha, \tag{70}$$

где $\partial\Phi/\partial\nu$ — производная функции $\Phi(x, y)$ вдоль направления нормали. Из общего правила определения производной вдоль направления имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{d\nu}.$$

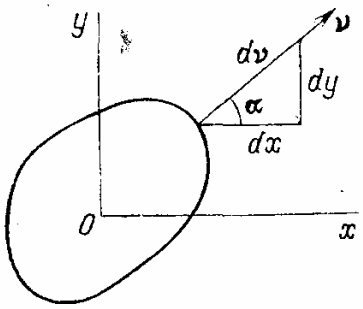


Рис. 7.17. Определение производной вдоль направления ν для функции $\Phi(x, y)$

Так как (рис. 7.17)

$$\frac{dx}{d\nu} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\nu} = \sin\alpha,$$

то получаем условия (69) или (70). Если функция $\Phi(x, y)$ определена, то

$$\tau_{zx} = G\vartheta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \tag{71}$$

$$\tau_{zy} = G\vartheta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right). \tag{72}$$

Для полного решения задачи требуется определить величину ϑ, что можно сделать по условию (66). Внося в это условие уравнения (71) и (72), находим

$$G\vartheta\int_F\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right)y\right]dF = M_к. \tag{73}$$

Примем обозначение

$$\int_F\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right)y\right]dF = J_к \tag{74}$$

и будем называть $J_к$ *геометрической жесткостью стержня на кручение*. Для круглого стержня поперечное сечение при кручении остается плоским,

$$w = \vartheta\Phi(x, y) = 0, \tag{75}$$

и тогда

$$J_к = \int_F x^2 + y^2)\,dF = J_p. \tag{76}$$

Из равенства (73) получаем величину относительного угла закрутки

$$\vartheta = \frac{M_к}{GJ_к}. \tag{77}$$

Теперь ясно, что значение функции кручения $\Phi(x, y)$ полностью решает задачу, т. е. позволяет найти напряжения и деформации при кручении упругого стержня произвольного сечения заданным

крутящим моментом. Тем не менее решение с помощью функции кручения является одним из возможных способов решения. Другой способ (в некоторых случаях более удобный) связан с функцией напряжения.

Функция напряжения. Предположим, что касательные напряжения при кручении можно представить в следующем виде:

$$\tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{78}$$

$$\tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial F}{\partial x}, \tag{79}$$

где $F(x, y)$ — подлежащая определению функция напряжения, G — модуль сдвига, ϑ — относительный угол закручивания. Такая форма представления позволяет сразу удовлетворить уравнениям равновесия (59). Из соотношений (71) и (72) находим связь функций напряжения и кручения:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y, \tag{80}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right). \tag{81}$$

Дифференцируя равенство (80) по y, а равенство (81) по x и складывая, найдем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \tag{82}$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Оно отличается от уравнения Лапласа наличием заданной функции в правой части уравнения.

Для точек контура из условия (62) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\sin\alpha = 0. \tag{83}$$

Далее следует учесть соотношения для элемента дуги контура

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}, \tag{84}$$

и тогда из равенства (83) с необходимостью следует

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial F}{\partial s} = 0. \tag{85}$$

В точках контура производная функции $F(x, y)$ вдоль дуги равна нулю. Следовательно, для точек контура

$$F(x, y) = C, \tag{86}$$

где C — постоянная.

Замечание. Условие (86) можно получить несколько другим путем. Умножая уравнение (85) на ds, получаем для точек контура

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = dF = 0,$$

и, следовательно, справедливо условие (86).

Для односвязной области, т. е. для поперечного сечения без внутренних полостей, постоянную C можно принять равной нулю, и тогда для точек контура

$$F(x, y) = 0. \tag{87}$$

Итак, задача кручения сводится к нахождению функции напряжения как решению уравнения Пуассона при постоянном значении функции на контуре.

Перейдем к определению величины ϑ. Из условия (66) находим

$$-G\vartheta \int_{F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,y\right) dF_0 = M_к, \tag{88}$$

где F_0 — площадь поперечного сечения. Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,x = \frac{\partial}{\partial x}\,(Fx) - F,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\,y = \frac{\partial}{\partial y}\,(Fy) - F,$$

находим

$$M_к = 2G\vartheta \int_{F_0} F\,dF_0, \tag{89}$$

так как в силу условия (87)

$$\int_{F_0} \left[\frac{\partial}{\partial x}\,(Fx) + \frac{\partial}{\partial y}\,(Fy)\right] dF_0 = 0. \tag{90}$$

Доказательство условия (90) можно провести различными путями: преобразуя интеграл по площади в интеграл по контуру или проводя интегрирование по dx и dy с учетом условия (87). Геометрическая жесткость стержня на кручение (для односвязного сечения)

$$J_к = 2\int_{F_0} F\,dF_0. \tag{91}$$

Мембранная аналогия для функции напряжения. Рассмотрим мембрану, например тонкую резиновую пленку, закрепленную по контуру Г (рис. 7.18). Мембрана предварительно растянута в двух направлениях с напряжением σ на плоском диске, имеющем отверстие по форме сечения стержня, и затем изнутри дается давление

p. В результате мембрана получит прогибы $f(x, y)$, но на контуре сечения прогиб $f = 0$. Предполагается, что прогибы мембраны невелики и предварительные напряжения σ не изменятся в процессе прогиба. В каждом из направлений мембрана ведет себя как гибкая нить (разд. 25).

Условие равновесия мембраны составляется как равенство нулю сил, действующих в вертикальном направлении. В результате

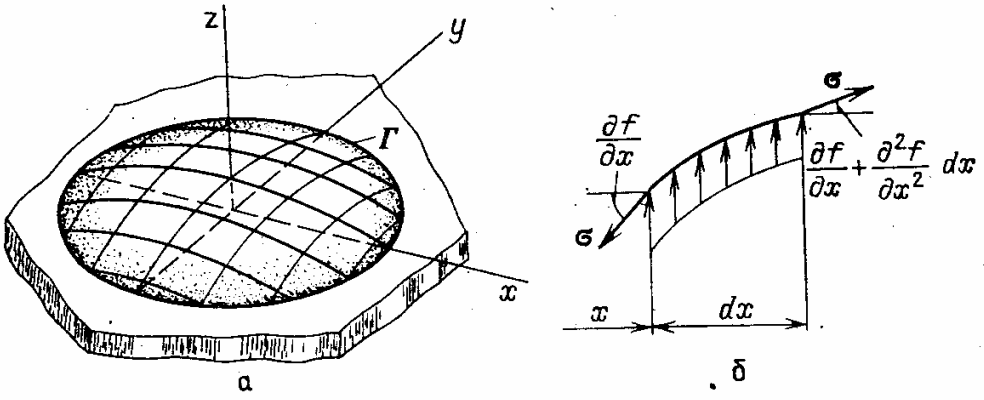


Рис. 7.18. Мембранная аналогия для функции кручения: *а* — прогиб мембраны; *б* — к выводу уравнения мембраны

изменения прогибов f вдоль оси x составляющая от растяжения мембраны будет равна

$$\sigma \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx\, dy,$$

где δ — толщина мембраны.

С учетом изменения прогибов вдоль оси y получим

$$\frac{\partial^2 (f\delta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f\delta)}{\partial y^2} = -\frac{p}{\sigma}, \tag{92}$$

где p — давление на мембрану.

Принимая $p/\sigma = 2$ и сопоставляя уравнения (82) и (92), находим

$$F = f\delta, \tag{93}$$

так как функции F и $f\delta$ удовлетворяют одинаковым уравнениям и краевым условиям. Прогиб мембраны под действием внутреннего давления пропорционален функции напряжения. В этом и состоит мембранная аналогия, позволяющая экспериментально решать задачу кручения при соответствующем выборе давления, натяжения и толщины мембраны.

Отметим, что опорный контур мембраны может соответствовать контуру сечения стержня и в некотором масштабе, что приведет только к изменению множителя.

Достоинство мембранной аналогии заключается также и в том, что она позволяет представить поведение функции напряжения $F(x, y)$, так как характер прогибов (провисания) мембраны можно предвидеть из физических соображений. Например, для контура сечения в виде вытянутого прямоугольника (рис. 7.19) прогибы

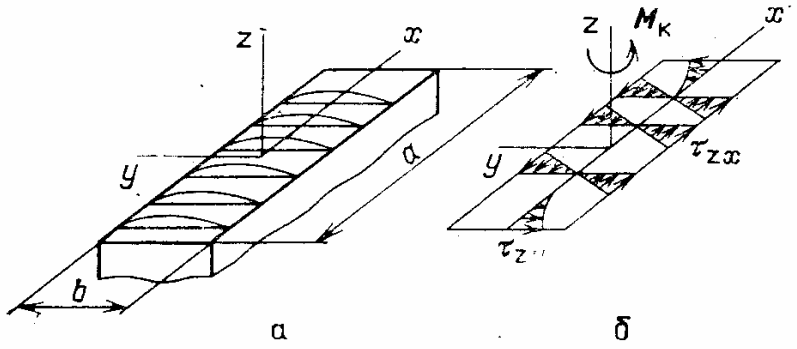


Рис. 7.19. Прогибы мембраны (функция напряжений) для сечения стержня в виде вытянутого прямоугольника: *а* — прогибы мембраны; *б* — распределение касательных напряжений

мембраны вдоль длинной стороны будут практически постоянными (за исключением областей, примыкающих к малым сторонам).

Касательные напряжения пропорциональны углу наклона поверхности мембраны:

$$\tau_{zx} = k\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -k\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{94}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Примерное распределение касательных напряжений показано на рис. 7.19, *б*. В углах прямоугольника напряжения равны нулю.

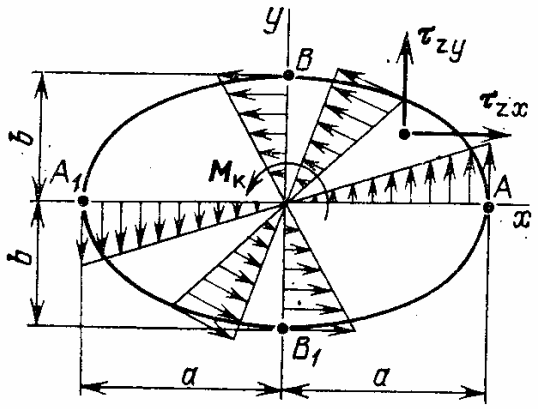


Рис. 7.20. Кручение стержня эллиптического сечения

Примеры точных решений. Стержень эллиптического сечения. Рассмотрим кручение стержня эллиптического сечения (рис. 7.20), контур которого описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{95}$$

где a, b — полуоси эллипса.

Решим задачу с помощью функции напряжения. Так как функция $F(x, y)$ обращается в нуль на контуре, то примем

$$F(x, y) = C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{96}$$

Постоянную C определяем из уравнения (82).

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2C}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2C}{b^2},$$

получаем

$$\frac{2C}{a^2} + \frac{2C}{b^2} = -2,$$

откуда

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \tag{97}$$

По формулам (78) и (79) находим напряжения

$$\tau_{zx} = -G\vartheta \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y, \quad \tau_{zy} = G\vartheta \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x. \tag{98}$$

В точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ напряжения равны

$$\tau_{zxA} = 0, \quad \tau_{zyA} = G\vartheta \frac{2b^2 a}{a^2 + b^2},$$

$$\tau_{zxB} = -G\vartheta \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{zyB} = 0.$$

Положительные направления для касательных напряжений показаны на рис. 7.20. В точке B величина касательных напряжений (по модулю) больше, чем в точке A при $a > b$.

Геометрическая жесткость стержня на кручение по формуле (91)

$$J_к = 2\int_F C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) dF_0 = 2\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(F_0 - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right),$$

где F_0, J_y, J_x — площадь и моменты инерции сечения стержня.

Вычисления дают

$$J_к = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \tag{99}$$

Для случая $a = b = R$

$$J_к = \frac{1}{2}\pi R^4 = J_p,$$

что совпадает с решением для круглого стержня. Взаимный угол поворота сечений вала на участке длиной l

$$\varphi(l) = \frac{M_к l}{G J_к}. \tag{100}$$

Учитывая равенства (98), найдем расчетные зависимости для определения напряжений:

$$\tau_{zx} = -\frac{M_к}{J_к}\frac{2a^2}{a^2+b^2}y = -\frac{M_к y}{\frac{\pi}{2}ab^3}, \quad \tau_{zy} = \frac{M_к x}{\frac{\pi}{2}a^3 b}. \tag{101}$$

Если $a > b$ (эллипс вытянут вдоль оси x), то наибольшее касательное напряжение будет в точках B_1 и B и равно

$$\tau_{max} = M_к/W_к, \tag{102}$$

где момент сопротивления

$$W_к = \frac{\pi}{2}ab^2.$$

Представляет интерес определить осевое перемещение (депланацию) при кручении. Как известно (уравнение (67)),

$$w(x, y) = \vartheta\Phi(x, y).$$

С помощью равенств (80) и (81) находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} + y = \frac{2C}{b^2}y + y = -y\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x} - x = -\frac{2C}{a^2}x - x = -x\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Из последних равенств устанавливаем

$$\Phi(x, y) = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy.$$

Далее находим

$$w(x, y) = -\frac{M_к(a^2-b^2)}{G\pi a^3 b^3}xy. \tag{103}$$

На рис. 7.21 показаны линии равных значений осевого перемещения. В первой и третьей четверти $w < 0$, во второй и четвертой $w > 0$.

Для круглого сечения ($a = b$) осевое смещение $w(x, y) = 0$.

Стержень прямоугольного сечения. В этом случае (рис. 7.22) решение получается более сложным. Оно представляется в виде ряда Фурье

$$F(x, y) = \sum_k f_k(y)\cos\frac{k\pi x}{b}, \tag{104}$$

где $f_k(y)$ — функции, подлежащие определению.

Так как функция $F(x, y)$ (прогибы мембраны) должна обращаться в нуль на контуре, то в (104) используются только нечет-

ные значения k ($k = 1, 3, 5, \ldots$). Внося выражение (104) в уравнение (82), находим

$$\sum_{k=1,3,\ldots} \left(\frac{d^2 f_k(y)}{dy^2} - \frac{k^2\pi^2}{b^2} f_k(y) \right) \cos\frac{k\pi x}{b} = -2. \qquad (105)$$

Для решения разложим правую часть уравнения в следующий ряд:

$$-2 = \sum_{k=1,3,\ldots} A_k \cos\frac{k\pi x}{b}, \qquad (106)$$

где коэффициенты A_k могут быть найдены общим способом (умножением обеих частей равенства (106) на $\cos(k\pi x/b)$ и интегриро-

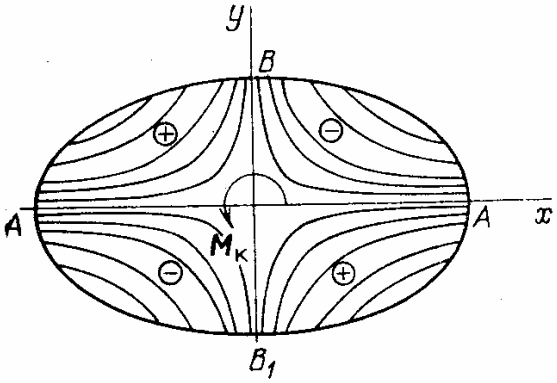


Рис. 7.21. Линии равных значений осевого перемещения при кручении стержня (гиперболы $\omega = -kxy$); вдоль линий $x = 0$, $y = 0$ смещения отсутствуют

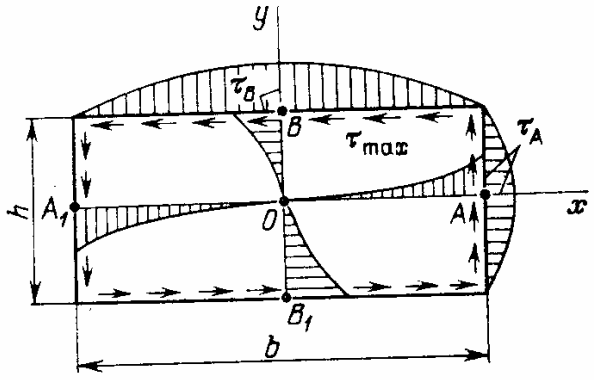


Рис. 7.22. Кручение стержня прямоугольного сечения — распределение касательных напряжений в точках контура

ванием по x в пределах от $-b/2$ до $b/2$). Тогда из (85) следует, что функции $f_k(y)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 f_k(y)}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 f_k(y) = A_k, \quad k = 1, 3, 5, \ldots \qquad (107)$$

Две постоянные при решении уравнений (107) определяются из условия

$$f_k(h/2) = 0, \quad f_k(-h/2) = 0.$$

Опуская подробности решения, приведем конечные результаты: геометрическая жесткость на кручение ($b > h$)

$$J_к = K_1 b h^3; \qquad (108)$$

момент сопротивления кручению ($b > h$)

$$W_к = K_2 b h^2; \qquad (109)$$

максимальное касательное напряжение (оно действует в точках B и B_1, в середине длинной стороны прямоугольника)

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}.$$

Значения коэффициентов K_1 и K_2 даны в таблице 3 в зависимости от отношения b/h.

Таблица 3

Коэффициенты для геометрической жесткости и моментов сопротивления при кручении стержня прямоугольного сечения

b/h	1,0	2,0	3,0	4,0	10,0	∞
K_1	0,141	0,229	0,263	0,281	0,312	0,333
K_2	0,208	0,246	0,267	0,282	0,312	0,333

Примерная эпюра распределения касательных напряжений вдоль контура сечения показана на рис. 7.22. В середине малой стороны

$$\tau_A = k\tau_{max}, \qquad (110)$$

причем значение k изменяется от $k = 1$ при $b/h = 1$ до $k = 0{,}743$ при $b/h = \infty$.

Для коэффициентов K_1 и K_2 можно использовать приближенные формулы $(b > h)$:

$$K_1 \approx \frac{1}{3 + 2\,(h/b + h^2/b^2)}, \qquad (111)$$

$$K_2 \approx \frac{1}{3 + 1{,}8\,\frac{h}{b}}. \qquad (112)$$

Для сильно вытянутого прямоугольника $(b \gg h)$

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

Концентрация напряжений при кручении. При кручении вала, имеющего шпоночные канавки, шлицы и т. п., возможно появление мест, в которых наблюдается резкое повышение напряжений — концентрация напряжений. При кручении стержней возрастание напряжений происходит возле острых углов, направленных внутрь сечения (точки A на рис. 7.23). Если во внутренних углах скругление отсутствует $(r \to 0)$, то касательные напряжения кручения в этих точках теоретически становятся бесконечно большими. Противоположное наблюдается во внешних углах (точка B на рис. 7.23).

В вершинах внешних углов касательные напряжения отсутствуют. Эти важные выводы можно получить из точных решений соответствующих задач о кручении, но они вытекают из мембранной аналогии (в вершинах внутренних углов прогиб мембраны резко изменяется).

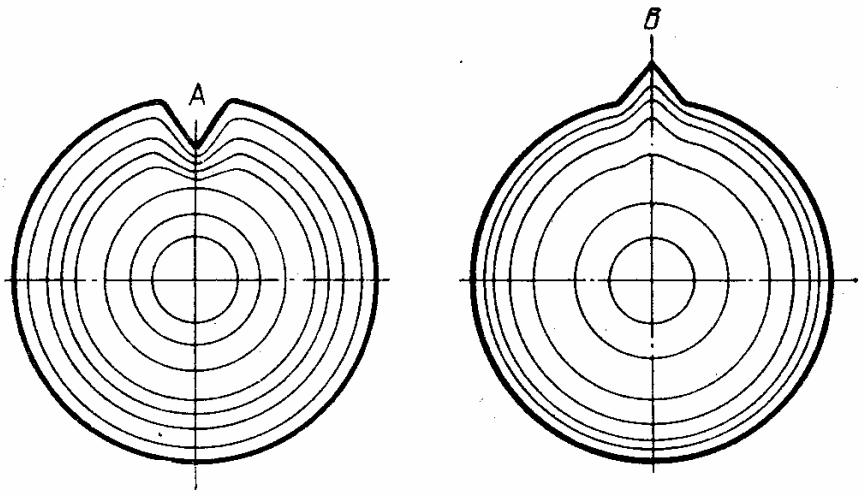


Рис. 7.23. Распределение касательных напряжений при кручении стержня

Укажем на существование физически наглядной гидродинамической аналогии. Касательное напряжение численно равно скорости жидкости, вращающейся внутри цилиндрического сосуда, стенки

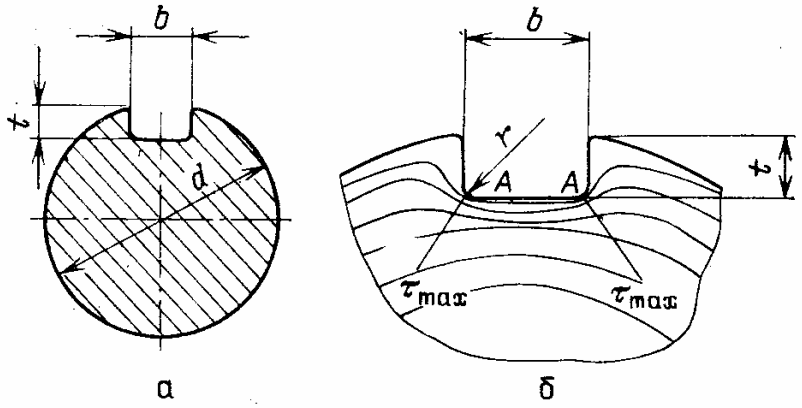


Рис. 7.24. Концентрация напряжений при кручении вала со шпоночной канавкой: *а* — сечение вала; *б* — линии тока (гидродинамическая аналогия) или линии постоянного прогиба мембраны (мембранная аналогия) возле шпоночной канавки

которого совпадают с боковой поверхностью вала. На рис. 7.23 показаны линии тока: во внутренних углах жидкость «обтекает» препятствие и скорости (касательные напряжения) резко возрастают. Вдоль линии тока значения функции напряжений (или прогиба мембраны) остаются постоянными.

Рассмотрим кручение вала со шпоночной канавкой (рис. 7.24). Максимальное касательное напряжение действует в точках A и

может быть выражено следующим равенством:

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_н, \tag{113}$$

где $\tau_н$ — номинальное напряжение, α_τ — коэффициент концентрации напряжений (безразмерная величина). В качестве номинального напряжения обычно принимается напряжение в вале, определяемое без учета концентрации напряжений.

Для круглого вала со шпоночной канавкой принимают

$$\tau_н = \frac{16 M_к}{\pi d^3}, \tag{114}$$

т. е. максимальное напряжение, которое действовало бы в вале при отсутствии шпоночной канавки.

Коэффициент концентрации напряжений должен зависеть от относительных величин, характеризующих геометрию канавки:

$$\alpha_\tau = f(r/t,\ t/d,\ t/b).$$

Из физических аналогий вытекает, что α_τ должно возрастать при

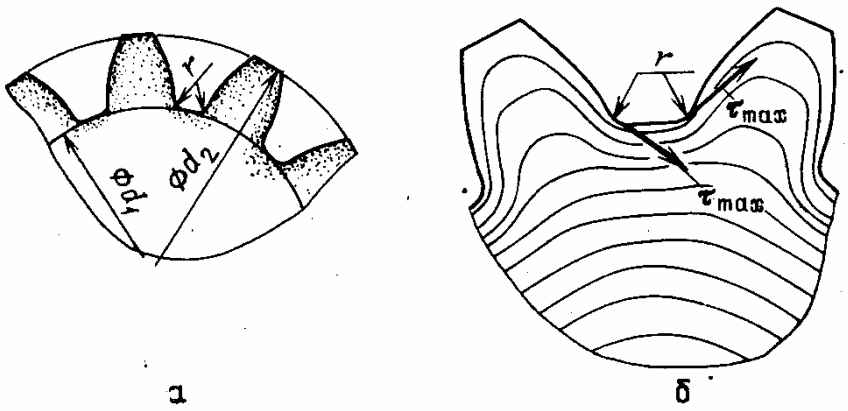


Рис. 7.25. Концентрация напряжений при кручении шлицевого вала: *а* — сечение шлицевого вала; *б* — линии тока или постоянного прогиба мембраны

уменьшении радиуса скругления. При действии переменных напряжений малая величина радиуса скруглений часто является причиной усталостных поломок. На рис. 7.25 показана концентрация напряжений в шлицевом валу.

28. Кручение тонкостенных стержней

Тонкостенные стержни замкнутых и открытых профилей. Стержень называется тонкостенным, если один из размеров поперечного сечения существенно меньше другого. Поперечное сечение тонкостенного стержня часто называется профилем. На рис. 7.26 показаны замкнутые и открытые профили тонкостенных стержней. Наиболее частое применение имеют стержни открытого профиля (рис. 7.27).

Распределение касательных напряжений при кручении в стержнях замкнутого и незамкнутого сечений принципиально различно. Это понятно из гидродинамической аналогии, если представить касательные напряжения как скорости циркулирующей внутри сечения жидкости. В замкнутом тонкостенном сечении касательные

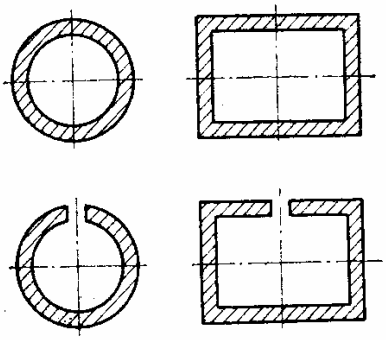


Рис. 7.26. Стержни замкнутого и открытого профилей поперечного сечения

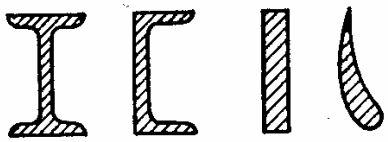


Рис. 7.27. Стержни открытого профиля

напряжения распределяются по толщине почти равномерно; в незамкнутом сечении распределение происходит по линейному закону, причем на средней линии профиля касательные напряжения обращаются в нуль (рис. 7.28).

Примером распределения касательных напряжений в замкнутом профиле может служить распределение в тонкостенном кольце, в

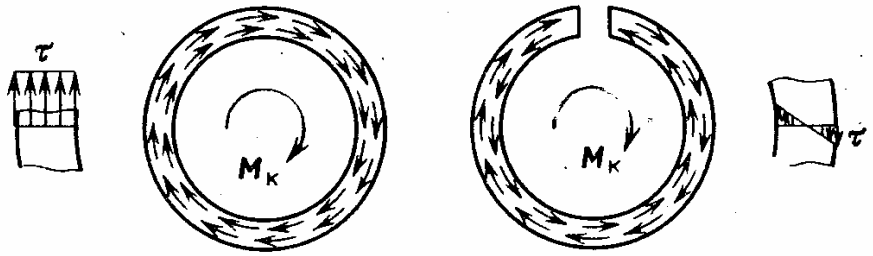


Рис. 7.28. Схема потоков касательных напряжений в замкнутом и открытом (разомкнутом) профилях поперечного сечения

открытом профиле — распределение в вытянутом прямоугольнике.

Легко понять, что стержень с замкнутым сечением значительно лучше сопротивляется кручению, чем стержень открытого профиля. Общая теория стержней, изложенная в предыдущем разделе, позволяет полностью решить задачу о кручении стержня произвольного сечения с помощью решения уравнений Лапласа или Пуассона при соответствующих краевых условиях. Однако условие тонкостенности сечения стержня позволяет использовать простые приближенные решения, что представляет практический интерес в инженерном деле.

Кручение стержня замкнутого профиля. Рассмотрим приближенное решение задачи о кручении трубчатого тонкостенного стержня (рис. 7.29). Предположим, что касательные напряжения распределены равномерно по толщине стенки и направлены по касательной к средней линии профиля. Составим условие равновесия части

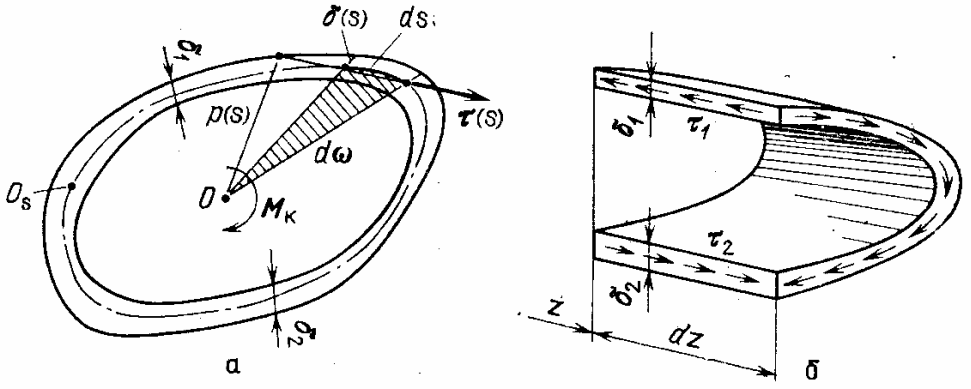


Рис. 7.29. Кручение трубчатого стержня (тонкостенного замкнутого профиля): *а* — сечение стержня; *б* — условия равновесия элемента стержня

стержня (рис. 7.29, *б*). Так как сумма всех сил в направлении оси стержня равна нулю, то

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2,$$

или

$$\tau(s)\,\delta(s) = \text{const} = C, \tag{115}$$

где $\tau(s)$ — касательное напряжение, $\delta(s)$ — толщина стенки в точке A средней линии контура (положение точки A характеризуется длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой точки O_s).

Замечание. Исходя из гидродинамической аналогии, условие (115) означает, что «расход жидкости» одинаков во всех сечениях.

Момент касательных усилий относительно оси, проходящей через точку O, выражается следующим образом (рис. 7.29, *а*). На участке ds создается момент $p(s)\tau(s)\delta(s)\,ds$, где $p(s)$ — плечо силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к средней линии контура); полный момент равен

$$\int_0^L p(s)\,\tau(s)\,\delta(s)\,ds = M_к.$$

Интеграл берется по всему контуру L. Учитывая равенство (115), находим

$$\tau(s)\,\delta(s)\int_0^L p(s)\,ds = M_к. \tag{116}$$

Так как $\frac{1}{2}p(s)\,ds = d\omega$, где $d\omega$ — площадь сектора, соответствующего дуге ds, то

$$\int_0^L p(s)\,ds = 2\omega, \tag{117}$$

где ω — площадь, ограниченная средней линией контура (рис. 7.30).

Из соотношений (116) и (117) вытекает

$$\tau(s) = \frac{M_к}{2\delta(s)\omega}. \tag{118}$$

При кручении трубы замкнутого сечения максимальное касательное напряжение возникает в наиболее тонком месте.

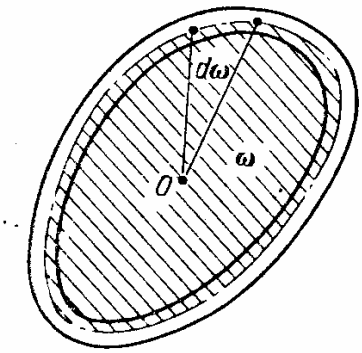


Рис. 7.30. Площадь, ограниченная средней линией контура

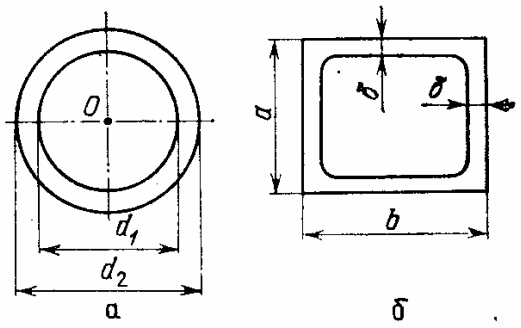


Рис. 7.31. Два сечения стержня замкнутого профиля

Пример. Рассмотрим сначала определение напряжений в тонкостенной круглой трубе для сопоставления приближенного и точного решения (рис. 7.31).

По формуле (118) находим величину касательного напряжения

$$\tau = \frac{M_к}{2\delta\dfrac{\pi d_c^2}{4}} = \frac{2M_к}{\pi\delta d_c^2}, \tag{119}$$

где $\delta = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ — толщина трубы, $d_c = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ — средний диаметр.

Из точного решения для полого вала (разд. 1) получаем следующее значение для максимального напряжения при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_к \cdot \frac{1}{2} d_2}{J_p} = \frac{M_к d_2}{\frac{\pi}{16}\left(d_2^4 - d_1^4\right)}. \tag{120}$$

Учитывая соотношения

$$d_2 = d_c + \delta, \quad d_1 = d_c - \delta$$

и полагая $\delta \leqslant d_c$, находим, что равенства (119) и (120) совпадают.

Для трубы прямоугольного сечения с толщиной стенки δ (рис. 7.31) касательное напряжение при кручении

$$\tau = \frac{M_к}{2\delta\left(a - \frac{1}{2}\delta\right)\left(b - \frac{1}{2}\delta\right)} \approx \frac{M_к}{2\delta ab}. \tag{121}$$

Замечания. 1. Приближенное решение для кручения трубчатых стержней достаточно точно описывает распределение напряжений на основе гипотезы равномерного распределения по толщине.

Деформационная картина оказывается сложнее, так как при кручении некруглой трубы возникает депланация (перемещение вдоль оси трубы). В связи с этим вопрос об угле закручивания рассмотрим после того, как познакомимся с энергетическими методами.

2. При кручении тонкостенных труб может возникнуть потеря устойчивости (образование складок по винтовым линиям). Это обстоятельство надо иметь в виду в практических расчетах.

Кручение тонкостенных стержней открытых профилей. Пологие профили. Особенность кручения открытых (незамкнутых) профилей состоит в том, что касательное напряжение не может быть постоянным по толщине стенки (см. рис. 7.28), так как «поток касательных усилий» должен циркулировать внутри сечения.

Рассмотрим сначала кручение стержня с пологим тонкостенным профилем (рис. 7.32). Профиль ограничен двумя пологими кривыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Так как

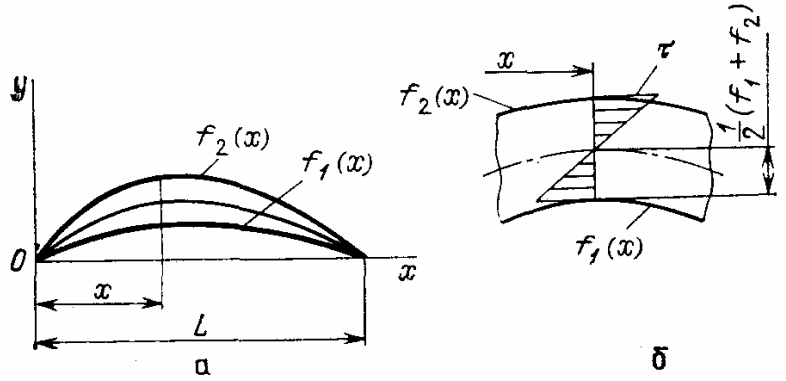


Рис. 7.32. Кручение стержня с пологим тонкостенным профилем: *а* — профиль стержня; *б* — распределение касательных напряжений по сечению

функция напряжений при кручении должна обращаться в нуль на контуре профиля, то примем для нее следующее выражение:

$$F(x, y) = -(y - f_1(x))(y - f_2(x)). \tag{122}$$

Функция напряжений должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \tag{123}$$

Если пренебречь производными пологих функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по сравнению с единицей, то принятое выражение для $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению (123). Геометрическая жесткость на кручение

$$J_к = 2\int\limits_{F_0}\int F\, dF_0 = 2\int\limits_0^L \int\limits_{f_1}^{f_2} F(x, y)\, dy\, dx. \tag{124}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{f_1}^{f_2} F(x, y)\, dy = -\int\limits_{f_1}^{f_2} \left[y^2 - y(f_1 + f_2) + f_1 f_2\right] dy = \frac{1}{6}(f_2 - f_1)^3,$$

найдем

$$J_к = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3(x)\,dx, \tag{125}$$

где $\delta(x) = f_2(x) - f_1(x)$ — толщина профиля.

Крутящий момент выражается через функцию напряжений следующим образом:

$$M_к = \vartheta G J_к = G J_к \frac{d\varphi}{dz}, \tag{126}$$

где $\vartheta = d\varphi/dz$ — угол закрутки на единицу длины, G — модуль сдвига.

Касательные напряжения

$$\tau_{zx} = -\vartheta G \frac{\partial F}{\partial y} = 2\vartheta G\left[y - \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right],$$
$$\tau_{zy} = \vartheta G \frac{\partial F}{\partial x} \approx 0. \tag{127}$$

Из равенств (127) вытекает, что касательные напряжения распределяются линейно по толщине профиля, причем обращаются в нуль на средней линии профиля (рис. 7.32, *б*). Напряжения на контуре профиля

$$\tau(x) = \vartheta G(f_2 - f_1) = \frac{M_к}{J_к}\delta(x). \tag{128}$$

Наибольшие напряжения кручения будут в местах наибольшей толщины.

Приближенные формулы для кручения стержней тонкостенного открытого профиля. В основе приближенного метода лежит замена участка профиля участком сечения в виде вытянутого прямоугольника. Для стержня прямоугольного сечения ($\delta \times L$), когда толщина δ значительно меньше длины L, было получено ранее (см. разд. 27): геометрическая жесткость на кручение

$$J_к = \frac{1}{3}\delta^3 L; \tag{129}$$

максимальная величина касательного напряжения

$$\tau = M_к \delta / J_к. \tag{130}$$

Распределение касательных напряжений (за исключением концевых областей) является линейным по толщине стенки. Предполагая, что каждый участок работает как часть прямоугольного сечения, представим приближенно геометрическую жесткость на кручение в следующем виде:

$$J_к = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3(s)\,ds, \tag{131}$$

где интегрирование ведется вдоль средней линии профиля (рис. 7.33). Для пологого профиля эта формула была обоснована приближенным представлением функции напряжения. Кривизна профиля несущественно влияет на распределение касательных напряжений, за исключением концевых областей. Продолжая обобщение, представим касательные напряжения в точках контура равенством

$$\tau(s) \approx \frac{M_k}{J_к}\delta(s). \tag{132}$$

Кручение прокатных балок. В металлических конструкциях часто используются стержни (балки) прокатных профилей — двутаврового, швеллерного, уголкового и других сечений (рис. 7.34). Для расчета кручения тонкостенных

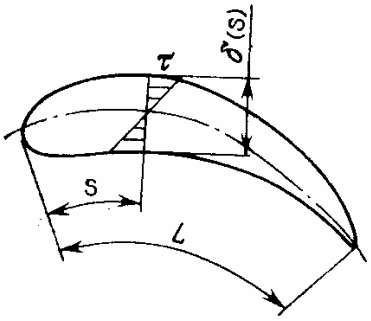


Рис. 7.33. К выводу приближенных формул для тонкостенного открытого профиля

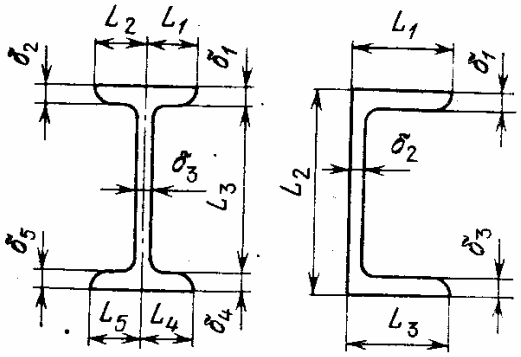


Рис. 7.34. К определению жесткости на кручение и касательных напряжений в прокатных профилях

балок, как показали эксперименты, можно использовать приближенные формулы (131) и (132). Заменяя интегрирование приближенным суммированием, получим для швеллерного профиля

$$J_к = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\delta_i^3 L_i, \tag{133}$$

где L_i, δ_i — длина и средняя толщина i-го участка. Аналогично для балки двутаврового сечения

$$J_к = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5}\delta_i^3 L_i. \tag{134}$$

Касательные напряжения кручения на i-м участке

$$\tau_i = \frac{M_к}{J_к}\delta_i. \tag{135}$$

В действительности жесткость на кручение балок несколько выше даваемой формулами (133) и (134), что объясняется влиянием радиусов скругления в углах профиля и другими факторами (поправочный коэффициент составляет обычно 1,1—1,2).

Замечание. Приведенные формулы определяют кручение стержней открытого профиля при условии, что торцы стержня имеют возможность смещения вдоль оси стержня (возможность депланации). Если торец стержня заделан в массивную жесткую плиту, то в заданном сечении возникает другое напряженное состояние, в частности появляются нормальные напряжения. Стесненное кручение тонкостенных стержней рассматривается ниже. Отметим, что возникающие дополнительные эффекты существенны для непологих открытых профилей.

Пример. Сравним жесткость на кручение и касательные напряжения тонкостенной трубы замкнутого сечения и при наличии продольного разреза (рис. 7.35).

Для сплошного сечения геометрическая жесткость на кручение (см. разд. 27)

$$J_к = J_p = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - d_1^4\right] = \frac{\pi}{32}\left[(d_c + \delta)^4 - (d_c - \delta)^4\right] = \frac{\pi d_c^3}{4}\delta.$$

Для сечения с тонким продольным разрезом

$$J_к = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3 ds = \frac{1}{3}\delta^3 \pi d_c = \frac{\pi}{3} d_c \delta^3.$$

Отношение жесткостей на кручение

$$\frac{J_{кспл}}{J_{кпр}} = \frac{3}{4}\left(\frac{d_c}{\delta}\right)^2. \qquad (136)$$

Касательные напряжения в сплошной трубе (формула (119))

$$\tau = \frac{2M_к}{\pi\delta d_c^2},$$

в трубе с продольным разрезом

$$\tau = \frac{3M_к}{\pi\delta^2 d_c}.$$

Отношение максимальных касательных напряжений

$$\frac{\tau_{спл}}{\tau_{пр}} = \frac{2}{3}\frac{\delta}{d_c}. \qquad (137)$$

Из соотношений (136) и (137) вытекает, что разрез трубы вдоль образующей существенно понижает сопротивление трубы крутящим нагрузкам.

Кручение тонкостенных стержней открытого профиля с переменными параметрами упругости. Рассмотрим сначала стержни пологих профилей (см. рис. 7.32) с переменным модулем сдвига. Учитывая дальнейшее использование решения применительно к упругопластическим задачам по методу переменных параметров упругости (разд. 19), будем считать, что модуль сдвига изменяется по толщине сечения (координате y). Считая для пологих профилей изменение функции напряжения вдоль координаты x пренебрежимо малым, представим уравнение для функции напряжений в таком виде (см. разд. 27):

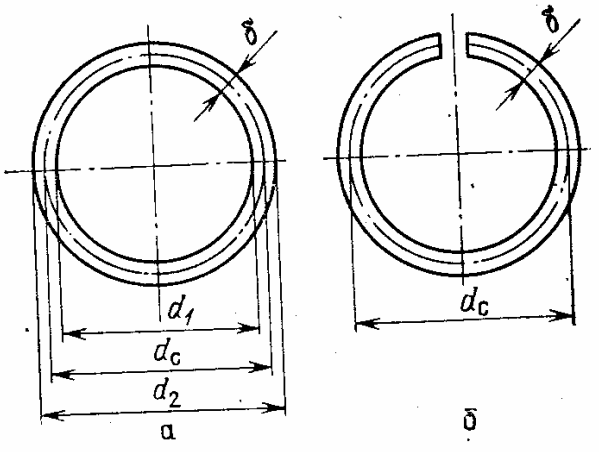


Рис. 7.35. Кручение тонкостенной круглой трубы: *а* — сплошня труба и *б* — с продольным разрезом.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G(y)}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -2. \qquad (138)$$

Из уравнения (138) вытекает, что

$$\frac{1}{G(y)}\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + A_1(x), \qquad (139)$$

где $A_1(x)$ — произвольная функция x.

Умножая обе части равенства (139) на $G(y)$ и интегрируя в пределах от f_1 до y, находим

$$F(x, y) = -2\int_{f_1}^{y} G(y_1)\, y_1 dy_1 + A_1(x)\int_{f_1}^{y} G(y_1)\, dy_1. \tag{140}$$

В последнем равенстве учтено, что в точках контура $y = f_1(x)$ функция $F(x, f_1) = 0$. Так как при $y = f_2$ (см. рис. 7.32)

$$F(x, f_2) = -2\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, y_1 dy_1 + A_1(x)\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, dy_1 = 0, \tag{141}$$

то, определяя $A_1(x)$, будем иметь

$$F(x, y) = 2\left\{\frac{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, y_1\, dy_1}{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, dy_1}\int_{f_1}^{y} G(y_1)\, dy_1 - \int_{f_1}^{y} G(y_1)\, y_1\, dy_1\right\}.$$

Если модуль сдвига постоянен ($G(y) = G$), то из последнего равенства получаем соотношение (122).

Касательные напряжения

$$\tau_{zx} = \vartheta\frac{\partial F}{\partial y} = -2\vartheta G(y)\left\{y - \frac{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, y_1\, dy_1}{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, dy_1}\right\}. \tag{142}$$

В другом виде

$$\tau_{zx} = -2\frac{d\varphi}{dz}G(y)(y - y_{ср}), \quad \tau_{zy} = -\vartheta\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{143}$$

В этих равенствах

$$y_{ср} = \frac{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, y_1\, dy_1}{\int_{f_1}^{f_2} G(y_1)\, dy_1} \tag{144}$$

— среднее значение ординаты профиля. При постоянном модуле сдвига

$$y_{ср} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

Жесткость стержня на кручение

$$C = 2\int_F F(x, y)\, dy\, dx = \int_0^L C_1 dx, \tag{145}$$

где

$$C_1 = \int_{f_1}^{f_2} F(x, y)\, dy = 4\int_{f_1}^{f_2}\left(y_{\text{ср}}\int_{f_1}^{y} G(y_1)\, dy_1 - \int_{f_1}^{y} G(y_1)\, y_1\, dy_1\right) dy.$$

По физическому смыслу C_1 — жесткость на кручение единицы длины средней линии профиля.

При постоянном по толщине модуле сдвига

$$C_1 = 4G\int_{f_1}^{f_2}\left[y_{\text{ср}}(y - f_1) - \frac{1}{2}(y^2 - f_1^2)\right] dy = \frac{1}{3}G(f_2 - f_1)^3 = \frac{1}{3}G(x)\,\delta^3(x), \tag{146}$$

где $\delta(x) = f_2 - f_1$ — толщина профиля в сечении x.

ГЛАВА 8

ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

29. Гипотеза плоских сечений и нормальные напряжения изгиба

Силовые факторы в сечении стержня. Рассмотрим стержень (крыло самолета, лопатку компрессора и т. д.) под действием поперечной нагрузки (рис. 8.1). Ось z направлена вдоль оси стержня, оси x, y лежат в плоскости A поперечного сечения.

Проведем сечение (см. рис. 8.1) и заменим отброшенную правую часть тела равнодействующими внутренних сил (рис. 8.2).

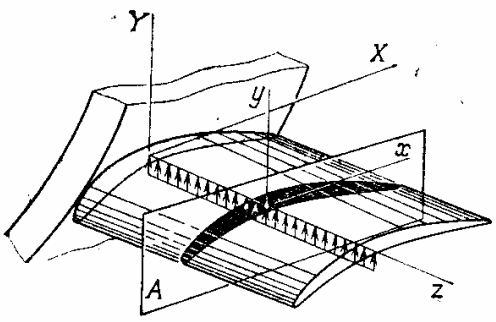


Рис. 8.1. Лопатка компрессора под действием изгибающей нагрузки

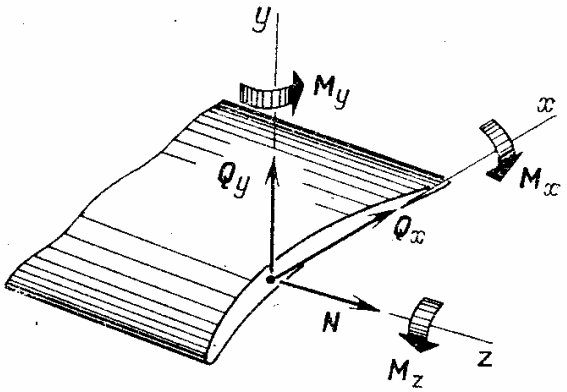


Рис. 8.2. Силовые факторы в сечении стержня

В общем случае для равновесия оставленной части тела необходимо и достаточно приложить три составляющие вектора усилия и три составляющие вектора момента. Векторы $\mathbf{Q}_x$ и $\mathbf{Q}_y$ называются *поперечными* или *перерезывающими силами*; $\mathbf{N}$ — *продольная* или *нормальная сила*; моменты $\mathbf{M}_x$ и $\mathbf{M}_y$ называются *изгибающими моментами*; $\mathbf{M}_z$ — *крутящий момент* (см. рис. 8.2).

В пределах упругости материала кручение можно рассматривать независимо от других деформаций; оно было описано ранее, и потому в дальнейшем считаем $M_z = 0$.

Положительные направления изгибающих моментов соответствуют положительным направлениям вращения, принятым для правосторонней системы координат. Согласно этому, момент или вращение считается положительным в том случае, когда поворот осуществляется против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси к началу координат (рис. 8.2). Усилия Q_x и Q_y будем считать положительными, если они направлены вдоль осей x и y соответственно (см. рис. 8.2).

Замечание. В приведенном соглашении о знаках силовых факторов существенно, что рассматриваются усилия, действующие на левую часть стержня (нормаль к сечению идет в положительном направлении оси z). В силу равенства действия и противодействия в таком же сечении, но принадлежащем правой части стержня (рис. 8.3), силы и моменты будут точно такими же, но противоположно направленными. Естественно, что для правой части стержня (внешняя нормаль к сечению направлена вдоль отрицательного направления

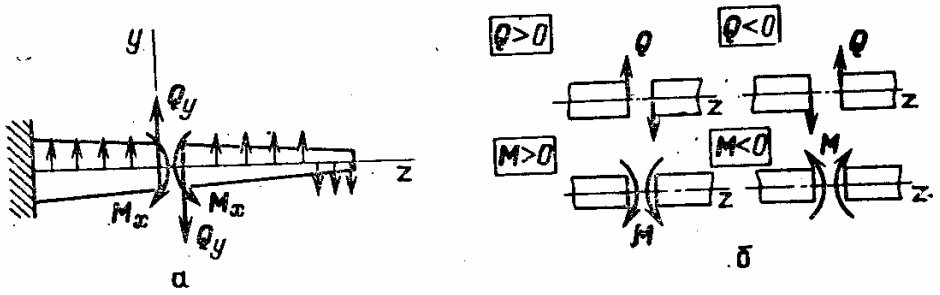


Рис. 8.3. Силовые факторы, приложенные к левой и правой частям стержня: *а* — положительные силовые факторы в сечении стержня; *б* — правило знаков для перерезывающей силы и изгибающего момента

оси z) положительные направления будут противоположными. Подобное обстоятельство встречалось ранее (разд. 3) при установлении знаков напряжений.

Таким образом, правило знаков зависит от направления внешней нормали к сечению и принятой системы координат. На рис. 8.3 показаны положительные силовые факторы в сечении стержня.

Гипотеза плоских сечений. Точное решение задачи о распределении нормальных и касательных напряжений при изгибе стержня представляет большие трудности. В инженерной практике нашло широкое признание приближенное решение, основанное на знаменитой «гипотезе плоских сечений», впервые использованной (в простейших случаях) еще в работах Бернулли и Эйлера.

Гипотеза плоских сечений состоит в следующем: точки плоскости поперечного сечения после деформации лежат в одной плоскости. Физически это означает, что сечение стержня можно представить как тонкую, абсолютно жесткую пластинку, получающую в результате деформации стержня линейное смещение и углы поворота. Перемещение точки A поперечного сечения (рис. 8.4) вдоль оси z по гипотезе плоских сечений будет таким:

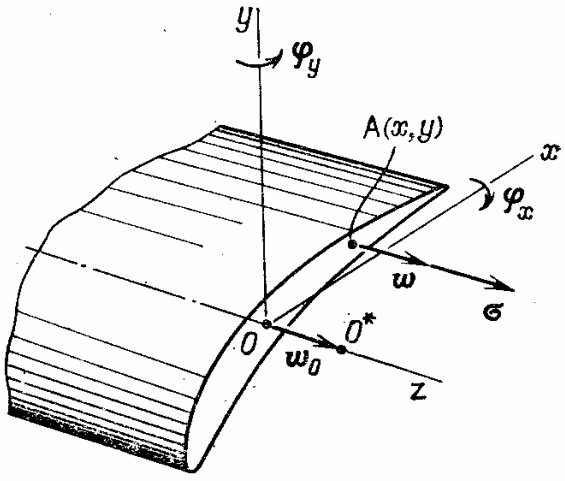


Рис. 8.4. Распределение упругого смещения в поперечном сечении стержня при изгибе

$$w = w_0 + \varphi_x y - \varphi_y x, \qquad (1)$$

где φ_x и φ_y — углы поворота сечения относительно осей x и y соот-

ветственно, w_0 — смещение вдоль оси z точек оси стержня. Величины w_0, φ_x, φ_y одинаковы для всех точек сечения, но в общем случае зависят от z. Углы упругого поворота сечения в формуле (1) считаются малыми, так что

$$\sin \varphi_x \approx \varphi_x, \qquad \sin \varphi_y \approx \varphi_y.$$

Замечание. Гипотеза плоских сечений является важнейшим приближенным методом описания деформации изгиба и растяжения стержней. Исследования показывают, что основой гипотезы плоских сечений является предположение о малости углов сдвига элементов по сравнению с углами их поворотов.

При изгибе стержней из анизотропных материалов, у которых модуль сдвига может быть на порядок величины меньше модуля упругости при растяжении, деформации сдвига возрастают и область применения гипотезы плоских сечений становится ограниченной.

Распределение нормальных напряжений изгиба. Относительная деформация в точке поперечного сечения в направлении продольной оси стержня z

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_0 = dw_0/dz$ — деформация в точках, лежащих на оси стержня.

Таким образом, из гипотезы плоских сечений вытекает линейное распределение деформации ε_z по плоскости поперечного сечения. При определении напряжений σ_z, действующих перпендикулярно плоскости сечения, примем, что два других нормальных напряжения σ_x и σ_y отсутствуют (гипотеза одномерного напряженного состояния, или *гипотеза о ненадавливании)*.

Для деформаций в области упругости материала справедлив закон Гука, согласно которому между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость

$$\varepsilon_z = \sigma_z/E + \alpha_T T, \tag{3}$$

где E — модуль упругости материала, α_T — коэффициент теплового линейного расширения, T — изменение температуры материала.

В дальнейшем для простоты индексы в выражении (3) опускаем, так как будут рассматриваться деформации и напряжения только вдоль оси z.

Из уравнения (3) следует, что

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha_T T, \tag{4}$$

или с учетом равенства (2) получим

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right) - E\alpha_T T. \tag{5}$$

Величина напряжений σ будет известной в том случае, когда известны параметры деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$, $d\varphi_y/dz$.

Замечание. Величина ε_0 представляет собой деформацию волокна, совпадающего с осью стержня (геометрическим местом центров тяжести сечения).

Физический смысл параметров $d\varphi_x/dz$ и $d\varphi_y/dz$ будет разъяснен в дальнейшем — они выражают составляющие векторы кривизны оси стержня после деформации.

Для определения параметров деформации воспользуемся общими условиями равновесия (рис. 8.5). Изгибающие моменты и нормальная сила в сечении стержня, которые определяются условиями равновесия отсеченной (правой) части стержня, одновременно являются равнодействующими внутренних сил в сечении, т. е. усилий $\sigma\, dF$ (см. рис. 8.5):

$$\int_F \sigma\, dF = N, \tag{6}$$

$$\int_F \sigma y\, dF = M_x, \tag{7}$$

$$\int_F \sigma x\, dF = -M_y. \tag{8}$$

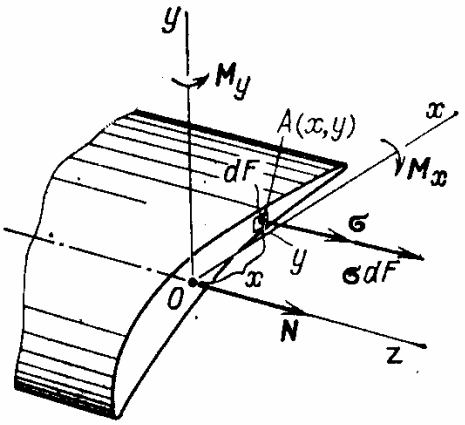


Рис. 8.5. Общие условия равновесия при изгибе стержня

Знак минус в последнем равенстве связан с тем, что момент относительно оси y, создаваемый вектором $\sigma\, dF$, противоположен моменту M_y.

Замечание. При согласовании знаков в составляемых уравнениях надо всегда руководствоваться рисунком, на котором все участвующие в уравнении величины принимаются положительными!

Например, на рис. 8.5 нормальное напряжение показано растягивающим, величины x и y в точке A положительны, момент M_y принят положительным.

Система уравнений для определения нормальных напряжений изгиба и растяжения стержня и ее упрощение. Эта система получается путем подстановки значения σ из соотношения (5) в уравнения равновесия (6)—(8). Для общности будем считать, что модуль упругости E и температура T не одинаковы в различных точках сечения.

Внося (5) в равенства (6)—(8), получим следующую систему уравнений, записанную в матричной форме:

$$[C_{ij}]\{\chi\} = \{M\} + \{M_T\}, \tag{9}$$

где

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ d\varphi_x/dz \\ d\varphi_y/dz \end{Bmatrix} \text{—вектор параметров деформации,}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \text{—вектор внешних нагрузок,}$$

$$\{M_T\}=\begin{Bmatrix} N_T \\ M_{xT} \\ M_{yT} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int\limits_F E\alpha_T T\, dF \\ \int\limits_F Ey\alpha_T T\, dF \\ -\int\limits_F Ex\alpha_T T\, dF \end{Bmatrix}$$ — вектор температурного нагружения.

Симметричная матрица (3×3) коэффициентов жесткости имеет следующие элементы:

$$C_{11}=\int\limits_F E\, dF,\quad C_{12}=C_{21}=\int\limits_F yE\, dF,\quad C_{13}=C_{31}=-\int\limits_F xE\, dF,$$
$$C_{22}=\int\limits_F y^2E\, dF,\quad C_{23}=C_{32}=-\int\limits_F xyE\, dF,\quad C_{33}=\int\limits_F x^2E\, dF. \tag{10}$$

Основное уравнение гипотезы плоских сечений (уравнение (1)) справедливо для произвольных осей x, y.

Покажем, что с помощью рационального выбора осей координат можно существенно упростить матрицу жесткости $[C_{i,j}]$, приведя ее к диагональному виду. Выберем начало координат в приведенном центре тяжести сечения.

Если представить себе сечение как очень тонкую пластинку с равномерно распределенной массой, то центр тяжести сечения, как известно из теоретической механики, характеризуется тем, что статические моменты относительно любой проходящей через него оси обращаются в нуль:

$$\int\limits_F x\, dF=0,\quad \int\limits_F y\, dF=0. \tag{11}$$

Для приведенного центра тяжести

$$\int\limits_F xE\, dF=0,\quad \int\limits_F yE\, dF=0. \tag{12}$$

При определении обычного центра тяжести все элементы dF обладают одинаковой массой. При нахождении приведенного центра тяжести элементу dF приписывается масса, пропорциональная модулю упругости E. Для стержня с постоянным модулем упругости ($E=\text{const}$) приведенный центр тяжести совпадает с обычным. В следующем разделе будут указаны способы нахождения центров тяжести поперечных сечений стержня. При условии (12) обращаются в нуль элементы C_{12}, C_{21}, C_{13} и C_{31} матрицы жесткости. Начало координат еще не полностью определяет положение всей системы. На рис. 8.6 показаны две центральные системы координат, т. е. системы, имеющие начало в центре тяжести или в приведенном центре тяжести сечения.

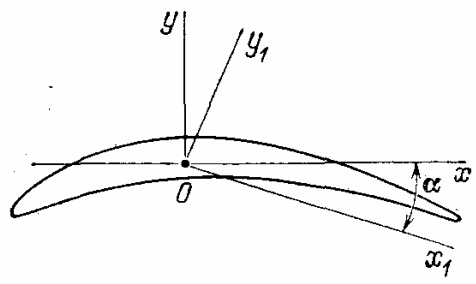


Рис. 8.6. Главные оси сечения

Положение системы x, y будем характеризовать углом α, на который она повернута относительно заранее выбранной системы координат x_1, y_1. Угол α принят таким, чтобы

$$\int_F xyE\,dF = 0. \tag{13}$$

Последнее условие вместе с условиями (12) определяет главную систему координат, оси которой называются *главными осями сечения*. В следующем разделе будут даны способы нахождения главных осей сечения.

При условии (13)

$$C_{23} = C_{32} = 0.$$

Итак, если оси x, y являются главными центральными осями сечения, то матрица жесткости становится диагональной, т. е. отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали; тогда получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{N + N_T}{C_{11}} = \frac{N}{\int_F E\,dF} + \frac{\int_F E\alpha_T T\,dF}{\int_F E\,dF}, \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x + M_{xT}}{C_{22}} = \frac{M_x}{\int_F y^2 E\,dF} + \frac{\int_F Ey\alpha_T T\,dF}{\int_F y^2 E\,dF}, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y + M_{yT}}{C_{33}} = \frac{M_y}{\int_F x^2 E\,dF} + \frac{\int_F Ex\alpha_T T\,dF}{\int_F x^2 E\,dF}. \tag{16}$$

В правых частях равенств (14)—(16) первое слагаемое выражает действие внешних усилий, второе — влияние изменения температуры.

Замечание. Задачу изгиба и растяжения стержня можно решать, конечно, в произвольной системе координат, но тогда простых соотношений (14)—(16) не получается.

В общем случае из системы (9) вытекает, что

$$\{\chi\} = [C_{ij}]^{-1}(\{M\} + \{M_T\}),$$

где $[C_{ij}]^{-1}$ — матрица, обратная матрице жесткости $[C_{ij}]$.

Если оси x, y являются главными осями, то матрица жесткости и обратная матрица имеют вид

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \quad [C_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/C_{33} \end{bmatrix}.$$

Гипотеза плоских сечений и, следовательно, соотношения (14)—(16), полученные на основании гипотезы плоских сечений, справедливы и для стержней переменного сечения, если сечения достаточно «плавно» изменяются по длине стержня. В местах резкого (ступенчатого) изменения сечений может возникнуть концентрация напряжений, которая рассматривается в дальнейшем.

Напряжения растяжения и изгиба в стержне от действия внешних сил. Предположим, что температура тела во время работы не изменяется. Тогда, полагая в соотношении (5) $\alpha_T T = 0$, получим

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right).$$

Учитывая равенства (14)—(16), найдем общую формулу для нормальных напряжений в стержне при действии внешних силовых факторов:

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{M_x}{\int\limits_F y^2E\,dF} - x\frac{M_y}{\int\limits_F x^2E\,dF}\right\},$$

или

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x} - x\frac{M_y}{B_y}\right\}, \tag{17}$$

где $A = \int\limits_F E\,dF$ — жесткость при растяжении; $B_x = \int\limits_F y^2E\,dF$, $B_y = \int\limits_F x^2E\,dF$ — жесткости при изгибе.

Для стержня с постоянным модулем упругости (основной расчетный случай)

$$\sigma = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}, \tag{18}$$

где $F = \int\limits_F dF$ — площадь поперечного сечения;

$$J_x = \int\limits_F y^2\,dF, \quad J_y = \int\limits_F x^2\,dF \tag{19}$$

— моменты инерции сечения относительно осей x и y соответственно.

Первый член в правой части равенства (18) выражает напряжения от растяжения или сжатия, два последующих члена — напряжения изгиба.

Замечания. 1. Формула (18) является одной из основных во всем сопротивлении материалов. Она показывает, что для анализа напряжений за начало координат надо принять центр тяжести сечения и к этой точке сечения (точнее, к системе координат) привести внешние силы. Нормальное усилие, действую-

щее в центре тяжести, вызывает напряжения растяжения или сжатия, одинаковые во всех точках сечения. Напряжения изгиба зависят от величины изгибающих моментов, геометрических характеристик сечения (моментов инерции) и координат точки.

2. Нормальные напряжения от внешних силовых факторов не зависят от абсолютной величины модуля упругости материала, а только от его распределения в точках сечения. Из равенства (17) следует, что при изменении модуля упругости во всех точках сечения одновременно в k раз напряжения остаются прежними.

Если модуль упругости одинаков во всех точках сечения (формула (18)), то напряжения в стержне не зависят от E. В стальном или дюралевом стержне при одинаковых геометрических размерах и действующих нагрузках напряжения не различаются. Упругие перемещения стержней будут, разумеется, разными. Для закона распределения напряжений (формула (18)) решающим было предположение об упругости материала. Подобный результат имеет общее значение в задачах теории упругости.

3. Формулы (17) и (18) применимы и для стержней переменного сечения, когда упруго-геометрические характеристики сечения изменяются по длине стержня достаточно плавно.

Пример и некоторые дополнительные понятия. Определим напряжения при изгибе стержня прямоугольного сечения под действием сосредоточенной

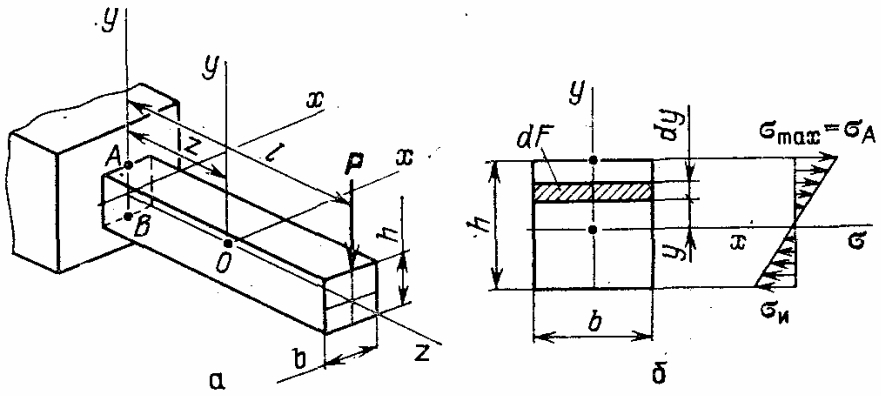


Рис. 8.7. Изгиб стержня прямоугольного сечения: *а* — стержень; *б* — поперечное сечение стержня

силы P (рис. 8.7). Рассмотрим сечение на расстоянии z от заделки. Начало координат поместим в центре тяжести сечения.

Изгибающий момент возрастает по мере удаления от точки приложения силы. Напряжения изгиба определим по формуле (18), считая модуль упругости материала стержня постоянным.

Учитывая, что осевое усилие N и изгибающий момент M_y отсутствуют, получим

$$\sigma = y\frac{M_x}{J_x} = y\frac{P(l-z)}{J_x}.$$

Остается определить момент инерции поперечного сечения:

$$J_x = \int\limits_F y^2\,dF = b\int\limits_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy = \frac{bh^3}{12},$$

и окончательно

$$\sigma = y\frac{12P(l-z)}{bh^3}. \qquad (20)$$

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшее напряжение. Если стержень призматический, то опасным будет сечение, где изгибающий момент наибольший. В рассматриваемом примере оно расположено в заделке стержня.

Как следует из равенства (20), напряжения изгиба распределяются линейно по высоте сечения. В точках сечения, лежащих на линии $y = 0$, напряжения изгиба отсутствуют. Линия, в точках которой напряжения изгиба отсутствуют, называется *нейтральной линией* сечения. В рассматриваемом примере нейтральной линией является ось x. По мере удаления от нейтральной линии напряжения изгиба возрастают. В опасном сечении ($z = 0$) точки с наибольшими напряжениями изгиба называются опасными точками.

Максимальное напряжение изгиба будет при $y = h/2$:

$$\sigma_{\text{и max}} = \frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{Pl}{W} = \frac{M}{W}, \tag{21}$$

где M — действующий в рассматриваемом сечении изгибающий момент.

Величина $W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{J_x}{y_{\max}}$ называется *моментом сопротивления сечения* изгибу. В точке B ($y = -h/2$) напряжение изгиба будет таким же по величине, но противоположным по знаку: $\sigma_B = -\frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2}$.

Расчетные формулы (17) и (18) для нормальных напряжений в стержне по своей структуре достаточно просты, затруднения могут возникнуть при определении главных осей и упруго-геометрических характеристик сечения, что будет разобрано в следующем разделе, а сейчас рассмотрим вкратце расчет температурных напряжений.

Температурные напряжения. В пределах упругости материала напряжения от внешних сил и нагрева можно находить независимо. Рассмотрим определение температурных напряжений в стержне, считая, что внешние нагрузки отсутствуют. Внося равенства (14)—(16) в соотношение (15), получим формулу для температурных напряжений

$$\sigma_{\text{тем}} = E\left(\frac{\int\limits_F E\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F Ey\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F y^2E\,dF} + x\frac{\int\limits_F Ex\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F x^2E\,dF} - \alpha_T T\right). \tag{22}$$

Покажем, что в равномерно нагретом стержне, когда

$$\alpha_T T = \text{const} = C, \tag{23}$$

температурные напряжения отсутствуют. Подставляя значение $\alpha_T T$ из (23), находим $\sigma_{\text{тем}} = 0$, так как оси x, y проходят через приведенный центр тяжести. Результат справедлив при статически определимых условиях закрепления, когда температурные деформации стержня не стеснены (например, один из торцов стержня свободен от закрепления).

Если нагрев (однородного стержня) осуществляется до температур, при которых изменением модуля упругости можно прене-

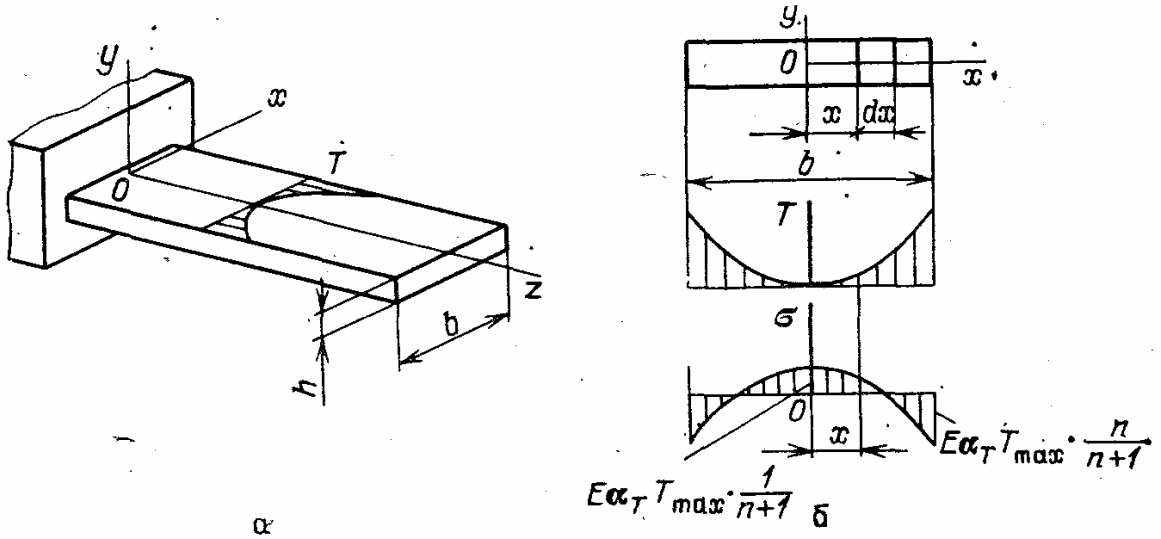
бречь ($E = \text{const}$), то из соотношения (22) получаем более простую зависимость:

$$\sigma_{\text{тем}} = E\left(\frac{\int\limits_F \alpha_T T\,dF}{F} + y\frac{\int\limits_F y\alpha_T T\,dF}{J_x} + x\frac{\int\limits_F x\alpha_T T\,dF}{J_y} - \alpha_T T\right). \qquad (24)$$

Рассмотрим в качестве примера определение температурных напряжений в стержне прямоугольного сечения (рис. 8.8, *а*), основание которого b, высота h. Температура изменяется по степенному закону (рис. 8.8, *б*):

$$T(x) = T_{\max}\left(\frac{2x}{b}\right)^n, \qquad (25)$$

причем показатель степени n является четным и температура имеет симметричное распределение; по координате y температура не изменяется.



а

Рис. 8.8. Определение температурных напряжений в стержне: *а* — неравномерный нагрев стержня; *б* — распределение температур и температурных напряжений

Предполагается для простоты, что влиянием нагрева на величину модуля упругости можно пренебречь.

Отметим, что

$$\int\limits_F y\alpha_T T\,dF = 0, \qquad \int\limits_F x\alpha_T T\,dF = 0 \qquad (26)$$

как статические моменты площади сечения с симметрично распределенным «весом»; это вытекает из физических предпосылок, так как принятое распределение температур не вызывает изгиба стержня, сечение стержня как жесткое тело может получить только поступательное движение, оставаясь параллельным своему положению до нагрева. Наконец, равенство (26) доказывается строго с помощью интегрирования по площади сечения. Далее находим

$$F = bh, \qquad J_y = \frac{hb^3}{12},$$

$$\int\limits_F \alpha_T T\,dF = 2\alpha_T T_{\max} h \int\limits_0^{b/2}\left(\frac{2x}{b}\right)^n dx = \frac{\alpha_T T_{\max} hb}{n+1}.$$

Из формулы (24) вытекает

$$\sigma_{\text{тем}} = E\alpha_T T_{\max}\left[\frac{1}{n+1} - \left(\frac{2x}{b}\right)^n\right]. \qquad (27)$$

Распределение температурных напряжений по координате x показано на рис. 8.8, *б*.

В более нагретых частях стержня возникают сжимающие температурные напряжения. Физически это объясняется тем, что крайние волокна стержня получают большую температурную деформацию и при отсутствии поперечных

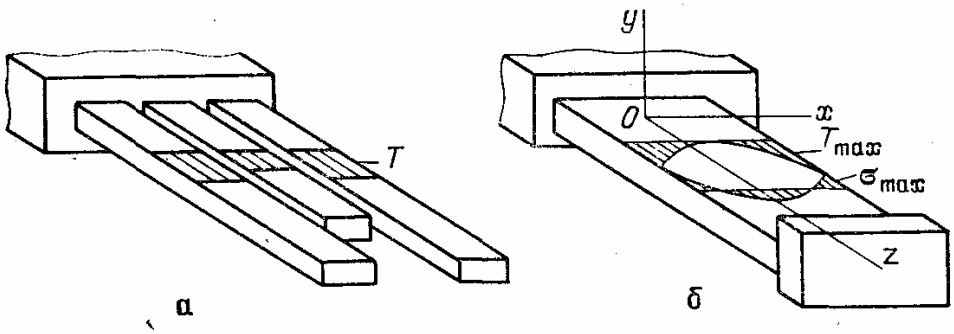


Рис. 8.9. Картина температурных деформаций в стержне: *а* — поперечные связи отсутствуют; *б* — в конце стержня имеется жесткая пластинка

связей стержня деформируются так, как показано на рис. 8.9, *а*. Поперечные связи удерживают крайние волокна (рис. 8.9, *б*), создавая в них напряжения сжатия, а в менее нагретых частях стержня — растяжения.

Замечания. 1. При выводе формулы для температурных напряжений (22) или (24) предполагалась справедливость гипотезы плоских сечений. При определении температурных напряжений она нарушается вблизи свободного торца стержня.

Действительно, по равенству (22) температурные напряжения одинаковы по всей длине стержня, вместе с тем свободный торец стержня свободен от каких-либо напряжений. Если же на торце стержня имеется жесткая пластинка, то температурные напряжения будут во всем стержне одинаковыми по длине и строго соответствовать формуле (22). При свободном торце в концевой области должны возникнуть касательные напряжения (поперечные связи), которые на некотором удалении от свободного торца (порядка размера сечения) сделают все-таки поперечные сечения плоскими и, следовательно, формулы (22) и (24) справедливыми.

2. Напряжения от неравномерного нагрева (температурные напряжения) в статически определимом стержне (или свободном от закрепления) всегда самоуравновешены. Это означает, что

$$\int_F \sigma_{\text{тем}} dF = 0, \quad \int_F x\sigma_{\text{тем}} dF = 0, \quad \int_F y\sigma_{\text{тем}}\, dF = 0.$$

В сущности, эти условия были использованы при выводе уравнений (6) — (8); уравнения (22) и (24) удовлетворяют этим условиям при любом распределении температуры.

Свойством самоуравновешенности обладают и остаточные напряжения, существующие в элементах конструкции после их изготовления. Температурные и остаточные напряжения имеют, в сущности, одну причину возникновения — неравномерные первоначальные деформации (в результате нагрева или в процессе изготовления).

Обоснование гипотезы плоских сечений. Пусть имеется стержень постоянного сечения с постоянными силовыми факторами по

длине (рис. 8.10). Предполагается, что температура материала стержня одинакова по всей длине, но может быть различной в точках поперечного сечения. Если внешние факторы нагружения постоянны по длине стержня, то, за исключением концевых областей, напряжения и деформации не будут зависеть от координаты z.

В этом случае в уравнениях совместности деформаций (разд. 11) производные по z обращаются в нуль, и тогда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y} = 0. \qquad (28)$$

Из последних соотношений при

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0 \qquad (29)$$

следует

$$\varepsilon_z = C_0 + C_1 x + C_2 y, \qquad (30)$$

где C_0, C_1, C_2 — постоянные величины.

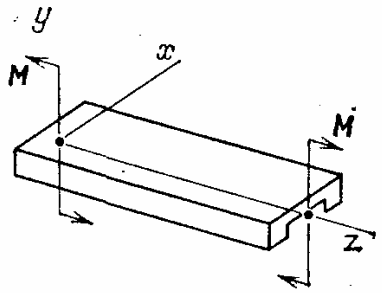


Рис. 8.10. Стержень с постоянными силовыми факторами по длине

Условие (30) совпадает с равенством (2) и выражает гипотезу плоских сечений.

Замечание. В основе доказательства гипотезы плоских сечений лежит предположение о постоянстве силовых факторов по длине стержня. Это справедливо, когда стержень загружен по торцам изгибающими моментами и осевыми усилиями, но не соблюдается при наличии поперечной нагрузки. При изгибе от поперечной нагрузки для стержней переменного сечения расчет по гипотезе плоских сечений *является приближенным методом.*

Часто в инженерных расчетах решения, строго доказанные при определенных ограничениях, успешно используются за пределами таких ограничений, если, разумеется, возникающие погрешности оказываются второстепенными.

30. Упруго-геометрические характеристики сечения стержня при изгибе. Главные оси, главные моменты инерции

Упруго-геометрические характеристики. При определении напряжений изгиба и растяжения (по формуле (17)), температурных напряжений (по формуле (22)) необходимо знать упруго-геометрические характеристики сечения стержня: жесткость при растяжении

$$A = \int_F E\, dF; \qquad (31)$$

жесткость при изгибе относительно главной оси x

$$B_x = \int_F y^2 E\, dF; \qquad (32)$$

жесткость при изгибе относительно главной оси y

$$B_y = \int_F x^2 E\, dF. \qquad (33)$$

Главные оси сечения проходят через приведенный центр тяжести сечения, и для главных осей координат выполняются условия

$$\int_F xE\,dF = 0, \quad \int_F yE\,dF = 0, \quad \int_F xyE\,dF = 0; \tag{34}$$

жесткости A, B_x и B_y называются *упруго-геометрическими характеристиками* сечения при изгибе.

При постоянном (в точках сечения) модуле упругости

$$A = EF, \quad B_x = EJ_x, \quad B_y = EJ_y, \tag{35}$$

где F — площадь поперечного сечения; J_x, J_y — осевые (экваториальные) моменты инерции сечения относительно осей x и y соответственно. Величины F, J_x и J_y называются *геометрическими характеристиками сечения*, так как они определяются только геометрической конфигурацией сечения. Упруго-геометрические характеристики зависят также от распределения модуля упругости по сечению.

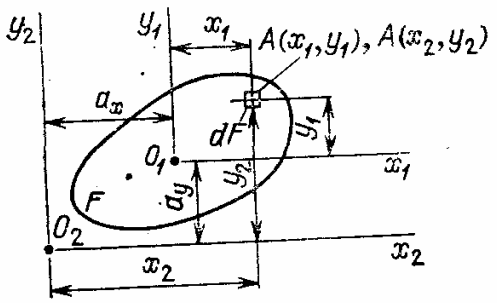


Рис. 8.11. Определение центра тяжести сечения (точки O_1)

Определение приведенного центра тяжести сечения. Для определения приведенного центра тяжести сечения выберем произвольным образом вспомогательную систему координат x_2, y_2 (рис. 8.11).

Пусть точка O_1 — приведенный центр тяжести. Во вспомогательной системе его координатами будут a_x, a_y.

Если оси x_1, y_1, параллельные осям x_2, y_2, проходят через приведенный центр тяжести, то статические моменты сечения относительно указанных осей обращаются в нуль:

$$S^*_{x1} = \int_F y_1 E\,dF = 0, \quad S^*_{y1} = \int_F x_1 E\,dF = 0. \tag{36}$$

В последних равенствах E — модуль упругости в данной точке сечения ($E > 0$). Отметим, что dF всегда считается положительным ($dF > 0$). Из рис. 8.11 следует, что

$$x_1 = x_2 - a_x, \quad y_1 = y_2 - a_y. \tag{37}$$

Теперь из равенств (35) находим

$$\int_F (y_2 - a_y)\,E\,dF = 0, \quad \int_F (x_2 - a_x)\,E\,dF = 0. \tag{38}$$

Координаты приведенного центра тяжести определяются зависимостями

$$a_x = \frac{\int_F x_2 E\,dF}{\int_F E\,dF}, \quad a_y = \frac{\int_F y_2 E\,dF}{\int_F E\,dF}. \tag{39}$$

При постоянном модуле упругости получаем значения координат центра тяжести, известные из курса теоретической механики:

$$a_x = \frac{1}{F}\int_F x_2\,dF, \qquad a_y = \frac{1}{F}\int_F y_2\,dF. \tag{40}$$

Отметим, что если какая-либо ось является осью симметрии сечения, то центр тяжести сечения обязательно лежит на этой оси. Для приведенного центра тяжести это справедливо, если распределение модуля упругости симметрично относительно указанной оси. При двух осях симметрии центр тяжести сечения лежит на их пересечении.

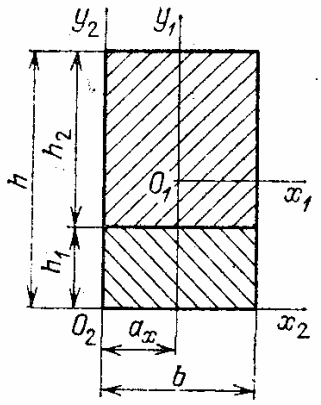


Рис. 8.12. Определение приведенного центра тяжести для биметаллического стержня прямоугольного сечения

Замечание. Если статический момент относительно какой-либо оси равен нулю, то ось проходит через центр тяжести сечения. Доказательство основано на том, что по определению центр тяжести удовлетворяет условиям (36). Но если статический момент обращается в нуль для двух осей, то он равен нулю и для любой оси, проходящей через точку пересечения этих осей (докажите!).

Пример определения приведенного центра тяжести. Рассмотрим биметаллический стержень прямоугольного сечения (рис. 8.12) и выберем начало вспомогательной системы координат в левом нижнем углу. Так как сечение имеет ось симметрии, то $a_x = b/2$.

Величину a_y определяем по формуле (39). Предварительно вычислим жесткость при растяжении и жесткость при изгибе

$$\int_F E\,dF = E_1 bh_1 + E_2 bh_2,$$

$$\int_F y_2 E\,dF = bE_1\int_0^{h_1} y_2\,dy_2 + bE_2\int_{h_1}^{h} y_2\,dy_2 = bE_1\frac{h_1^2}{2} + bE_2\frac{1}{2}\left(h^2 - h_1^2\right).$$

Далее находим

$$a_y = \frac{E_1 h_1^2 + E_2\left(h^2 - h_1^2\right)}{2\left(E_1 h_1 + E_2 h_2\right)}.$$

При одинаковых значениях модулей упругости ($E_1 = E_2$) получаем $a_y = h/2$.

Геометрические характеристики сечения стержня. Рассмотрим сначала наиболее часто встречающийся случай однородного стержня, когда все точки сечения имеют одинаковый модуль упругости ($E = \text{const}$). В этом случае сопротивление стержня изгибу и растяжению зависит от геометрических характеристик сечения (моментов инерции относительно главных осей и т. д.). В ближайших разделах рассматривается круг вопросов, связанных с определением геометрических свойств сечений. Затем полученные результаты легко распространяются на определение упруго-геометрических характеристик сечения.

В рассматриваемом случае ($E = \text{const}$) требуется найти оси x, y, проходящие через центр тяжести сечения и удовлетворяющие условию

$$\int_F xy\,dF = 0. \tag{41}$$

Пусть имеются произвольные центральные оси x, y (рис. 8.13); начало координат расположено в центре тяжести сечения.

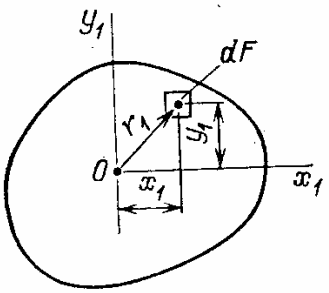


Рис. 8.13. Определение центральных моментов инерции сечения

Осевым, или экваториальным, *моментом инерции* относительно оси x_1 называется интеграл

$$J_{x1} = \int_F y_1^2\,dF. \tag{42}$$

По определению момент инерции — величина положительная; размерность $\dim J_x = [L^4]$ (обычно в см^4 или мм^4).

Для оси y_1 осевой момент

$$J_{y1} = \int_F x_1^2\,dF. \tag{43}$$

В расчетных соотношениях часто встречается величина

$$J_{x1y1} = \int_F x_1 y_1\,dF, \tag{44}$$

которая называется *центробежным моментом инерции* сечения относительно системы координат x_1, y_1. Несколько странное название момента связано с тем, что он ранее встречался в механике при учете момента центробежных сил.

Отметим еще *полярный момент инерции* сечения

$$J_{p1} = \int_F r^2\,dF = \int_F (x_1^2 + y_1^2)\,dF, \tag{45}$$

где r — расстояние от элемента площади до центра тяжести сечения (см. рис. 8.13).

Очевидно, что

$$J_{p1} = J_{y1} + J_{x1}. \tag{46}$$

Полярный момент инерции сечения рассматривался ранее в задачах кручения круглых стержней (валов).

Для главных осей сечения центробежный момент инерции равен нулю:

$$J_{xy} = \int_F xy\,dF = 0. \tag{47}$$

Напомним, что оси x_1, y_1 имеют произвольное, заранее выбранное направление. Пусть главные оси x, y повернуты на угол α по отношению к осям x_1, y_1. Прежде всего нам понадобится известная из математики формула для координат точки в новой, повернутой системе координат. Проектируя отрезок OA (рис. 8.14) на ось x и рассматривая его как сумму векторов OB и BA, получим

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha. \qquad (48)$$

Подобным образом

$$y = -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \qquad (49)$$

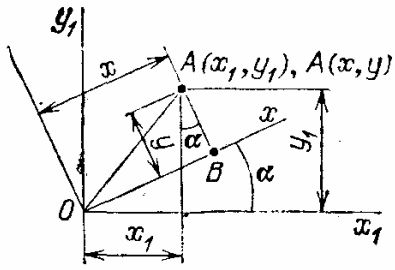


Рис. 8.14. Изменение координат точки A при повороте системы координат

Замечание. Формулы (48) и (49) часто встречаются в различных технических задачах, и их вывод надо обязательно усвоить и повторить самостоятельно!

Угол поворота главных осей найдем из равенства (41) после учета соотношений (48) и (49):

$$J_{xy} = \int_F xy\,dF = \int_F (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha)(-x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\,dF = 0,$$

или

$$J_{xy} = \frac{1}{2}(J_{x1} - J_{y1}) \sin 2\alpha + J_{x1y1} \cos 2\alpha = 0. \qquad (50)$$

Из последнего равенства получаем важную зависимость

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x1y1}}{J_{y1} - J_{x1}}, \qquad (51)$$

где α_0 — значение угла α, удовлетворяющее условию (50). Полученная формула определяет углы, на которые должна быть повернута система координат x, y по отношению к системе координат x_1, y_1. Так как тангенс угла — функция периодическая с периодом π, то уравнение (51) справедливо и при углах

$$2\alpha_0 \pm k\pi = 2\alpha_k \quad , \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

или

$$\alpha_k = \alpha_0 \pm k\frac{\pi}{2}. \qquad (52)$$

Различные положения системы координат x, y ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) показаны на рис. 8.15. Однако все они соответствуют одним и тем же главным направлениям *1* и *2*. В связи с этим условимся об определенном выборе угла α, характеризующего положение главных осей.

Для положительных значений $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ имеем $0 < 2\alpha_0 < \pi/2$ и будем считать $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \pi/4$. Для отрицательных значений $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ по-

лучим $-\pi/2 < 2\alpha_0 < 0$ и $-\pi/4 \leqslant \alpha_0 \leqslant 0$. Таким образом, достаточно рассматривать поворот главной системы координат в пределах

$$-\pi/4 < \alpha_0 < \pi/4. \tag{53}$$

Положение главных осей x, y относительно вспомогательных x_1, y_1 показано на рис. 8.16. Во многих случаях главные оси сечения могут быть названы без предварительного расчета. Например,

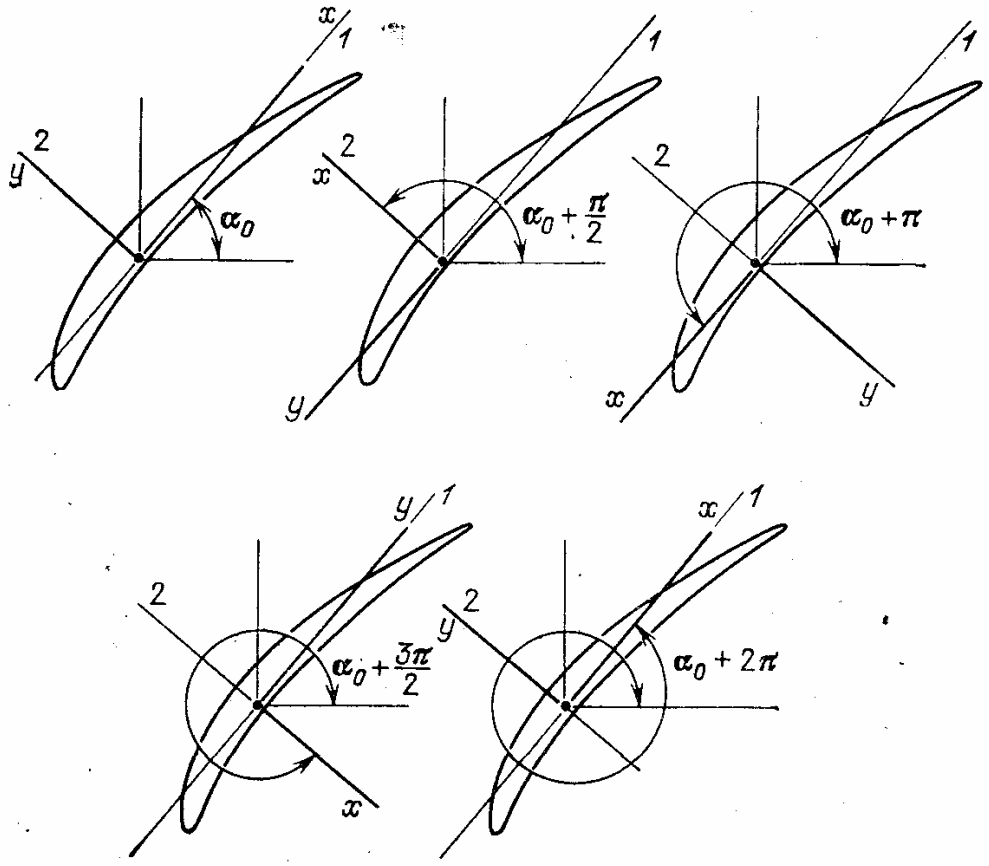


Рис. 8.15. Различные положения системы координат, соответствующие одним и тем же главным направлениям *1* и *2*

если какая-либо ось является осью симметрии сечения, то она и любая ей перпендикулярная образуют главные оси сечения (рис. 8.17). В самом деле, элементу площади dF всегда соответствует «нормальный» элемент, у которого изменился знак одной из координат, и поэтому для указанных на рис. 8.17 осей

$$J_{xy} = \int_F xy\, dF = 0.$$

Замечание. Сколько главных (центральных) осей имеет сечение? Только две (оси x, y) или бесчисленное множество. Последний случай встречается не так часто; к нему относятся сечения, имеющие бесконечно много осей симметрии (например, круглые), или сечения с полной циклической симметрией (например, квадратные).

Главные моменты инерции сечения. Осевые моменты инерции относительно главных осей x, y называются *главными моментами инерции.*

Если ось x составляет угол α с осью x_1, то осевой момент инерции

$$J_x = \int_F y^2\,dF = \int_F (-x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)^2\,dF.$$

Из последнего соотношения получаем

$$J_x = J_{x1}\cos^2\alpha + J_{y1}\sin^2\alpha - J_{x1\,y1}\sin 2\alpha. \qquad (54)$$

Так как

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

то зависимость (54) представим в виде

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) - \frac{1}{2}(J_{y1} - J_{x1})\cos 2\alpha - J_{x1y1}\sin 2\alpha. \qquad (55)$$

Равенство (55) справедливо для любой оси x, составляющей угол α

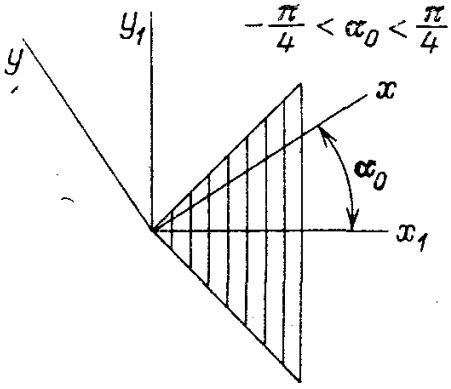


Рис. 8.16. Положение главных осей x, y относительно вспомогательных x_1, y_1

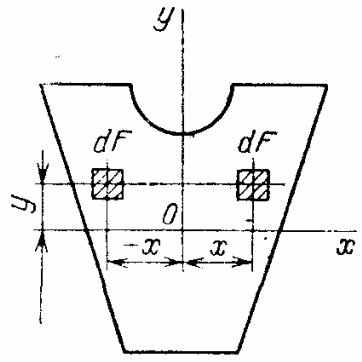


Рис. 8.17. Симметричное сечение (ось симметрии всегда является одной из главных осей сечения)

с осью x_1. Для главной оси $\alpha = \alpha_0$ и в силу условия (51) можно написать

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) - \frac{1}{2}(J_{y1} - J_{x1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \qquad (56)$$

Учитывая тождество

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha_0}}, \qquad (57)$$

справедливое при условии (53), и формулу (51), находим для

главной оси x

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) - \frac{1}{2}(J_{y1} - J_{x1})\sqrt{1 + \frac{4J_{x1y1}^2}{(J_{y1} - J_{x1})^2}}. \quad (58)$$

Ось x составляет с осью x_1 угол α_0, причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x1y1}}{J_{y1} - J_{x1}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{4}. \quad (59)$$

Величина J_x представляет один из главных моментов инерции сечения. Второй главный момент соответствует осевому моменту инерции относительно оси y. При повороте осей координат на угол α

$$J_y = \int_F x^2 dF = \int_F (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha)^2 dF =$$

$$= J_{y1}\cos^2\alpha + J_{x1}\sin^2\alpha + J_{x1y1}\sin 2\alpha. \quad (60)$$

Если $\alpha = \alpha_0$, то для главного момента инерции получим равенство, аналогичное (56):

$$J_y = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) + \frac{1}{2}(J_{y1} - J_{x1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \quad (61)$$

или

$$J_y = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) + \frac{1}{2}(J_{y1} - J_{x1})\sqrt{1 + \frac{4J_{x1y1}^2}{(J_{y1} - J_{x1})^2}}. \quad (62)$$

Формулы (57) и (60) дают значения осевых моментов инерции относительно главных осей x, y (главные моменты инерции сечения).

Свойство экстремальности главных моментов инерции. Осевой момент J_x относительно оси, повернутой на произвольный угол, определяется равенством (55). Найдем значение угла α, при котором J_x получает экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение. Для этого приравняем нулю производную:

$$\frac{dJ_x}{d\alpha} = -2J_{x1}\cos\alpha\sin\alpha + 2J_{y1}\sin\alpha\cos\alpha - 2J_{x1y1}\cos 2\alpha = 0,$$

что дает для угла α^*

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2J_{x1y1}}{J_{y1} - J_{x1}}.$$

Так как значения α^* и α_0 совпадают, то, следовательно, момент инерции относительно главной оси x обладает свойством экстремальности — он или наименьший, или наибольший для осей, проходящих через начало координат. Сумма моментов инерции отно-

сительно любых двух взаимно перпендикулярных осей с общим началом постоянна:

$$J_x + J_y = J_{x1} + J_{y1} = J_p.$$

Следовательно, если J_x имеет минимальное значение, то J_y — максимальное, и наоборот.

При $J_{y1} > J_{x1}$ значение J_x по формуле (58) соответствует минимальному значению. Из среднего значения $(J_{x1} + J_{y1})/2$ вычитается положительная величина.

При $J_{y1} > J_{x1}$ получим из равенства (58)

$$J_x = J_{\min} = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_{y1} - J_{x1})^2 + 4J_{x1y1}^2}. \qquad (63)$$

При $J_{y1} < J_{x1}$ момент относительно оси x будет иметь максимальное значение

$$J_x = J_{\max} = \frac{1}{2}(J_{x1} + J_{y1}) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_{y1} - J_{x1})^2 + 4J_{x1y1}}. \qquad (64)$$

Последнее соотношение вытекает из (58), если учесть, что при $J_{y1} < J_{x1}$

$$\sqrt{1 + \frac{4J_{x1y1}^2}{(J_{y1} - J_{x1})^2}} = -\frac{1}{J_{y1} - J_{x1}}\sqrt{(J_{y1} - J_{x1})^2 + 4J_{x1y1}^2}. \qquad (65)$$

Замечания. 1. В обоих случаях ($J_{y1} > J_{x1}$ и $J_{y1} < J_{x1}$) расчет, разумеется, можно вести по формуле (58) без дополнительных преобразований, но равенства (63) и (64) обладают большей наглядностью. Как уже отмечалось, при

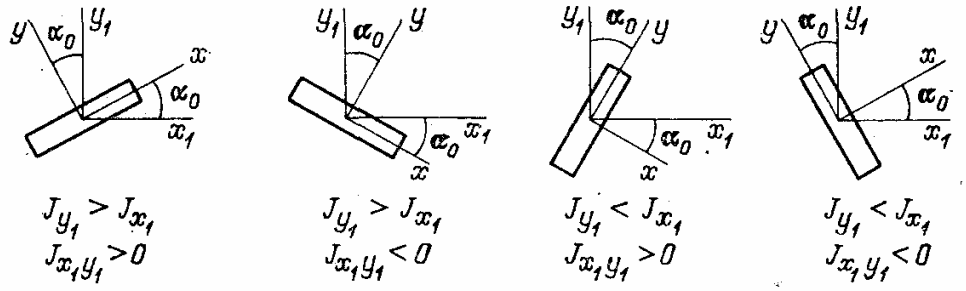


Рис. 8.18. Положения главных осей сечения относительно вспомогательной системы координат x_1, y_1

$J_x = \min$ имеем $J_y = \max$ и при $J_x = \max$ будет $J_y = \min$. Положение главных осей x, y при различной ориентации сечения стержня относительно вспомогательной системы координат x_1, y_1 показано на рис. 8.18.

2. Ось с минимальным моментом инерции (рис. 8.19) направлена так, чтобы среднеквадратичное отклонение элементов площади относительно оси было бы минимальным $\left(\Delta = \frac{1}{F}\int_F y^2\,dF = \frac{1}{F}J_x = \min\right)$. Так как для всех осей $F = \text{const}$, то $\Delta = \min \in J_{x\min}$.

Моменты инерции относительно произвольных осей, выраженные через главные моменты. Будем характеризовать произвольную (центральную) систему координат углом α, который она образует

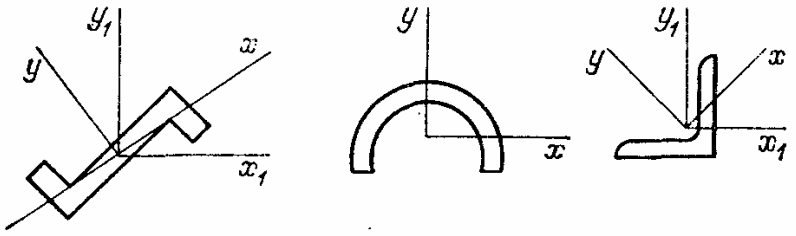


Рис. 8.19. Ось x — ось с минимальным моментом инерции ($J_x = J_{min}$). Ось расположена так, что дает минимум среднеквадратичного отклонения элементов площади от оси

с главной системой координат x, y. В связи с этим изменим обозначения и будем теперь считать, что оси x_1, y_1 повернуты на угол α. Тогда после простого изменения обозначений получим из равенств (50), (54), (60)

$$J_{x1y1} = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha, \tag{66}$$

$$J_{x1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha, \tag{67}$$

$$J_{y1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha. \tag{68}$$

Из последних соотношений вытекают интересные выводы. Если главные моменты инерции равны ($J_x = J_y$), то все оси сечения

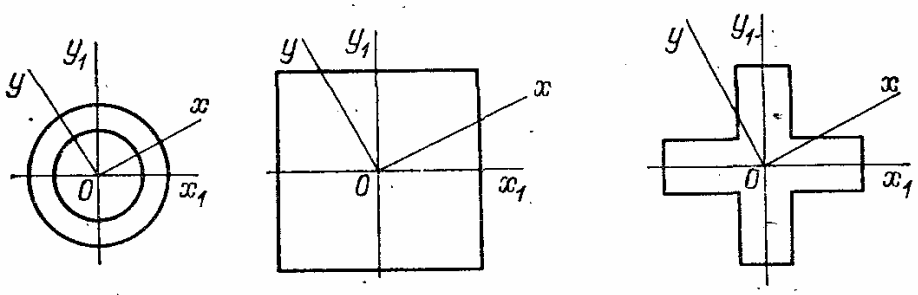


Рис. 8.20. Сечения, имеющие одинаковые главные моменты. Для них любые центральные оси являются главными, а все осевые моменты инерции одинаковы

являются главными, так как $J_{x1y1} = 0$ для любого значения α. При одинаковых главных моментах инерции $J_x = J_y$ моменты инерции относительно любой центральной оси имеют одинаковые значения. На рис. 8.20 показаны некоторые сечения с одинаковыми главными моментами.

Расчет геометрических характеристик сечения. Для простейших сечений стержня геометрические характеристики показаны на рис. 8.21.

Для расчета сложных сечений полезными являются соотношения между моментами инерции для параллельных осей (рис. 8.22) (оси x_1, y_1 являются центральными):

$$J_{x2} = \int_F y_2^2\, dF = \int_F (y_1 + a_y)^2\, dF = J_{x1} + a_y^2 F, \tag{69}$$

$$J_{y2} = \int_F x_2^2\, dF = J_{y1} + a_x^2 F, \tag{70}$$

$$J_{x2y2} = \int_F (y_1 + a_y)(x_1 + a_x) = J_{x1y1} + a_x a_y F. \tag{71}$$

Момент инерции полых сечений (рис. 8.23) можно рассматривать как разность

$$J_{x2} = \int_F y_2^2\, dF = \int_{F_1} y_2^2\, dF_1 - \int_{F_2} y_2^2\, dF_2, \tag{72}$$

где F_1, F_2 — площади, ограниченные наружным Γ_1 и внутренним Γ_2 контурами.

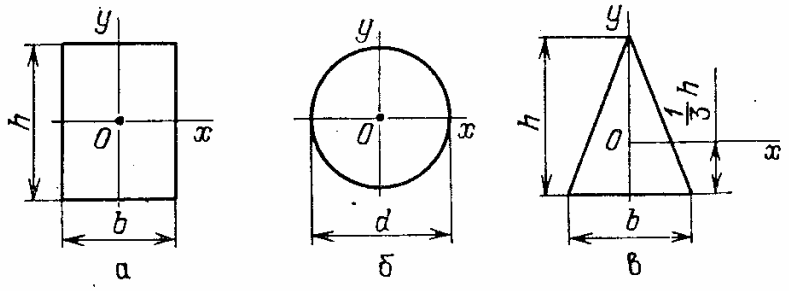


Рис. 8.21. Моменты инерции простейших сечений: *а* — прямоугольник, $J_x = bh^3/12$, $J_y = hb^3/12$; *б* — круг, $J_x = J_y = \pi d^4/64$; *в* — треугольник, $J_x = bh^3/36$, $J_y = hb^3/48$

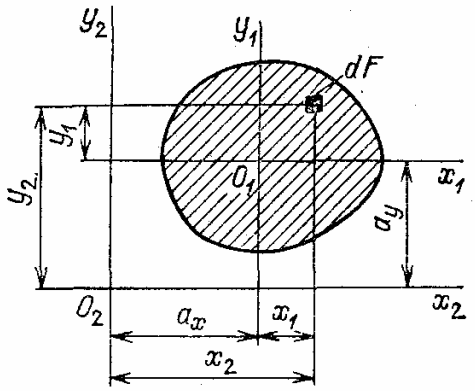


Рис. 8.22. Соотношение между моментами инерции для параллельных осей, оси x_1, y_1 — центральные

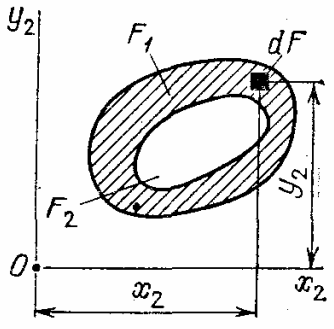


Рис. 8.23. Момент инерции полых (неодносвязных) сечений

Для сложных сечений геометрические характеристики находят с помощью численного расчета на ЭВМ. Координаты профиля задаются во вспомогательной системе координат x_2, y_2 в виде значений (рис. 8.24) ординат $y_{\text{верх}} = f_2(x_2)$,

$y_{\text{ниж}} = f_1(x_1)$. Площадь сечения

$$F = \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} (f_2(x_2) - f_1(x_2))\, dx_2; \tag{73}$$

координаты центра тяжести находятся по формуле (40):

$$a_x = \frac{1}{F} \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2 [f_2(x_2) - f_1(x_2)]\, dx_2, \tag{74}$$

$$a_y = \frac{1}{2F} \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} \left[f_2^2(x_2) - f_1^2(x_2)\right] dx_2.$$

Моменты инерции относительно осей x_2, y_2 могут быть вычислены по следующим формулам:

$$J_{x2} = \frac{1}{3} \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} \left[f_2^3(x_2) - f_1^3(x_2)\right] dx_2,$$

$$J_{y2} = \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2^2 [f_2(x_2) - f_1(x_2)]\, dx_2, \tag{75}$$

$$J_{x2y2} = \frac{1}{2} \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2 \left[f_2^2(x_2) - f_1^2(x_2)\right] dx_2.$$

При выводе равенств (75) использовались соотношения для элементарного прямоугольника с размерами $[f_2(x_2) - f_1(x_2)]$ и dx_2. Моменты относительно осей x_1, y_1 определяются формулами (69), (70), угол — равенством (51).

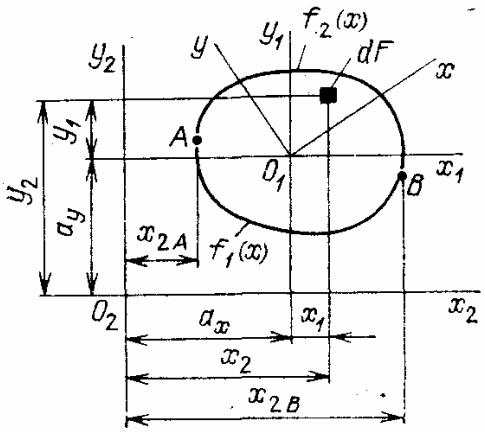


Рис. 8.24. Численный расчет геометрических сечений (x, y — главные центральные оси)

Главные моменты инерции находятся с помощью зависимостей (58) и (62). Для дополнительной проверки могут использоваться формулы для $J_{\min}$ и $J_{\max}$.

Для расчета напряжений изгиба необходимо знать координаты точек профиля в главной системе координат. С помощью соотношений (48) и (49) находим

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - a_x)\cos\alpha_0 + (y_2 - a_y)\sin\alpha_0, \\ y &= -(x_2 - a_x)\sin\alpha_0 + (y_2 - a_y)\cos\alpha_0, \end{aligned} \tag{76}$$

где координаты точек x_2, y_2 заданы (см. рис. 8.24).

Упруго-геометрические характеристики сечения стержня. Из сопоставления упруго-геометрических характеристик с чисто геометрическими характеристиками (соотношения (42)—(47)) следует практически важный вывод: упруго-геометрические характеристики сечения получаются из геометрических, если каждому элементу площади приписать множитель («вес»), численно равный величине модуля упругости в данной точке сечения.

Приведенный центр тяжести определяется соотношениями (12). Положение главных приведенных осей находится с помощью зависимости

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\int\limits_F x_1 y_1 E\, dF}{\int\limits_F x_1^2 E\, dF - \int\limits_F y_1^2 E\, dF}. \tag{77}$$

При $E = \text{const}$ соотношения (77) и (51) совпадают. Жесткость сечения на изгиб относительно главной оси x (равенство (32)) представляет приведенный момент инерции относительно этой оси:

$$B_x = J_x^* = \int\limits_F y^2 E\, dF. \tag{78}$$

Аналогично формулам (56) и (61) будем иметь

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{2}(B_{x1} + B_{y1}) - \frac{1}{2}(B_{y1} - B_{x1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\ B_y &= \frac{1}{2}(B_{x1} + B_{y1}) + \frac{1}{2}(B_{y1} - B_{x1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\ B_{x1} &= J_{x1}^* = \int\limits_F y_1^2 E\, dF, \qquad B_{y1} = J_{y1}^* = \int\limits_F x_1^2 E\, dF. \end{aligned} \tag{79}$$

Соответствующим образом переносятся и другие результаты, полученные для однородных сечений. В частности, формулы для параллельных осей (69)—(71) будут иметь следующий вид:

$$B_{x2} = B_{x1} + a_y^2 A, \quad B_{y2} = B_{y1} + a_x^2 A, \quad B_{x2y2} = B_{x1y1} + a_x a_y A, \tag{80}$$

где $A = \int\limits_F E\, dF$ — жесткость сечения при растяжении, a_x, a_y — координаты приведенного центра тяжести.

Пример определения упруго-геометрических характеристик Рассмотрим биметаллический стержень прямоугольного сечения (см. рис. 8.12). Оси x_1, y_1, проходящие через приведенный центр тяжести, будут одновременно и главными (центральными) осями x, y; жесткость при растяжении

$$A = \int\limits_F E\, dF = E_1 b h_1 + E_2 b h_2.$$

Координаты приведенного центра тяжести сечения были определены ранее:

$$a_x = \frac{1}{2} b, \qquad a_y = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}.$$

Для определения жесткости сечения на изгиб относительно главной оси $x_1 = x$ найдем сначала жесткость относительно вспомогательной оси x_2:

$$B_{x_2} = \int\limits_F y_2^2 E b\, dy_2 = \frac{1}{3} b E_2 (h^3 - h_1^3) + \frac{1}{3} b E_1 h_1^3.$$

Далее определяем B_x:

$$B_x = \int_F y^2 dF = B_{x2} - a_y^2 A = \frac{1}{3} bE_2 \left(h^3 - h_1^3\right) + \frac{1}{3} bE_1 h_1^3 - \\ - \frac{b}{4} \left[E_1 h_1^2 + E_2 \left(h^2 - h_1^2\right)\right]^2 \left(E_1 h_1 + E_2 h_2\right)^{-1}.$$

Величина B_y определяется просто:

$$B_y = \frac{E_1 h_1 b^3}{12} + \frac{E_2 h_2 b^3}{12}.$$

31. Условия равновесия элемента стержня и касательные напряжения изгиба

Вводные замечания. Изгиб стержня часто происходит при действии сосредоточенных или распределенных нагрузок, перпендикулярных оси стержня (рис. 8.25). В сечении стержня будут действовать не только изгибающие

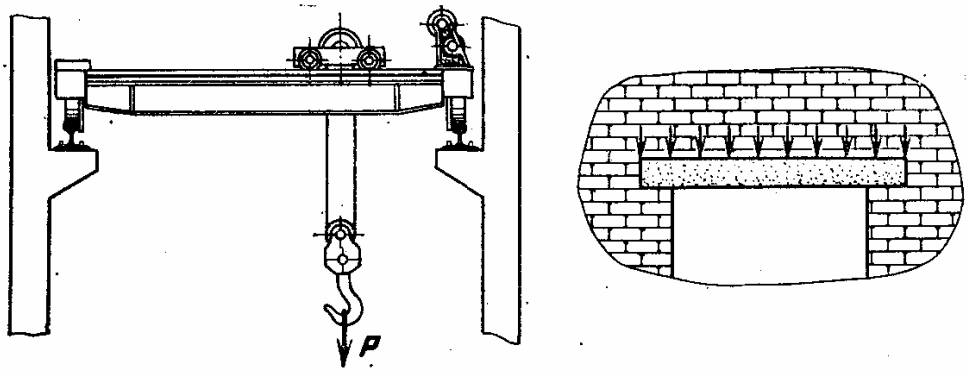


Рис. 8.25. Примеры изгиба стержней (балок) под действием поперечной нагрузки

моменты, но и перерезывающие усилия. Эти усилия создают в поперечном сечении касательные напряжения.

Рассмотрим сначала условия равновесия элемента стержня.

Условия равновесия элемента стержня. Пусть в сечении (рис. 8.26) действуют изгибающий момент $M_x = M(z)$ и перерезывающая сила $Q_y = Q(z)$. В простейших случаях, когда это не может вызвать недоразумений, индексы моментов и сил будем для краткости опускать. Направление силовых факторов предполагается положительным.

На стержень действует распределенная нагрузка $q(z)$, размерность $\dim q = \left[\frac{\text{сила}}{\text{длина}}\right]$ (например, Н/м).

Так как силовые факторы изменяются по длине стержня, то в сечении $z + dz$ действуют $Q + dQ$ и момент $M + dM$.

Рассмотрим равновесие элемента стержня, выделенного двумя поперечными сечениями; размер элемента вдоль оси стержня равен dz.

Проектируя все силы на вертика́льное направление, находим

$$dQ + q\,dz = 0, \quad \text{или} \quad dQ/dz = -q. \tag{81}$$

Составим сумму моментов относительно оси x, лежащей в сечении $z + dz$:

$$-M - Q\,dz + \frac{1}{2}\,q\,dz^2 + M + dM = 0.$$

Отбрасывая $q\,dz^2/2$ как бесконечно малую второго порядка, получим

$$dM/dz = Q. \tag{82}$$

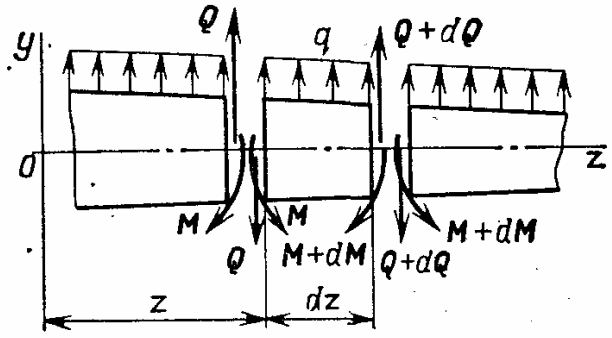


Рис. 8.26. Условия равновесия элемента стержня

Производная изгибающего момента равна перерезывающей силе. Уравнения (81) и (82) образуют условия равновесия элемента стержня при изгибе.

Замечание. Полученные условия равновесия справедливы для стержня постоянного или переменного сечений; при любых свойствах материала стержня они являются прямым следствием состояния равновесия.

При движении с ускорением элемента стержня к распределенным усилиям следует добавить по принципу Даламбера инерционные усилия.

Скачки перерезывающей силы и изгибающего момента. Допустим теперь, что в пределах элемента dz на стержень действует внешняя сосредоточенная сила P (рис. 8.27, *а*).

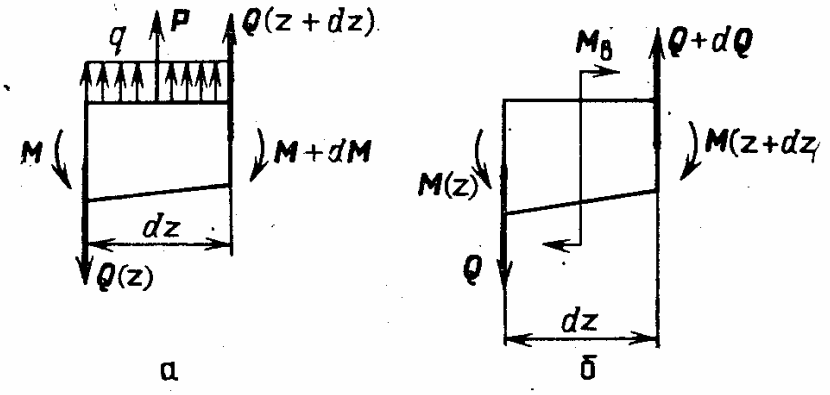


Рис. 8.27. Действие на элемент сосредоточенных силовых факторов

Тогда из условия равновесия сил получаем

$$-Q(z) + q\,dz + P + Q(z + dz) = 0,$$

или

$$Q(z + dz) = Q(z) - P. \tag{83}$$

В результате действия внешней сосредоточенной силы перерезывающая сила в сечении получает конечное приращение на

участке dz — скачок, равный величине силы:

$$\Delta Q = Q(z+dz) - Q(z) = -P. \tag{84}$$

В зависимости от направления действия силы P скачок может быть положительным ($Q(z+dz) < Q(z)$) или отрицательным. Если в пределах участка dz к стержню приложен сосредоточенный момент (рис. 8.27, *б*), то из условия равновесия моментов

$$-M(z) - Q\,dz + \frac{1}{2} q\,dz^2 + M_в + M(z+dz) = 0,$$

или, отбрасывая бесконечно малые слагаемые,

$$M(z+dz) = M(z) - M_в, \tag{85}$$

где $M_в$ — внешний изгибающий момент. При действии внешнего изгибающего момента общий изгибающий момент получает конечное приращение на участке dz, т. е. скачок, равный по величине приложенному моменту:

$$\Delta M = M(z+dz) - M(z) = -M_в. \tag{86}$$

Знак скачка зависит от направления момента $M_в$.

Замечание. Как уже отмечалось ранее (разд. 2), представление о сосредоточенном воздействии силы является идеализацией. На рис. 8.28, *а*, *б* показаны

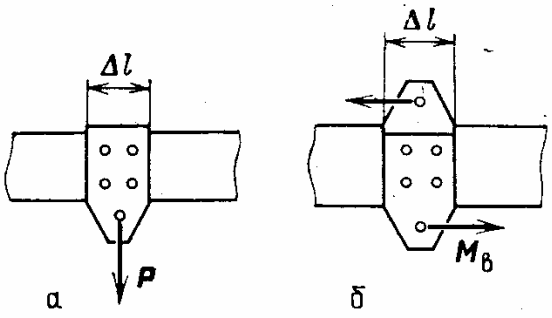


Рис. 8.28. Сосредоточенная сила и момент, приложенные к стержню

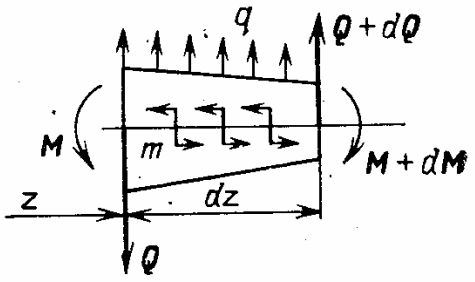


Рис. 8.29. Условия равенства элемента стержня при наличии распределенных изгибающих моментов

реальные случаи передачи силы и момента на стержень. Для расчетной схемы удобно представить, что участок Δl является малым, в пределе — бесконечно малым.

Условие равновесия элемента стержня при наличии распределенных изгибающих моментов. В некоторых случаях (рис. 8.29) на стержень могут действовать распределенные моменты (например, от продольных сил, приложенных с эксцентриситетом относительно оси стержня). Условие равновесия для сил (уравнение (81)) остается без изменений, а для равновесия моментов получим

$$-M - Q\,dz + \frac{1}{2} q\,dz^2 - m\,dz + M + dM = 0.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, найдем

$$dM/dz = Q + m, \tag{87}$$

где m — интенсивность распределенных моментов; величина m имеет размерность силы.

Касательные напряжения изгиба. При изгибе от поперечных нагрузок в стержне возникают касательные напряжения, уравновешивающие перерезывающую силу. Рассмотрим плоский изгиб стержня (рис. 8.30), происходящий в плоскости y, z; пусть ось y является осью симметрии сечения. Основное допущение при определении касательных напряжений состоит в следующем: касательные

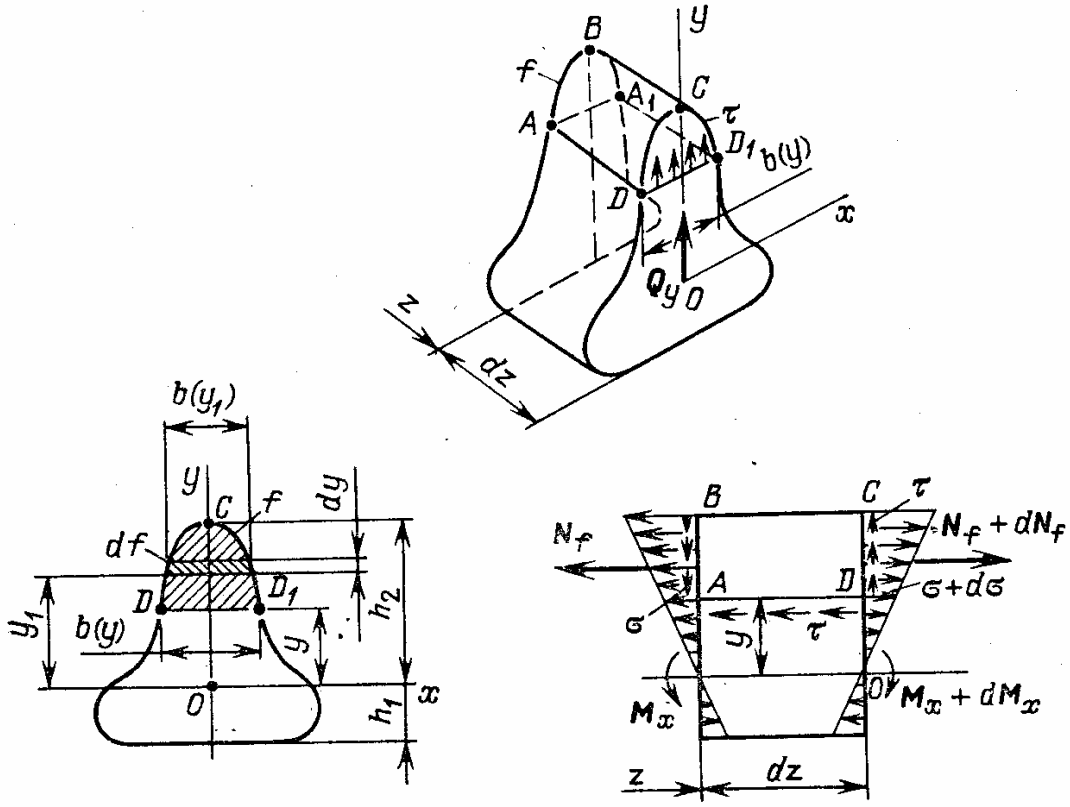


Рис. 8.30. Определение касательных напряжений изгиба

напряжения направлены параллельно плоскости изгиба и распределены равномерно по прямой $y = \text{const}$ (т. е. постоянны по ширине сечения $b(y)$).

Рассмотрим два близких поперечных сечения на расстоянии dz (см. рис. 8.30). Оси x, y проходят через центр тяжести сечения, ось x является нейтральной линией (в точках этой линии $\sigma = 0$). Проведем сечение $y = \text{const}$ и рассмотрим равновесие отсеченной части элемента стержня (части ABA_1D_1CD). Вдоль линии DD_1 действуют касательные напряжения τ. Такие же по величине напряжения в силу парности касательных напряжений должны действовать в площадке AA_1D_1D, размеры которой dz и $b(y)$.

Нормальные напряжения в сечении

$$\sigma = \frac{M_x(z)}{J_x(z)} y. \tag{88}$$

В общем случае изгибающий момент и момент инерции сечения могут зависеть от z. Нормальное усилие, действующее на рассматриваемую заштрихованную часть сечения, площадь которой составляет f, будет равно

$$N_f = \int_f \sigma \, df = \int_y^{h_1} \sigma b(y_1) \, dy_1, \tag{89}$$

где y_1 — переменная интегрирования $(y \leqslant y_1 \leqslant h_2)$. Внося значение напряжения из соотношения (88), находим

$$N_f = \frac{M_x(z)}{J_x(z)} \int_y^{h_1} y_1 b(y_1) \, dy_1 = \frac{M_x(z) S_f}{J_x(z)}, \tag{90}$$

где

$$S_f = \int_y^{h_1} y_1 b(y_1) \, dy_1 \tag{91}$$

— статический момент части сечения.

В общем случае $S_f = S_f(y, z)$, так как величина $h_2 = h_2(z)$.

Выражения (88) и (90) справедливы для стержня с постоянным по сечению модулем упругости. Для стержня с переменным модулем упругости, симметрично распределенным относительно плоскости yz,

$$\sigma = \frac{E(z) M_x(z)}{B_x(z)} y, \tag{92}$$

где жесткость сечения стержня на изгиб

$$B_x = \int_F y^2 E \, dF. \tag{93}$$

Нормальное усилие, приложенное к части сечения f,

$$N_f = \int_f \sigma \, dF = \frac{M_x(z)}{B_x(z)} S_{Ef}, \tag{94}$$

где

$$S_{Ef} = \int_f yE \, dF \tag{95}$$

— упруго-статический момент части сечения.

Рассмотрим теперь условие равновесия отсеченной части элемента стержня. Проектируя все силы на направление оси z, получим

$$-N_f - \tau b\,dz + N_f + \frac{\partial N_f}{\partial z}dz = 0.$$

Приращение N_f выражено с помощью частной производной, так как величина N_f зависит также от y.

Далее получаем

$$\frac{\partial N_f}{\partial z} = \tau b. \tag{96}$$

Из последнего равенства вытекает важная формула

$$\tau = \frac{1}{b}\frac{\partial N_f}{\partial z}. \tag{97}$$

Замечания. 1. Физический смысл соотношений (96) и (97) состоит в следующем: касательные напряжения образуются вследствие необходимости уравновесить изменение осевых сил по длине стержня. Если в стержне постоянного сечения нормальные напряжения постоянны по длине, то никаких касательных напряжений не возникает.

2. В соответствии с равенствами (88) или (89) рассматриваются нормальные напряжения изгиба от действия внешних сил. В более общем случае, изучение которого опустим, нормальные напряжения могут быть связаны с действием продольных сил и (или) неравномерного нагрева. Если продольное усилие постоянно по длине, то оно не вызывает касательных напряжений.

Распределение касательных напряжений в стержне постоянного сечения. Если модуль упругости постоянен по сечению стержня, то усилие, приложенное к части сечения, определяется по равенству (90). Теперь из соотношений (90) и (97) получаем

$$\tau = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{M_x S_f}{J_x}\right). \tag{98}$$

Так как сечения стержня по длине одинаковы, то от z зависит лишь величина $M_x(z)$ и

$$\tau = \frac{dM_x}{dz}\frac{S_f}{bJ_x} = \frac{QS_f}{bJ_x}, \tag{99}$$

где по соотношению (82)

$$Q = \frac{dM_z}{dz}.$$

Важная для дальнейшего формула (99) называется формулой Журавского, по имени выдающегося русского инженера — специалиста в области мостостроения.

Покажем, что перерезывающая сила в сечении является равнодействующей касательных напряжений. Интегрируя равенство (99)

по y, находим

$$\int_{-h_1}^{h_2} \tau b\, dy = \frac{Q}{J_x} \int_{-h_1}^{h_2} S_f\, dy = Q$$

(с помощью интегрирования по частям устанавливаем

$$\int_{-h_1}^{h_2} S_f\, dy = \int_{-h_1}^{h_2} \left(\int_{y}^{h_2} b(y_1)\, y_1\, dy_1 \right) dy = \int_{-h_1}^{h_2} b(y)\, y^2\, dy = J_x).$$

Для стержня с переменным модулем упругости

$$\tau = \frac{QS_{Ef}}{bB_x}. \tag{100}$$

Примеры. Рассмотрим распределение касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения (рис. 8.31). Статический момент отсеченной части

$$S_f = \int_{y}^{h/2} by_1\, dy_1 = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Перерезывающая сила в сечении стержня в соответствии с принятым правилом знаков

$$Q = -P.$$

Учитывая значение момента инерции сечения

$$J_x = bh^3/12,$$

по формуле (99) находим

$$\tau = -\frac{P}{bh} \left(\frac{3}{2} - 6 \frac{y^2}{h^2} \right). \tag{101}$$

Знак минус означает, что касательные напряжения направляем противоположно положительному вектору поперечного усилия Q (см. рис. 8.31).

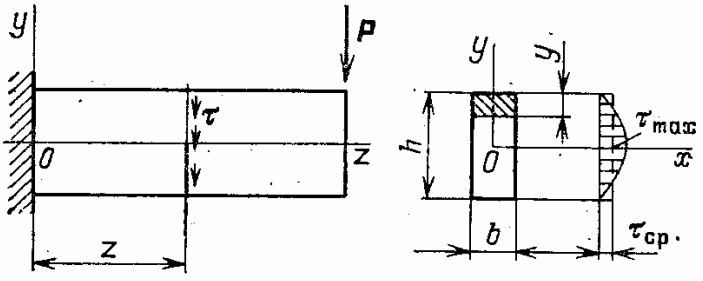


Рис. 8.31. Распределение касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения

Максимальное касательное напряжение (по величине) получается в точках оси x ($y = 0$) и равно

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh} = \frac{3}{2} \tau_{ср}, \tag{102}$$

где $\tau_{ср} = P/(bh)$ — среднее касательное напряжение.

Рассмотрим теперь распределение касательных напряжений в стержне круглого сечения (рис. 8.32).

Статический момент отсеченной части

$$S_f = 2\int_y^r y_1 \sqrt{r^2 - y_1^2}\, dy_1.$$

После замены переменных

$$y_1 = r\cos\theta, \qquad dy_1 = -r\sin\theta\, d\theta$$

получаем

$$S_f = \frac{2}{3} r^3 \sin^3\theta = \frac{2}{3}\left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^3.$$

По формуле (99) находим при

$$J_x = \frac{\pi r^4}{4}, \qquad b(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

следующую зависимость для касательного напряжения:

$$\tau = -\frac{4Q}{3\pi r^2}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right). \tag{103}$$

Максимальное касательное напряжение будет при $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\tau_{ср}, \tag{104}$$

где $\tau_{ср} = Q/(\pi r^2)$ — среднее касательное напряжение. Распределение касательных напряжений вдоль оси y показано на рис. 8.32.

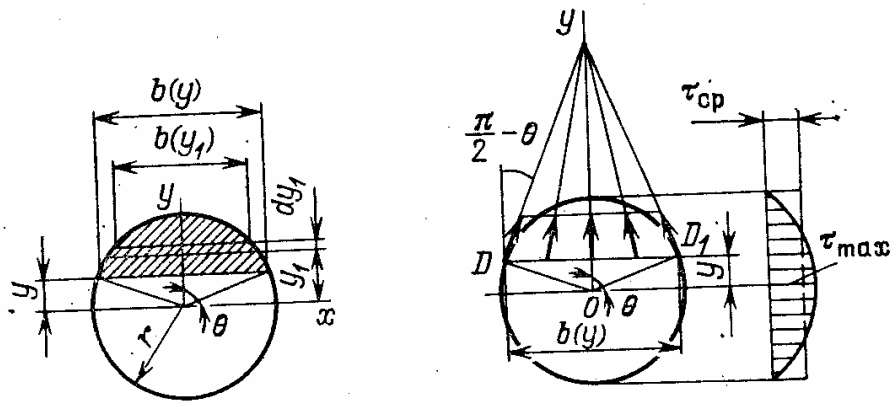


Рис. 8.32. Распределение касательных напряжений в стержне круглого сечения

Замечание. В рассматриваемом примере допущение о том, что касательные напряжения параллельны оси y, строго не выполняется. В крайних точках (точки D и D_1) вектор касательного напряжения должен быть направлен по касательной к контуру в силу свойства парности касательных напряжений (иначе должно действовать на свободной боковой поверхности стержня касательное напряжение!). Поэтому допущение о постоянстве касательных напряжений по прямой можно заменить более общим условием: постоянство составляющих касательных напряжений вдоль оси y. Более строго следовало бы назвать величину τ по формуле Журавского осредненным значением касательного напряжения по прямой, параллельной оси x.

Распределение касательных напряжений в стержнях переменного сечения. В этом случае основной расчетной зависимостью является соотношение (98). В качестве примера разберем изгиб клина под действием сосредоточенной силы (рис. 8.33, *а*). Расчетная модель представляет собой клин прямоугольного сечения с углом α при вершине.

Нормальные напряжения в сечении z

$$\sigma = \frac{M(z)}{J_x(z)} y.$$

Так как

$$M(z) = Pz, \quad J_x(z) = \frac{b\left(2z \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3}{12} = \frac{2}{3} bz^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2},$$

то напряжение

$$\sigma = \frac{3P}{2bz^2 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}} y. \qquad (105)$$

При $z \to 0$ $\sigma \to \infty$, и поэтому у конца стержня сделано подкрепление (местное утолщение) (рис. 8.34).

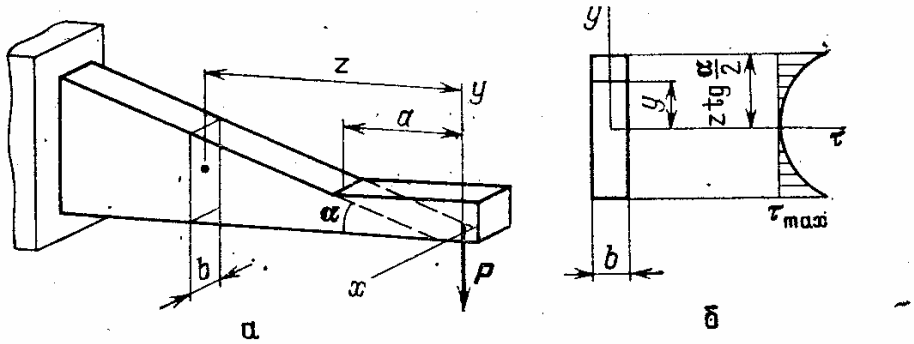


Рис. 8.33. Касательные напряжения в стержне переменного сечения

Для расчета по формуле (98) определяем статический момент отсеченной части

$$S_f = \frac{1}{2} b\left(z^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - y^2\right).$$

Далее, находим

$$\tau = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Pz \cdot \frac{1}{2} b\left(z^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - y^2\right)}{\frac{2}{3} bz^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{3}{2}\frac{Py^2}{bz^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}. \qquad (106)$$

Соотношения (105) и (106) применимы при $z > a$. Распределение касательных напряжений показано на рис. 8.33, *б*. Максимальное касательное напряжение будет в крайних точках и равно

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{bz \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 3\tau_{ср}, \qquad (107)$$

где $\tau_{ср} = \dfrac{P}{2bz \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ — среднее касательное напряжение.

Замечания. 1. Наличие касательных напряжений, перпендикулярных контуру сечения, для стержня переменного сечения не нарушает свойства парности касательных напряжений, так как перпендикулярная площадка не лежит на поверхности стержня.

2. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению может существенным образом изменяться в стержнях переменного сечения.

Точное решение задачи об изгибе клина, полученное методами теории упругости, показывает (см. рис. 8.34), что в цилиндрическом сечении ABC действуют только нормальные напряжения. В поперечном сечении AB_1C в соответствии с приближенным решением имеются нормальные и касательные напряжения. В точке $A\left(y = z\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$ из равенства (105) и (106) получаем

$$\frac{\tau}{\sigma} = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

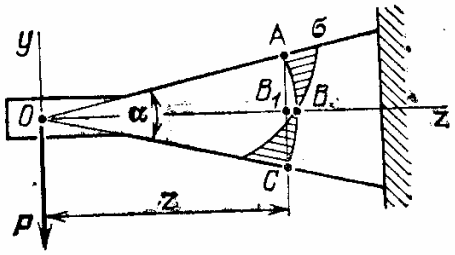


Рис. 8.34. Особенности распределения нормальных и касательных напряжений в клинообразном стержне

т. е. главное напряжение идет вдоль волокна OA, как это следует из точного решения. При достаточно малых углах α ($\alpha < \pi/3$) точное решение и решение, основанное на гипотезе плоских сечений, совпадают.

Касательные напряжения изгиба в тонкостенных стержнях. При анализе касательных напряжений изгиба в стержнях с массивным (компактным) поперечным сечением (см. рис. 8.30) было сделано допущение об их равномерном распределении вдоль прямой $y = \mathrm{const}$. Было показано на примере круглого сечения (см. рис. 8.32), что в ряде случаев такое допущение носит приближенный характер, так как вектор касательного напряжения в точках контура не направлен по касательной к контуру. Для стержней с тонкостенным сечением касательные напряжения изгиба можно определить более точно, так как их направление практически известно заранее. Они должны быть направлены вдоль средней линии тонкостенного профиля (см. рис. 8.35). Так как толщина профиля δ мала, то касательные напряжения изгиба можно считать постоянными по толщине.

Таким образом, предполагается, что касательные напряжения направлены вдоль средней линии тонкостенного профиля и постоянны по толщине.

Рассматривается изгиб в плоскости y, z (рис. 8.35). Для определения величины касательного напряжения вдоль нормали к средней линии AA_1 отсекается часть элемента стержня, показанная на рис. 8.35. Равнодействующая нормальных усилий, приложенных к площади отсеченной части f, обозначается, как и раньше, N_f. Из условия равновесия отсеченной части находим

$$\tau = \frac{1}{\delta}\frac{\partial N_f}{\partial z}. \qquad (108)$$

Для стержня постоянного сечения с постоянными модулями

упругости

$$N_f = \frac{M_x(z)\, S_f}{J_x}, \tag{109}$$

и тогда получаем формулу Журавского — Власова для тонкостенных стержней

$$\tau = \frac{QS_f}{\delta J_x}. \tag{110}$$

Замечание. По структуре формула (110) не отличается от формулы Журавского (99), но, в сущности, здесь речь идет о решении иной задачи.

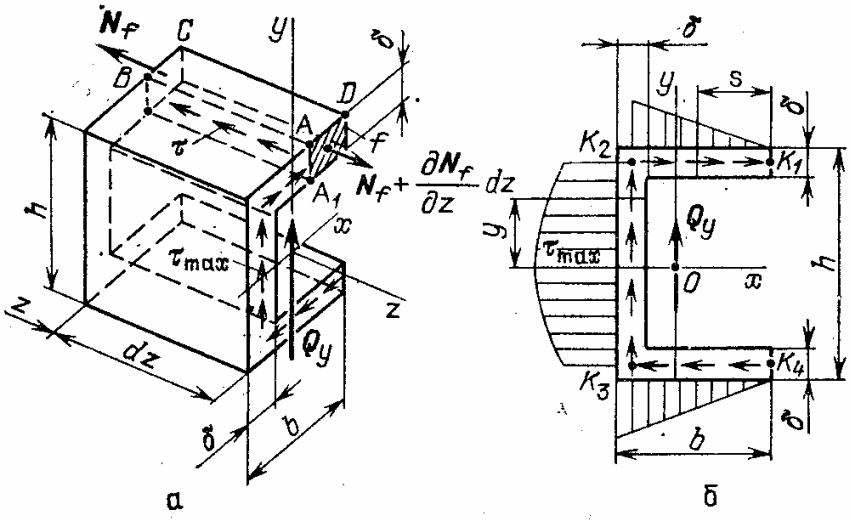


Рис. 8.35. Касательные напряжения изгиба в тонкостенных стержнях

Примеры определения касательных напряжений изгиба в тонкостенном стержне. Рассмотрим стержень, имеющий сечение швеллерного типа, причем толщина стенки δ мала по сравнению с высотой h и шириной b (рис. 8.35, *б*).

Момент инерции поперечного сечения

$$J_x = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{1}{2} b\delta h^2 = \frac{\delta h^2}{12}(h + 6b).$$

Для определения касательных напряжений в верхней полке (участок K_1K_2) проведем сечение на расстоянии s (рис. 8.35); площадь отсеченной части $f = s\delta$, статический момент $S_f = \frac{1}{2} s\delta h$. Касательное напряжение в верхней полке

$$\tau = \frac{Qh}{2J_x} s = \frac{6Qs}{h(h + 6b)} \tag{111}$$

пропорционально величине s.

В вертикальной стенке на расстоянии y статический момент отсеченной части

$$S_f = \frac{1}{2} b\delta h + \frac{1}{2} \delta \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Первый член правой части выражает статический момент верхней полки, вто-

рой — участка вертикальной стенки от y до $h/2$. Наибольшее касательное напряжение будет при $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{\delta h}\frac{h+4b}{h+6b}. \tag{112}$$

Распределение касательных напряжений показано на рис. 8.35, *б*. Вертикальная стенка воспринимает существенную часть касательных напряжений, она полностью воспринимает перерезывающее усилие Q.

Замечание. Внимательный читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что поток касательных напряжений изгиба (см. рис. 8.35) не только уравновешивает усилие Q, но и создает крутящий момент. Это означает, что при

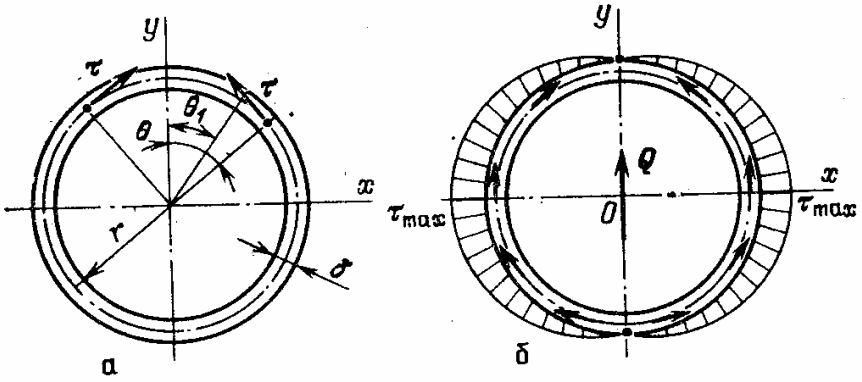


Рис. 8.36. Касательные напряжения при изгибе в тонкостенной трубе

приложении внешней нагрузки в центр тяжести сечения стержень будет закручиваться.

Рассмотрим теперь касательные напряжения при изгибе тонкостенной трубы (рис. 8.36, *а*). Толщина стенки δ считается малой по отношению к радиусу средней линии r.

Момент инерции сечения

$$J_x = \frac{1}{2}J_p = \frac{1}{2}2\pi r\delta r^2 = \pi r^3\delta.$$

Отсеченную часть примем в виде части кольцевой области (см. рис. 8.36), соответствующей центральному углу 2θ; касательное напряжение

$$\tau(\theta) = \frac{QS_f}{2\delta J_x}; \tag{113}$$

статический момент S_f, считая $\delta \ll r$,

$$S_f = 2\int_0^{\theta} r\cos\theta_1\delta r\, d\theta_1 = 2\delta r^2\sin\theta; \tag{114}$$

касательное напряжение

$$\tau(\theta) = \frac{Q\cdot 2\delta r^2\sin\theta}{2\delta\pi r^3\delta} = \frac{Q}{\pi r\delta}\sin\theta. \tag{115}$$

Максимальное касательное напряжение (рис. 8.36, *б*) будет при $\theta = \pi/2$ ($y = 0$):

$$\tau_{max} = \frac{Q}{\pi r\delta} = 2\tau_{ср}, \tag{116}$$

где $\tau_{ср} = Q/(2\pi r\delta)$ — среднее касательное напряжение.

Обоснования приближенного метода расчета касательных напряжений изгиба. В изложенном методе касательные напряжения находились из уравнений равновесия элемента стержня, причем нормальные напряжения считались заданными. Предполагалось, что в свою очередь касательные напряжения не влияют на распределение нормальных напряжений. Естественно, что такой подход является приближенным, так как при строгой постановке задачи нормальные и касательные напряжения в силу соотношений упругости связаны между собой не только уравнениями равновесия, но и уравнениями совместности деформаций (гл. 2, 3). Однако в некоторых простейших случаях приближенное решение совпадает с точным.

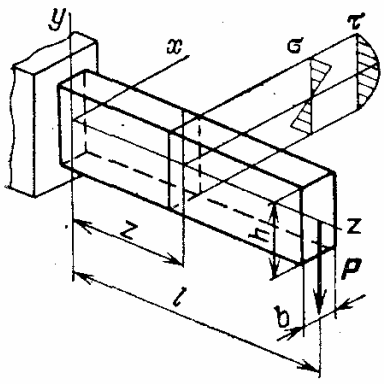


Рис. 8.37. Решение задачи об изгибе стержня как задачи теории упругости

Рассмотрим снова задачу изгиба стержня прямоугольного сечения (рис. 8.37), поместив начало координат в центре тяжести корневого сечения.

На основании приближенного решения имеем следующие значения компонентов напряженного состояния:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \frac{12P(l-z)}{bh^3}\,y,$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = -\frac{P}{bh}\left(\frac{3}{2} - 6\frac{y^2}{h^2}\right), \quad \tau_{zx} = 0.$$

Проверим, удовлетворяются ли уравнения равновесия и совместности деформаций и можно ли считать полученное решение достаточно строгим.

Уравнения равновесия рассматриваются при отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

или

$$0 + \frac{12Py}{bh^3} - \frac{12Py}{bh^3} = 0.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение равновесия удовлетворяется.

Проверим теперь выполнение условий совместности деформаций (гл. 3, уравнения (11)—(13)). Определим сначала деформации в соответствии с законом упругости:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\mu\sigma_z}{E} = -\frac{\mu \cdot 12P(l-z)}{Ebh^3}\,y, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{12P(l-z)}{Ebh^2}\,y,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = -\frac{P}{Gbh}\left(\frac{3}{2} - 6\frac{y^2}{h^2}\right), \quad \gamma_{zx} = 0.$$

Все уравнения совместности удовлетворяются тождественно, кроме уравнения (11) гл. 3, относящегося к деформации ε_x. Если считать, что размер b значительно меньше h, то перемещениями в направлении оси x (см. рис. 8.37) можно пренебречь. Этот случай соответствует задаче о плоском напряженном состоянии. Можно считать, что уравнения совместности выполняются. Наконец, следует отметить, что краевые условия по торцам стержня ($z = 0$ и $z = l$) выполняются в интегральном смысле. Таким образом, при изгибе стержня прямоугольного сечения ($b \ll h$) приближенное решение совпадает с точным. Решения, полученные методами теории упругости, и экспериментальные исследования показывают, что приближенная теория изгиба стержней применима для инженерных расчетов.

Замечание. В ряде случаев приближенный анализ должен дополняться исследованием местных напряжений при резком изменении поперечного сечения — в зонах закрепления стержня и передачи внешних усилий, в коротких стержнях и т. д., о чем будет сказано в дальнейшем.

Роль касательных напряжений при изгибе стержня. Обычно для достаточно длинных стержней касательные напряжения малы по сравнению с нормальными напряжениями изгиба.

Например, для консольного стержня постоянного сечения (см. рис. 8.37) наибольшие нормальные и касательные напряжения равны

$$\sigma_{max} = \frac{6Pl}{bh^2}, \qquad \tau_{max} = \frac{3P}{2bh}.$$

Отношение

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{1}{4}\frac{h}{l}$$

уменьшается по мере увеличения длины стержня l.

Влияние касательных напряжений на прочность сказывается для балок из обычных конструкционных материалов только в коротких стержнях ($l \leqslant 2h$). Для композиционных материалов влияние касательных напряжений изгиба оказывается более существенным, так как их сопротивление сдвигу обычно значительно меньше, чем растяжению и сжатию. Однако основное значение касательных напряжений состоит в том, что они обеспечивают совместную деформацию всех частей стержня при его изгибе.

На рис. 8.38 рассматривается изгиб консольного стержня в двух случаях. В первом случае (рис. 8.38, *а*) связь обеих половин нарушена и стержень

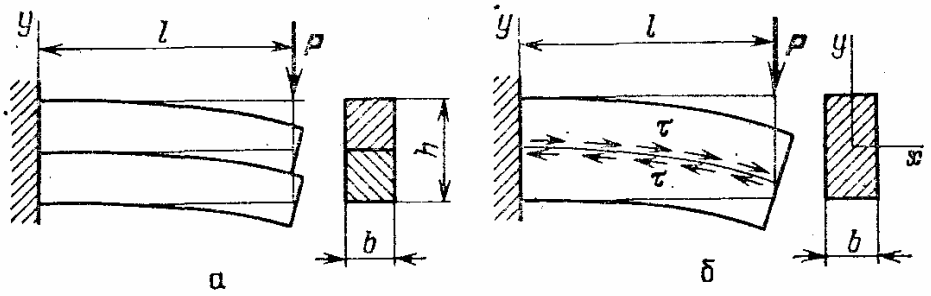


Рис. 8.38. Касательные напряжения изгиба (обеспечивают совместную деформацию частей — плоское сечение всего стержня при изгибе)

изгибается так, что каждая часть воспринимает половину нагрузки. Во втором случае (рис. 8.38, *б*) обе части стержня спаяны и сечение остается при изгибе плоским.

Для двух параллельно работающих стержней максимальное напряжение изгиба

$$\sigma_{1max} = \frac{6}{2}\frac{Pl}{b\,(h/2)^2} = \frac{12Pl}{bh^2}.$$

Во втором случае

$$\sigma_{2max} = \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{1}{2}\sigma_{1max}.$$

При отсутствии касательных напряжений изгиба на поверхности контакта нормальные напряжения изгиба в рассматриваемом случае возрастают в два раза!

В еще большей степени падает жесткость стержня на изгиб. Для первого случая суммарный момент инерции

$$J_1 = 2\frac{b\,(h/2)^3}{12} = \frac{bh^3}{48}; \tag{117}$$

при совместном деформировании

$$J_2 = \frac{bh^3}{12}, \tag{118}$$

что превышает J_1 в четыре раза!

Отметим, что при изгибе стержня моментами (так называемый *чистый изгиб стержня*) касательные напряжения не возникают (рис. 8.39). Совместная деформация всех частей стержня обеспечивается наличием жестких пластинок по торцам стержня или линейным распределением внешних нагрузок в концевых сечениях в соответствии с гипотезой плоских сечений. В этом случае можно считать, что продольные волокна стержня работают независимо. Учет касательных напряжений в изгибе важен при расчете стержней (балок)

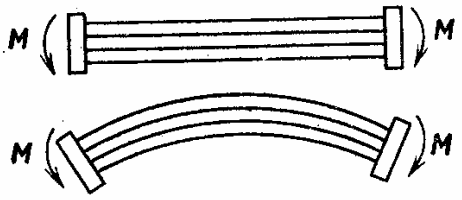


Рис. 8.39. Изгиб стержня моментами, при которых касательные напряжения не возникают

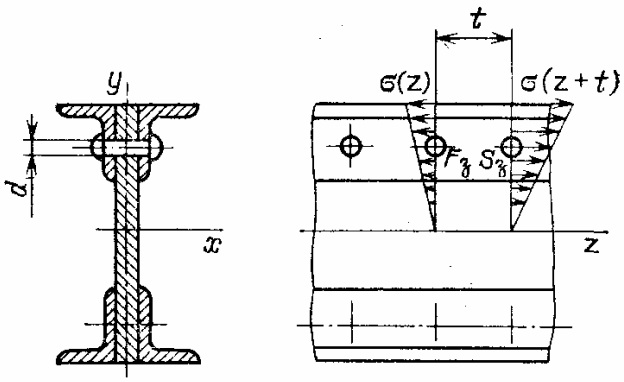


Рис. 8.40. Касательные напряжения при изгибе составных балок

составного сечения. На рис. 8.40 показана балка, состоящая из стенки, к которой прикреплены стержни уголкового профиля.

Сечение работает на изгиб совместно, так как через заклепки передается касательное усилие $S_з$:

$$S_з = N_f(z) - N_f(z+t) = \frac{QS_f}{J_x}t, \tag{119}$$

где t — шаг заклепок (расстояние между заклепками); S_f — статический момент инерции уголка; J_x — момент инерции всего сечения стержня относительно оси x.

Напряжение среза в заклепке

$$\tau_з = \frac{S_з}{F_з} = \frac{QS_f t}{F_з J_x}, \tag{120}$$

где $F_з$ — площадь сечения заклепки.

Распределение касательных напряжений изгиба имеет важное значение при армировании (укреплении) материала прочными волокнами (композиционные материалы, армированный бетон и др.). Прочные волокна должны располагаться по линиям действия главных напряжений.

32. Изгиб и растяжение стержней с учетом деформации пластичности и ползучести

Применение гипотезы плоских сечений. Деформации пластичности и ползучести могут достигать сравнительно больших величин (примерно 5—10% и более); возникает вопрос о возможности использования гипотезы плоских сечений.

Опыты по пластическому деформированию полосы свидетельствуют, что гипотеза практически пригодна при деформациях порядка десятков процентов. На рис. 8.41 показаны полосы (риски), нанесенные на боковой поверхности стержня при изгибе на круглой оправке; после значительного изгиба риски остаются прямыми. Гипотеза плоских сечений связана с кинематической картиной деформации при изгибе изотропных материалов. Практически установлено, что она применима при работе материала в стадии пластичности и ползучести.

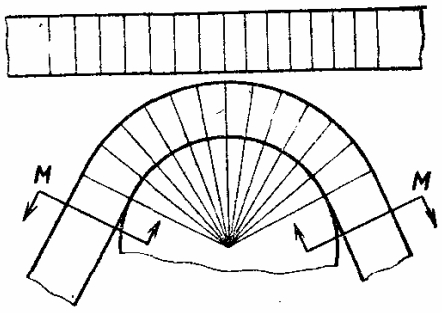


Рис. 8.41. Экспериментальное подтверждение гипотезы плоских сечений при больших деформациях

Схематизация кривой деформирования. Если при изгибе и растяжении в упругой области использовалась линейная зависимость напряжений и деформаций, то при пластичности в основу принимается кривая деформирования (гл. 4) (рис. 8.42, *а*)

$$\sigma = f(\varepsilon). \qquad (121)$$

В общем случае зависимость (121) может быть различной при растяжении и сжатии. Для расчета часто принимаются схематизи-

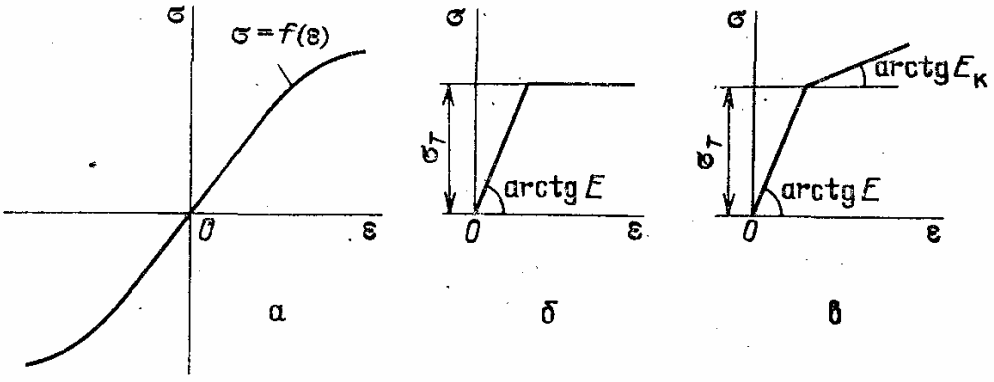


Рис. 8.42. Кривые деформирования и их схематизации

рованные кривые деформирования (рис. 8.42, *б*, *в*), причем одинаковые в области растяжения и сжатия.

Кривая, имеющая при $\sigma = \sigma_т$ ($\sigma_т$ — предел текучести) горизонтальный участок, описывает пластичность без упрочнения (см.

рис. 8.42, *б*); используется кривая деформирования с линейным упрочнением (рис. 8.42, *в*). Учет пластичности материала, если исключить процессы разгрузки, может быть использован для описания изгиба стержней из нелинейно-упругого материала. Для упрощенного описания конструкционных материалов иногда используется степенной закон деформирования

$$\sigma = k\varepsilon^n, \tag{122}$$

где k, n — постоянные материала.

Так как кривая деформирования должна проходить через точку, соответствующую пределу текучести σ_T, то

$$\sigma_T = k(\sigma_T/E + 0{,}002)^n = k\varepsilon_T^n,$$

и тогда

$$\sigma = \sigma_T(\varepsilon/\varepsilon_T)^n.$$

Обычно $0{,}1 < n < 0{,}5$.

Замечание. В тех случаях, когда учитываются касательные напряжения изгиба и соответствующие деформации сдвига, под σ и ε в уравнении (121) понимаются интенсивности напряжений и деформаций. Это обстоятельство имеет обычно второстепенный характер, а при $\mu = 0{,}5$ им можно пренебречь.

Изгиб стержней при пластичности без упрочнения. Предельный изгибающий момент. Рассмотрим сначала стержень прямоугольного сечения. Это наиболее простой случай, который помогает выяснить основные особенности задачи (рис. 8.43, *а*).

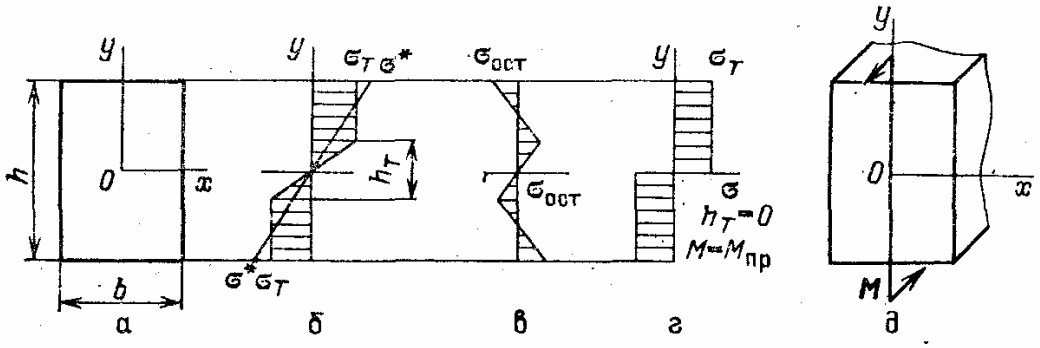


Рис. 8.43. Упругопластическая деформация стержня прямоугольного сечения (пластичность без упрочнения)

Пусть на стержень действует изгибающий момент M. Если наибольшее значение напряжения изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{bh^2} \leqslant \sigma_T, \tag{123}$$

или

$$M \leqslant \frac{\sigma_T bh^2}{6},$$

то стержень работает при упругих деформациях.

При возрастании M в наиболее удаленных от нейтральной линии ($y = h/2$) точках возникает пластическая деформация и напряжение изгиба станет равным σ_T (рис. 8.43, *б*, пластичность без упрочнения). Пусть при данном значении момента пластические деформации занимают область $\frac{1}{2}h_T < |y| < \frac{1}{2}h$. При $|y| < \frac{h_T}{2}$ в области упругости напряжения изменяются по линейному закону:

$$\sigma = \sigma_T \frac{2y}{h_T}. \tag{124}$$

Из условия равновесия

$$\int_F \sigma y \, dF = M$$

находим

$$2b \int_{h_T/2}^{h/2} \sigma_T y \, dy + 2b \int_0^{h_T/2} \frac{2\sigma_T}{h_T} y^2 \, dy = \frac{\sigma_T b}{4}\left(h^2 - h_T^2\right) + \sigma_T b \frac{h_T^2}{12} = M.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{b\sigma_T}{12} h_T^2 = \frac{b\sigma_T h^2}{4} - M, \tag{125}$$

или

$$h_T = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma_T b}} \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_T b h^2 - M}. \tag{126}$$

Так как $h_T \geqslant 0$, то предельное значение изгибающего момента равно

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\sigma_T b h^2. \tag{127}$$

Легко проверить, что такое значение M получается при распределении напряжений изгиба по рис. 8.43, *г*.

Сечение стержня из материала без упрочнения в стадии пластичности не может воспринять момент $M > M_{\text{пр}}$: в сечении образуется пластический шарнир (точнее, сечение представляет собой шарнир, в котором действует «момент трения», равный $M_{\text{пр}}$). В общем случае плоского изгиба предельный момент находится следующим образом (рис. 8.44). Условие отсутствия продольного усилия имеет вид

$$\int_F \sigma \, dF = \sigma_T F_2 - \sigma_T F_1 = 0, \tag{128}$$

где F_2, F_1 — площади частей сечения стержня, в которых действуют растягивающие или сжимающие напряжения. Ссылаясь на условие (128), можно утверждать, что нейтральная линия *аа* делит

площадь F на две равновеликие части: $F_1 = F_2 = F/2$. Предельный момент равен

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T F c, \tag{129}$$

где c — расстояние от центра тяжести какой-либо половины сечения до центра тяжести всего сечения (рис. 8.44, *б*).

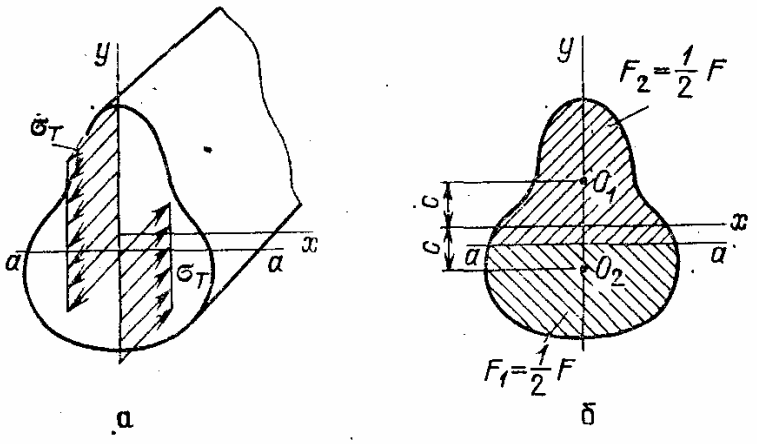


Рис. 8.44. Предельный изгибающий момент при пластичности без упрочнения

Остаточные напряжения. Определим остаточные напряжения в стержне после снятия момента, вызвавшего пластическую деформацию. Если материал стержня идеально упругий, то момент M приведет к напряжениям

$$\sigma^* = \frac{12M}{bh^3} y.$$

По такой зависимости будут убывать напряжения при снятии момента, так как при разгрузке деформации становятся упругими.

Остаточные напряжения (рис. 8.43, *в*)

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma - \sigma^*, \tag{130}$$

где σ — напряжения при упругопластических деформациях. Значения σ и σ^* соответствуют одному и тому же изгибающему моменту, причем σ^* — напряжение в идеально упругом теле (такое тело деформируется по законам упругости при любом уровне напряжений).

Замечание. Условие (130) для определения остаточных напряжений после возникновения (в прямом нагружении) пластических деформаций является следствием теоремы Генки.

Плоский изгиб и растяжение стержня с учетом деформации пластичности. На стержень действуют изгибающий момент M и растягивающее усилие N (рис. 8.45). Изгиб стержня происходит в плоскости y, x.

По гипотезе плоских сечений деформация

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varphi_x}{dz} y = \varepsilon_0 + \chi_y y. \tag{131}$$

Задача состоит в определении параметров деформации ε_0 и $\chi = d\varphi_x/dz$.

Из условий равновесия вытекает, что

$$\int_F \sigma\, dF = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma(y)\, b(y)\, dy = N, \tag{132}$$

$$\int_F \sigma y\, dF = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma(y)\, y b(y)\, dy = M. \tag{133}$$

Перейдем к новой переменной ε, и тогда с учетом зависимости (131) равенства (132) и (133) будут такими:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon)\, b\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\chi_y}\right) d\varepsilon = \chi_y N, \tag{134}$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\chi_y}\right) b\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\chi_y}\right) d\varepsilon = \chi_y^2 M, \tag{135}$$

где ε_2, ε_1 — величины деформации при $y = h_2$ и $y = -h_1$:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \chi_y h_2,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \chi_y h_1.$$

Задача существенно упрощается при отсутствии растягивающего (сжимающего) усилия N и для сечений с двумя осями симметрии (рис. 8.46). Помещая начало координат в центре тяжести сечения и считая зависимость (121)

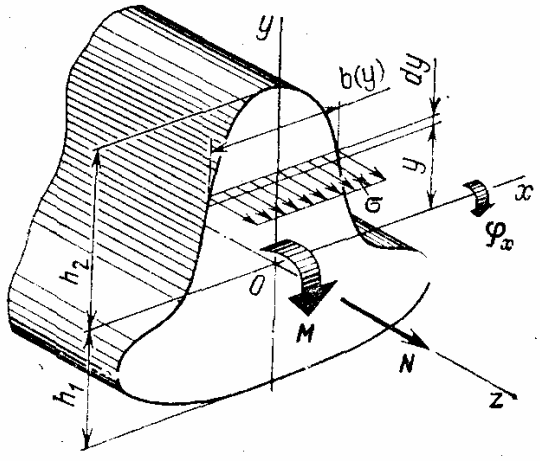


Рис. 8.45. Общий случай плоского изгиба при упругопластических деформациях

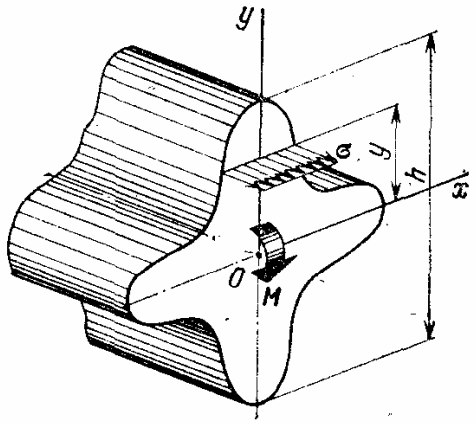


Рис. 8.46. Изгиб стержня с поперечным сечением, обладающим двумя осями симметрии

одинаковой при растяжении и сжатии, получим $\varepsilon_0 = 0$, так как ось x оказывается нейтральной линией сечения. Из условия (135) находим

$$2 \int_0^{\varepsilon_{max}} f(\varepsilon)\, \varepsilon b\left(\frac{\varepsilon}{\chi_y}\right) d\varepsilon = \chi_y^2 M, \tag{136}$$

где $\varepsilon_{max} = \varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ — наибольшая деформация в крайних волокнах сечения. В рассматриваемом случае

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{2}\chi_y h,$$

и из равенства (136) получаем

$$F(\varepsilon_{max}) = \frac{h^2}{2\varepsilon_{max}^2}\int_0^{\varepsilon_{max}} f(\varepsilon)\,\varepsilon b\left(\frac{\varepsilon h}{2\varepsilon_{max}}\right)d\varepsilon = M. \tag{137}$$

При заданном значении h строится функция $F(\varepsilon_{max})$ и находятся значения ε_{max}, M, удовлетворяющие условию (137). Вычисление $F(\varepsilon_{max})$ начинается с определения значений ε_{max}, соответствующих работе материала в упругой области:

$$\varepsilon_{max}^{(1)} = \frac{M}{EJ_x}\frac{h}{2}.$$

В упругопластической стадии

$$\varepsilon_{max} > \varepsilon_{max}^{(1)}.$$

При совместном действии изгиба и растяжения, используя условия равновесия (132) и (133) и зависимость (131), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\int_F f(\varepsilon_0 + \chi_y y)\,dF &= N,\\ \int_F f(\varepsilon_0 + \chi_y y)\,y\,dF &= M\end{aligned} \tag{138}$$

относительно параметров деформации ε_0 и χ_y.

Обозначив

$$\begin{aligned}F_1(\varepsilon_0, \chi_y) &= \int_F f(\varepsilon_0 + \chi_y y)\,dF,\\ F_2(\varepsilon_0, \chi_y) &= \int_F f(\varepsilon_0 + \chi_y y)\,y\,dF,\end{aligned} \tag{139}$$

решим систему уравнений (138) методом Ньютона — Раффсона. Выбирая исходное приближение $\varepsilon_0^{(1)}$ и $\chi_y^{(1)}$ и раскладывая функции F_1 и F_2 в ряд в окрестности указанных приближений, получим

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_0^{(1)}\right)\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_0} + \left(\chi_y - \chi_y^{(1)}\right)\frac{\partial F_1}{\partial \chi_y} &= N - F_1\left(\varepsilon_0^{(1)}, \chi_y^{(1)}\right),\\ \left(\varepsilon_0 - \varepsilon_0^{(1)}\right)\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_0} + \left(\chi_y - \chi_y^{(1)}\right)\frac{\partial F_2}{\partial \chi_y} &= M - F_2\left(\varepsilon_0^{(1)}, \chi_y^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{140}$$

где производные относятся к точке $\varepsilon_0^{(1)}$, $\chi_y^{(1)}$.

Отметим следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_0} &= \int_F \frac{df}{d\varepsilon}\left(\varepsilon_0^{(1)} + \chi_y^{(1)} y\right)dF = \int_F E_к^{(1)}\,dF,\\ \frac{\partial F_1}{\partial \chi_y} &= \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_0} = \int_F E_к^{(1)} y\,dF, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \chi_y} = \int_F E_к^{(1)} y^2\,dF,\end{aligned} \tag{141}$$

где $E_к = df/d\varepsilon$ — касательный модуль.

Из уравнения (140) находим значения ε_0 и χ_y, которые принимаются в качестве второго приближения. Первое приближение может быть принято по формулам для упругого материала.

Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

Замечание. Процедура расчета по равенству (140) близка к методу переменных параметров упругости, но является менее общей. Она пригодна в тех случаях, когда деформация определяется на основе гипотез кинематического характера.

Общий случай расчета стержня в упругопластической стадии. Метод переменных параметров упругости. Расчет проводится по формуле (17) с помощью последовательных приближений (рис. 8.47).

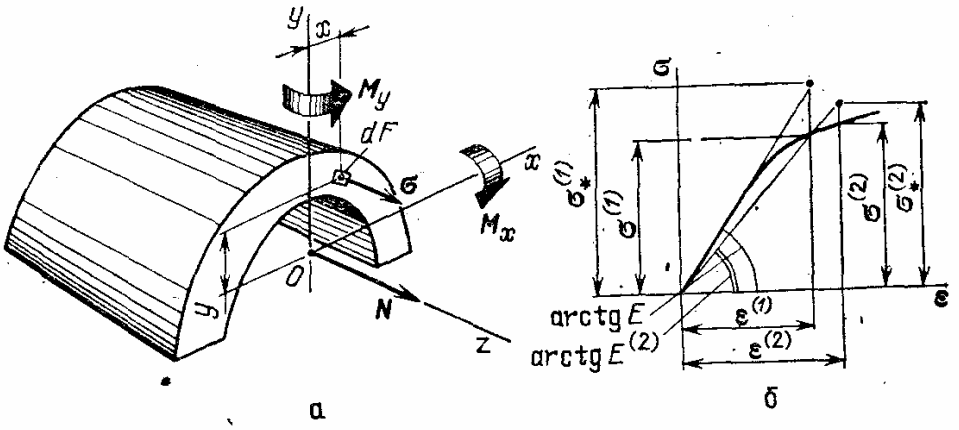


Рис. 8.47. Общий случай изгиба в упругопластической стадии: *а* — сечение стержня; *б* — схема расчета

В первом приближении материал считается (идеально) упругим ($E^{(1)} = E$) и находится напряжение (рис. 8.47, *а*)

$$\sigma_*^{(1)} = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}. \qquad (142)$$

Звездочка в индексе означает, что напряжения относятся к упругому материалу. Далее по кривой деформирования находим (рис. 8.47, *б*)

$$\varepsilon^{(1)} = \sigma_*^{(1)}/E \qquad (143)$$

и соответствующее значение $\sigma^{(1)}$.

Во втором приближении принимаем в каждой точке сечения

$$E^{(2)} = \sigma^{(1)}/\varepsilon^{(1)}. \qquad (144)$$

Теперь заново находим положение приведенного центра тяжести и главных осей сечения. Напряжение второго приближения

$$\sigma_*^{(2)} = E^{(2)}\left\{\frac{N}{A^{(2)}} + y\frac{M_x}{B_x^{(2)}} - x\frac{M_y}{B_y^{(2)}}\right\}, \qquad (145)$$

где

$$A^{(2)} = \int_F E^{(2)}\,dF, \quad B_x^{(2)} = \int_F y^2 E^{(2)}\,dF, \quad B_y^{(2)} = \int_F x^2 E^{(2)}\,dF.$$

Далее находим

$$\varepsilon^{(2)} = \sigma_*^{(2)}/E^{(2)}$$

и значение «модуля упругости» для следующего приближения

$$E^{(3)} = \sigma^{(2)}/\varepsilon^{(2)}. \tag{146}$$

Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений:

$$|\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}| < \Delta_1 \tag{147}$$

и при условии, что изображающая точка (см. рис. 8.47, *б*) лежит на кривой деформирования:

$$|\sigma_*^{(n)} - \sigma^{(n)}| < \Delta_2. \tag{148}$$

Величины Δ_1 и Δ_2, имеющие размерность напряжений, характеризуют необходимую точность расчета (обычно $\Delta_1 = \Delta_2 = (5-10)$ МПа).

Стержни из нелинейного или разномодульного материала. Зависимость напряжение — деформация для нелинейного материала показана на рис. 8.48, *а*. Она может быть неодинаковой в области растяжения и сжатия, так как ряд материалов (композиционные и пористые материалы, чугуны и т. п.) имеют

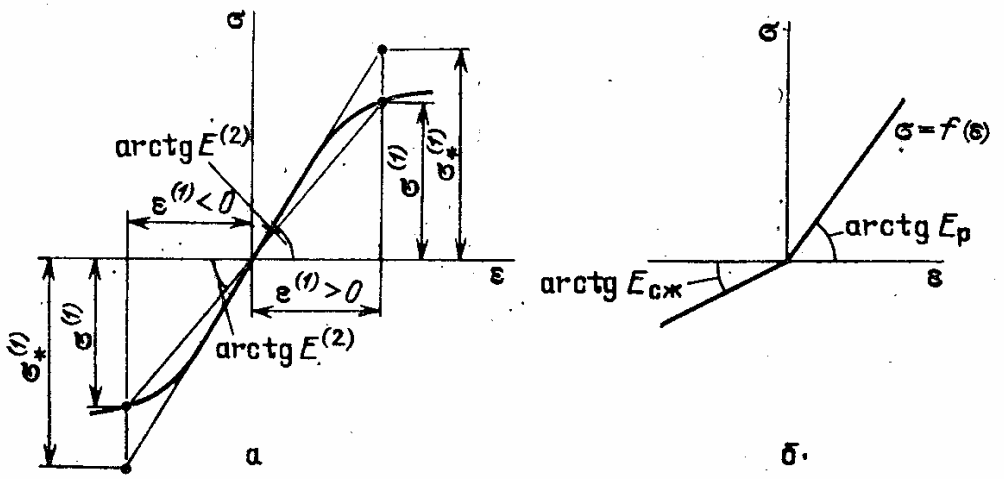


Рис. 8.48. Зависимости σ — ε для нелинейного (*а*) и разномодульного (*б*) материалов

различные свойства в указанных областях. Пористые материалы лучше сопротивляются напряжениям сжатия, армированные материалы с мягким наполнением — растяжению. Частный случай нелинейного материала составляет билинейный или разномодульный материал, обладающий разными модулями упругости в области растяжения и сжатия. Задачи растяжения и изгиба стержней из нелинейного или разномодульного материалов решаются методом переменных параметров упругости. В первом приближении применяется посто-

янный модуль упругости $E^{(1)}$, одинаковый для растяжения и сжатия. Напряжения не зависят от величины выбранного модуля и определяются по формуле (18). Далее в каждой точке сечения находятся значения деформации

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\sigma_*^{(1)}}{E^{(1)}}$$

и затем (см. рис. 8.48) значения модуля упругости $E^{(2)}$ в зависимости от значения и знака $\varepsilon^{(1)}$. Выбор первоначального модуля упругости не имеет существенного значения: процесс сходится при произвольном значении $E^{(1)}$. Можно принять

$$E^{(1)} = \frac{1}{2}(E_+ + E_-),$$

где E_+, E_- — модули упругости при растяжении и сжатии. Процедура заканчивается при выполнении условий (147) и (148).

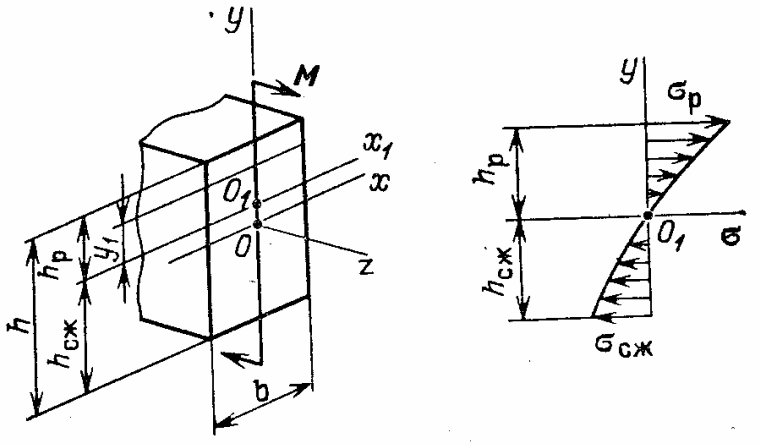


Рис. 8.49. Изгиб стержня из разномодульного материала.

В простых случаях можно получить решение в замкнутой форме. Рассмотрим изгиб стержня прямоугольного сечения из разномодульного материала (рис. 8.49, *а*).

Для такого материала

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{р}} \quad \text{при} \quad \sigma > 0, \\ E &= E_{\text{сж}} \quad \text{при} \quad \sigma < 0. \end{aligned} \tag{149}$$

Направим ось x_1 вдоль нейтральной линии; тогда деформация выражается следующим равенством:

$$\varepsilon = \chi_y y_1. \tag{150}$$

Так как в сечении суммарное усилие равно нулю, то

$$\int_F \sigma \, dF = \int_0^{h_{\text{р}}} E_{\text{р}} \chi_y y_1 b \, dy_1 + \int_{-h_{\text{сж}}}^{0} E_{\text{сж}} \chi_y y_1 b \, dy_1 = 0,$$

что дает

$$E_{\text{р}} h_{\text{р}}^2 = E_{\text{сж}} h_{\text{сж}}^2, \tag{151}$$

Из условия равновесия

$$\int_F \sigma y_1 b\, dy_1 = \chi_y b \left(\int_0^{h_р} E_р y_1^2 dy_1 + \int_{-h_{сж}}^{0} E_{сж} y_1^2\, dy_1 \right) = M$$

получаем

$$\chi_y = \frac{3M}{b\left(E_р h_р^3 + E_{сж} h_{сж}^3\right)}. \qquad (152)$$

Наибольшие напряжения растяжения и сжатия (рис. 8.49, *б*) равны

$$\sigma_р = \chi_y h_р, \qquad \sigma_{сж} = -\chi_y h_{сж}.$$

Жесткость стержня на изгиб

$$B = \frac{b}{3}\left(E_р h_р^3 + E_{сж} h_{сж}^3\right) = \frac{E_{пр} b h^3}{12}. \qquad (153)$$

Учитывая, что

$$h_{сж}/h_р = \sqrt{E}_р/\sqrt{E}_{сж}, \qquad h_р + h_{сж} = h,$$

найдем из равенства (153) приведенный модуль упругости:

$$E_{пр} = \frac{4E_р E_{сж}}{\left(\sqrt{E_р} + \sqrt{E_{сж}}\right)^2}. \qquad (154)$$

Замечание. Величина $E_{пр}$ называется модулем Кармана по имени ученого, впервые получившего решение рассматриваемой задачи в связи с проблемой устойчивости стержней.

Касательные напряжения при изгибе стержней в упругопластической стадии. В приближенной теории стержней касательные напряжения изгиба определяются из условий равновесия.

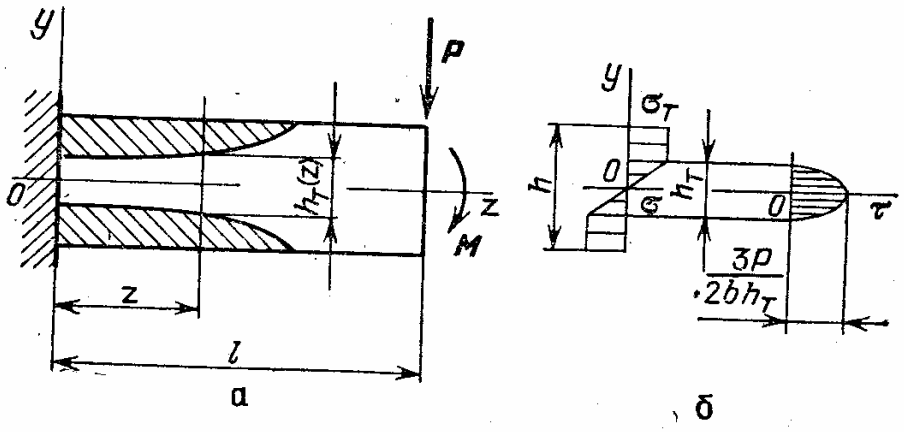


Рис. 8.50. Касательные напряжения при упругопластическом изгибе стержня (материал не обладает упрочнением в пластической области)

Рассмотрим изгиб стержня прямоугольного сечения под действием момента M и поперечной силы P (рис. 8.50). Напряжения изгиба для материала без упрочнения (см. зависимости (124), (125)

и (126))

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_T \frac{2y}{h_T}, & |y| \leqslant \frac{1}{2} h_T, \\ \sigma_T, & |y| > \frac{1}{2} h_T. \end{cases} \tag{155}$$

Величина h_T, характеризующая размер упругой зоны, определяется соотношениями (125) и (126). Она зависит от z, так как изгибающий момент в сечении изменяется по длине стержня. На рис. 8.50, *а* показана зона пластических деформаций, которая увеличивается при возрастании изгибающего момента в сечении. Касательное напряжение на расстоянии y от оси

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{\partial N_f}{\partial z}, \tag{156}$$

где усилие, действующее на отсеченную часть сечения стержня,

$$N_f = \int_F \sigma \, dF = \begin{cases} b\sigma_T \left(\frac{1}{2} h - y \right), & \frac{1}{2} h_T \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{2} h, \\ b\sigma_T \frac{1}{2} (h - h_T) + \sigma_T \left(\frac{1}{4} h_T - \frac{y^2}{h_T} \right), & 0 < |y| < \frac{1}{2} h_T. \end{cases} \tag{157}$$

В зоне пластических деформаций

$$\frac{\partial N_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[b\sigma_T \left(\frac{1}{2} h - y \right) \right] = 0,$$

и в этой зоне касательные напряжения отсутствуют.

В зоне упругих деформаций

$$\tau = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \sigma_T (h - h_T) + \sigma_T \left(\frac{1}{4} h_T - \frac{y^2}{h_T} \right) \right] = - \sigma_T \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h_T^2} \right) \frac{\partial h_T}{\partial z}. \tag{158}$$

Дифференцируя равенство (125) по z, находим

$$\frac{b\sigma_T h_T}{6} \frac{\partial h_T}{\partial z} = - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \tag{159}$$

так как

$$M(z) = P(l - z) + M.$$

Окончательно получаем

$$\tau = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} h_T < |y| \leqslant \frac{1}{2} h, \\ - \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h_T^2} \right) \frac{6P}{bh_T}, & |y| < \frac{1}{2} h_T. \end{cases} \tag{160}$$

Распределение касательных напряжений по сечению приведено на рис. 8.50, *б*. По мере увеличения изгибающего момента до предельного значения (127) величина h_T уменьшается и касательное напряжение возрастает.

Замечание. Изложенное решение является, конечно, приближенным, так как не учитывает влияние величины касательных напряжений на возникновение пластических деформаций. Его достоинство состоит в том, что оно позволяет выявить своеобразную концентрацию касательных напряжений в упругом ядре сечения.

Расчет стержней в упругопластической области с учетом нормальных и касательных напряжений изгиба. Рассмотрим плоский изгиб стержня (рис. 8.51, *а*) при действии изгибающего момента,

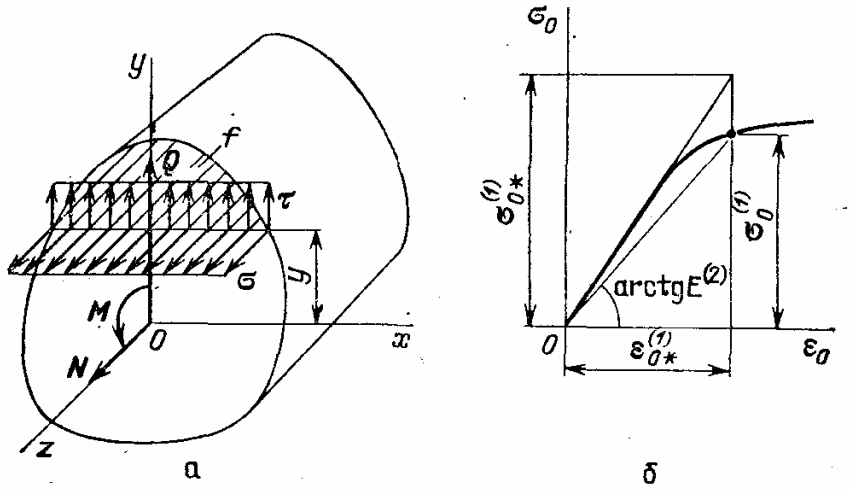


Рис. 8.51. Упругопластическая деформация стержня при учете нормальных и касательных напряжений и обобщенная кривая деформирования

нормального и перерезывающего усилий. Расчет проводится методом переменных параметров упругости. Предполагается, что кривая деформирования одинакова в области растяжения и сжатия.

В первом приближении материал предполагается упругим, нормальные и касательные напряжения определяются так:

$$\sigma_*^{(1)} = \frac{N}{F} + y\frac{M}{J_x}, \tag{161}$$

$$\tau_*^{(1)} = \frac{QS_f}{bJ_x}, \tag{162}$$

где нижний индекс * указывает, что напряжения соответствуют упругому материалу. Далее определяем эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{0*}^{(1)} = \sqrt{\sigma_*^{(1)2} + 3\tau_*^{(1)2}} \tag{163}$$

и соответствующее значение эквивалентной деформации:

$$\varepsilon_{0*}^{(1)} = \sigma_{0*}^{(1)}/E.$$

Значению $\varepsilon_{0*}^{(1)}$ по кривой деформирования (рис. 8.51, *б*) соответствуют напряжение $\sigma_0^{(1)}$ и модуль упругости

$$E^{(2)} = \sigma_0^{(1)}/\varepsilon_{0*}^{(1)}. \tag{164}$$

Во втором приближении, принимая в каждой точке модуль упругости равным $E^{(2)}$, получаем по формулам (17) и (100) гл. 8

$$\sigma_*^{(2)} = E^{(2)}\left\{\frac{N}{A^{(2)}} + y\frac{M}{B_x^{(2)}}\right\}, \tag{165}$$

$$\tau_*^{(2)} = \frac{QS_{Ef}^{(2)}}{bB_x^{(2)}}, \tag{166}$$

где

$$B_x^{(2)} = \int_F y^2 E^{(2)}\,dF, \quad S_{Ef}^{(2)} = \int_f E^{(2)} y\,dF, \quad A^{(2)} = \int_F E^{(2)}\,dF.$$

В равенствах (165) и (166) главные оси координат расположены в приведенном центре тяжести сечения, соответствующем модулю упругости $E^{(2)}$; усилие N считается постоянным по длине стержня.

Далее по формуле (163) после замены верхних индексов с (1) на (2) находим значение $\sigma_{0*}^{(2)}$, затем $\varepsilon_{0*}^{(2)}, \sigma_0^{(2)}$ и новые значения модуля упругости $E^{(3)}$ и т. д. Расчет заканчивается при соблюдении условий (147) и (148).

Учет деформации ползучести при изгибе стержня. Сведения о ползучести материала получаются из сетки кривых ползучести при различных напряжениях и температурах. Расчет на ползучесть по теории старения сводится к построению изохронных кривых ползучести, которые рассматриваются как условные кривые деформирования. Дальнейший ход расчета такой же, как при учете упругопластических деформаций.

Если нагрузки на стержень остаются неизменными во времени, то после обычно непродолжительного первоначального периода наступает установившаяся ползучесть. При установившейся ползучести скорость ползучести при растяжении выражается следующей зависимостью:

$$V_0 = \frac{d\varepsilon}{dt} = B(T)\,\sigma^{n(T)}, \tag{167}$$

где положительные параметры B и n зависят от температуры. Рассматривая материалы, у которых свойства ползучести при растяжении и сжатии одинаковы, представим зависимость (167) в таком виде:

$$\dot{\varepsilon} = B|\sigma|^n \operatorname{sign}\sigma, \tag{168}$$

где $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$; зависимость параметров B и n от температуры для

краткости не указывается. Напомним, что «знаковая» функция

$$\operatorname{sign}\sigma = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma > 0, \\ -1 & \text{при } \sigma < 0. \end{cases}$$

Из соотношения (168) следует, что

$$\sigma = \left|\frac{\dot{\varepsilon}}{B}\right|^{1/n} \operatorname{sign}\dot{\varepsilon}. \tag{169}$$

Вначале рассмотрим чистый изгиб стержня с двумя осями симметрии (см. рис. 8.46). В этом случае нейтральной линией будет ось x, а деформации определим по гипотезе плоских сечений:

$$\varepsilon = \chi_y y.$$

Скорость деформации

$$d\varepsilon/dt = \dot{\varepsilon} = \dot{\chi}_y y. \tag{170}$$

Из условия равновесия получаем

$$\int_F \sigma y\, dF = M_x.$$

Внося сюда значение σ из равенства (169) и учитывая зависимость (170), получим

$$\frac{|\dot{\chi}_y|^{1/n}}{B^{1/n}} \int_F |y|^{1/n} y \operatorname{sign}(\dot{\chi}_y y)\, dF = M_x. \tag{171}$$

Так как

$$\operatorname{sign}(\dot{\chi}_y y) = \operatorname{sign}\dot{\chi}_y \cdot \operatorname{sign} y,$$

то

$$y \operatorname{sign} y = |y|,$$

$$\frac{|\dot{\chi}_y|^{1/n} \operatorname{sign}\dot{\chi}_y}{B^{1/n}} \int_F |y|^{1+1/n}\, dF = M_x. \tag{172}$$

Обозначая геометрическую характеристику сечения

$$J_{x(n)} = \int_F |y|^{1+1/n} dF, \tag{173}$$

находим из соотношения (172)

$$\frac{\dot{\chi}_y}{B} = \left|\frac{M_x}{J_{x(n)}}\right|^n \operatorname{sign} M_x, \tag{174}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{J_{x(n)}} |y|^{1/n} \operatorname{sign} y. \tag{175}$$

На рис. 8.52 показано распределение напряжений, соответствующее формуле (175). При $n=1$ оно соответствует упругому материалу.

Общий случай расчета стержней на изгиб при учете ползучести материала. Рассматривается общий случай, когда на неравномерно нагретый стержень действует переменная по времени нагрузка. Ограничимся для простоты изучением изгиба стержней, сечения которых обладают осью симметрии. Нагружение разбивается по времени на этапы $(\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots, \Delta_n t)$.

Пусть за время от t_i до t_{i+1} изгибающий момент в сечении стержня и растягивающая сила получили приращения $\Delta_i M_x$ и $\Delta_i N$.

Приращение деформации на i-м этапе нагружения

$$\Delta_i \varepsilon = \frac{\Delta_i \sigma}{E} + \Delta_i (\alpha T) + \Delta_i \varepsilon^c. \qquad (176)$$

Первый член правой части соответствует приращению упругой деформации, второй — температурной, третий — приращению деформации ползучести.

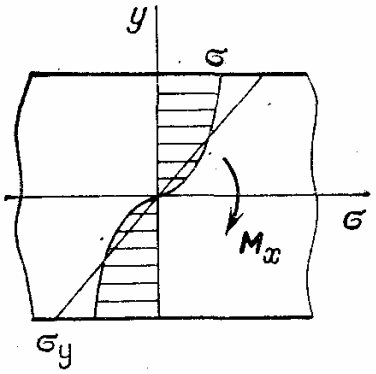


Рис. 8.52. Распределение напряжений изгиба при установившейся ползучести (стержень имеет прямоугольное или другое двусимметричное сечение)

Используя гипотезу плоских сечений и уравнения равновесия, как при выводе формул (17), получим

$$\Delta_i \sigma = E\left\{\frac{\Delta_i N}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\Delta_i M_x}{\int\limits_F y^2 E\,dF}\right\} + \Delta_i \sigma_{\text{темп}} + \Delta_i \sigma_{\text{пол}}, \qquad (177)$$

где приращение температурных напряжений

$$\Delta_i \sigma_{\text{темп}} = E\left\{\frac{\int\limits_F \Delta_i \alpha T\,dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F y\Delta_i \alpha T\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF} - \Delta_i \alpha T\right\}. \qquad (178)$$

Аналогично определяется приращение напряжений, вызванное деформацией ползучести:

$$\Delta_i \sigma_{\text{пол}} = E\left\{\frac{\int\limits_F \Delta_i \varepsilon^c dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F y\Delta_i \varepsilon^c\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF} - \Delta_i \varepsilon^c\right\}. \qquad (179)$$

Суммарные напряжения и деформации в стержне после i-го этапа нагружения в момент времени t_{i+1} равны соответственно

$$\sigma(t_{i+1}) = \sigma(t_i) + \Delta_i \sigma, \quad \varepsilon(t_{i+1}) = \varepsilon(t_i) + \Delta_i \varepsilon.$$

Остается конкретизировать приращение деформации ползучести. Оно определяется по напряжениям, деформациям и температурам в начале этапа нагружения, так как сами этапы считаются достаточно малыми:

$$\Delta_i \varepsilon^c = V_0[\sigma(t_i),\ T(t_i),\ \varepsilon^c(t_i)]\Delta_i t, \qquad (180)$$

где V_0 — скорость ползучести, соответствующая начальному этапу нагружения и определяемая по кривым ползучести. Расчет проводится последовательно, начиная с первого этапа.

33. Прочностные модели надежности при изгибе

Назначение и структура прочностных моделей. Прочностные модели надежности предназначены для выбора материала и размеров конструкции, технологии изготовления, обеспечивающих отсутствие отказов (разрушений) при определенных условиях эксплуатации в течение заданного времени. Общая структура прочностных моделей приведена на рис. 1.2.

Рассматривается частный случай прочностных моделей для элементов конструкций, которые могут схематизироваться в виде стержней при деформации изгиба. Основным для построения моделей прочностной надежности является тип (модель) нагружения.

Прочностная модель надежности при статической нагрузке по разрушающим усилиям. Статическое нагружение означает постепенное возрастание нагрузки до максимального значения. Модель статического нагружения является идеализированной, так как в чистом виде практически встречается редко. Наиболее близким к условиям статических нагружений являются несущие стержни (балки) в строительных сооружениях (зданиях) при воздействии силы тяжести. В машиностроении модель статического нагружения (статической прочности) используется главным образом для определения статических разрушающих нагрузок или для сравнительных оценок напряженности.

Детерминированные модели прочностной надежности состоят в определении запасов прочности по разрушающим усилиям и сопоставлении их с рекомендуемыми значениями. Для пластичных материалов запас по разрушающей нагрузке

$$n = \frac{M_{\text{разр}}}{M_{\max}} \geqslant [n_{\text{р}}], \qquad (181)$$

где $M_{\text{разр}}$ — изгибающий момент в сечении, вызывающий разрушение стержня; $M_{\max}$ — наибольший изгибающий момент в рассматриваемом сечении стержня при наиболее неблагоприятном сочетании внешних нагрузок; $[n_{\text{р}}]$ — допустимое значение запаса прочности по разрушающим усилиям (обычно $[n_{\text{р}}] = 1{,}4—2$).

Величина $M_{\text{разр}}$ определяется из условия, что при распределении напряжений с учетом пластических деформаций (гл. 8, разд. 7)

напряжение изгиба достигает предела прочности материала (рис. 8.53).

Для материала, обладающего площадкой текучести или слабым упрочнением (алюминиевые сплавы и некоторые высоколегированные стали), принимают (прямоугольное сечение, формула (127))

$$M_{\text{разр}} = \sigma_T \frac{1}{4} bh^2 = \sigma_T W_T, \tag{182}$$

где $W_T = \frac{1}{4} bh^2$ — пластический момент сопротивления прямоугольного сечения.

При наличии упрочнения в пластической области разрушающий момент изгиба определяется по схематизированной диаграмме деформирования. В крайней точке прямоугольного сечения $\left(y = \frac{1}{2} h\right)$ возникает напряжение, равное пределу прочности σ_b (рис. 8.54).

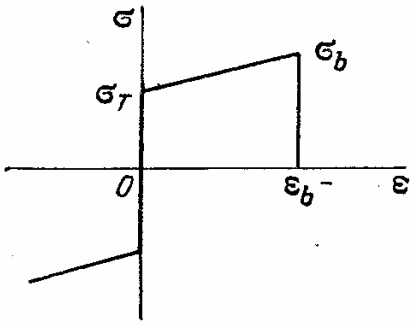


Рис. 8.53. Схематизированная диаграмма деформирования при наличии больших пластических деформаций (жесткопластическое тело)

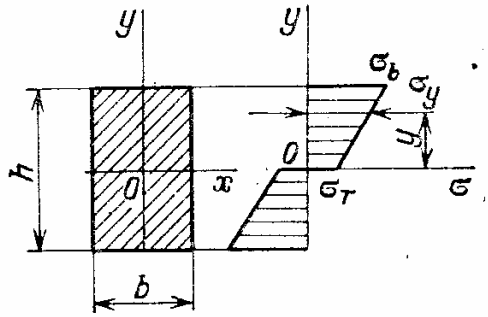


Рис. 8.54. Распределение напряжений при действии разрушающего момента

Распределение напряжений при действии разрушающего момента имеет вид

$$\sigma = \sigma_T + (\sigma_b - \sigma_T) \frac{2y}{h}. \tag{183}$$

Из условия

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y b \, dy = M_{\text{разр}} \tag{184}$$

находим

$$M_{\text{разр}} = 2 \int_0^{h/2} \left[\sigma_T + (\sigma_b - \sigma_T) \frac{2y}{h}\right] yb \, dy,$$

или

$$M_{\text{разр}} = \sigma_T W_T + (\sigma_b - \sigma_T) W, \tag{185}$$

где $W = bh^2/6$ — момент сопротивления стержня прямоугольного сечения в упругой области.

Отметим, что при выводе формулы (185) для разрушающего момента изгиба изменением сечения стержня в процессе деформации пренебрегали. Основная область применения прочностных моделей по разрушающим усилиям — однократное статическое нагружение достаточно пластичных материалов. Это связано с тем, что при определении запаса прочности предполагается перераспределение напряжений с учетом пластических деформаций.

Прочностная модель надежности при статической нагрузке по напряжениям. Рассматриваемый выше запас по разрушающим усилиям является интегральной характеристикой предельного опасного состояния материала бруса по всему сечению. Вместе с тем для малопластичных материалов или для всех конструкционных материалов, но при повторном статическом нагружении разрушение носит локальный характер и начинается в наиболее напряженных точках сечения. Детерминированная модель прочностной надежности содержит условие для запасов прочности

$$n = \frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} \geqslant [n_c], \tag{186}$$

где σ_b — предел прочности материала, σ_{max} — наибольшее напряжение (изгиба), $[n_c]$ — допускаемое значение запаса статической прочности по напряжениям (обычно $n_c = 1{,}3—2{,}5$).

Величина запаса по напряжениям часто используется как критерий сравнения надежности конструкций. При таком сопоставлении под σ_{max} обычно понимаются наибольшие номинальные напряжения. Это объясняется тем, что при небольшом числе повторных статических нагружений ($N < 10^3$) для пластичных материалов влияние концентрации напряжений сказывается незначительно. Для хрупких материалов при определении σ_{max} концентрацию напряжений необходимо учитывать.

В общем случае при действии нормальных и касательных напряжений изгиба модель прочностной надежности имеет вид

$$n = \frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} \leqslant [n_c]. \tag{187}$$

Наибольшее эквивалентное напряжение принимается в виде

$$\sigma_{emax} = \sigma_{imax}, \tag{188}$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \tag{189}$$

— интенсивность напряжений.

Замечание. Интенсивность напряжений применяется в качестве критерия наступления пластических деформаций (условие $\sigma_i \geqslant \sigma_T$) и часто используется как критерий прочности (условие $\sigma_i \leqslant \sigma_b$). При длительно действующей

статической нагрузке и повышенных температурах модель прочностной надежности имеет вид

$$n = \frac{\sigma_{дл}(T, t)}{\sigma_{e\max}} \leqslant [n_д], \qquad (190)$$

где $\sigma_{дл}(T, t)$ — предел длительной прочности при температуре T и времени нагружения t; $[n_д]$ — допускаемое значение коэффициента запаса по длительной прочности.

Прочностная модель надежности при переменной нагрузке. На рис. 8.55 показан элемент конструкций, на который действует переменное усилие:

$$P(t) = P_a \cos \omega t, \qquad (191)$$

где ω — круговая частота нагружения (число колебаний нагрузки в секунду), t — время,

$$f = \omega/(2\pi) \qquad (192)$$

— частота нагружения.

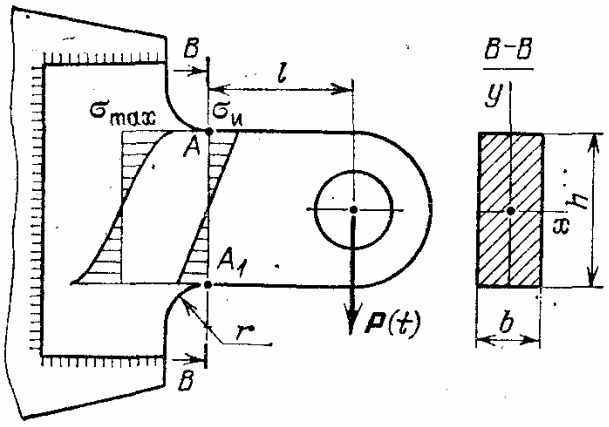


Рис. 8.55. Прочностная модель надежности при переменном изгибе

Опасным сечением в рассматриваемом элементе является сечение AA_1, где начинается переход к более прочному участку. Напряжения изгиба в точках A и A_1 в момент времени t

$$\sigma(t) = \frac{P(t)\,l}{W} = \frac{P_a l}{W} \cos \omega t = \sigma_a \cos \omega t,$$

где σ_a — амплитудное значение переменного напряжения:

$$\sigma_a = P_a l / W. \qquad (193)$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W = bh^2/6.$$

Величина σ_a представляет собой номинальное (условное) значение амплитуды переменных напряжений (разд. 16), так как в точках перехода A и A_1 возникает концентрация напряжений. Наибольшее амплитудное значение переменного напряжения изгиба

$$\sigma_{a\,\max} = \alpha_\sigma \sigma_a, \qquad (194)$$

где α_σ — коэффициент концентрации напряжений. Значение α_σ определяется методами теории упругости аналитически или численными методами.

В инженерных расчетах часто используется зависимость

$$\alpha_\sigma \approx 1 + k\frac{h}{r}, \qquad (195)$$

где r — радиус скругления. Коэффициент k обычно принимают равным 0,15—0,20.

Рассмотрим прочностную модель надежности при большом числе нагружений (число циклов нагружения $N > 10^6$), что соответствует длительности нагружения (в часах)

$$t > \frac{10^6}{3{,}6 \cdot 10^3 f} = \frac{10^3}{3{,}6f}.$$

Иными словами, рассмотрим модель надежности при усталостном разрушении. Детерминированная модель прочностной надежности состоит в условии

$$n_a = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_a} \geqslant [n_у], \tag{196}$$

где $\sigma_{-1д}$ — предел выносливости детали, определяемый для базового числа циклов N_0 (обычно $N_0 \approx 2 \cdot 10^7$); σ_a — наибольшее (номинальное) напряжение (амплитудное значение переменного напряжения в опасной точке); $[n_у]$ — допустимый запас усталостной прочности (обычно $[n_у] = 2—4$).

Величина $\sigma_{-1д}$ определяется с помощью натурных испытаний элемента конструкции на усталость. При невозможности или нецелесообразности подобных испытаний величина $\sigma_{-1д}$ оценивается расчетным путем по формуле (см. разд. 16)

$$\sigma_{-1д} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma} \sigma_{-1}, \tag{197}$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала, определяемый на гладких образцах, изготовленных по стандартной технологии; β и ε — коэффициенты, характеризующие поверхностный слой и влияние абсолютных размеров; K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений (разд. 16).

Запас усталостной прочности можно представить в другом виде:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ea}}, \tag{198}$$

где σ_{ea} — эквивалентное переменное напряжение:

$$\sigma_{ea} = \frac{K_\sigma \sigma_a}{\beta\varepsilon}. \tag{199}$$

Эквивалентное напряжение σ_{ea} сопоставляет действующее напряжение с прочностью материала.

Детерминированная и статистическая модели усталостной прочности лопатки компрессора или турбины, вероятность разрушения. Основная причина разрушения лопаток компрессора или турбин в эксплуатации — изгибные колебания, возникающие в результате

неравномерности потока воздуха или газа (рис. 8.56). Детерминированная модель усталостной прочности состоит в условии

$$n_a = \sigma_{-1д}/\sigma_a \geqslant [n_a], \qquad (200)$$

где $\sigma_{-1д}$ — экспериментально определенный предел выносливости лопатки на базе $2 \cdot 10^7$ циклов; σ_a — экспериментально замеренное с помощью проволочных тензометров (тензорезисторов) наибольшее переменное напряжение при изгибных колебаниях. Так как величины предела выносливости и амплитуды действующих напряжений имеют рассеяние, то обычно указываются условия их определения. В «запас прочности» величина $\sigma_{-1д}$ принимается наименьшей по техническим условиям или по нескольким испытаниям, тогда как значение σ_a принимается наибольшим среди измеренных. Более полно рассеяние результатов экспериментальных исследований учитывается в *статистической модели надежности*, целью которой является определение вероятности разрушения.

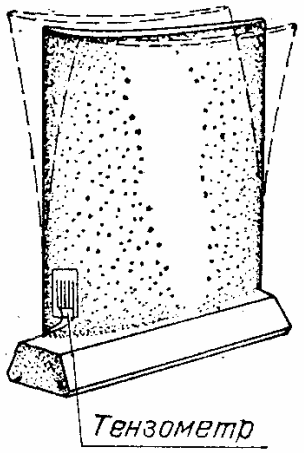


Рис. 8.56. Статистическая модель усталостной прочности лопатки компрессора или турбины при изгибных колебаниях

На рис. 8.57 даны плотности распределения пределов выносливости и амплитуды переменных напряжений в лопатках определенного типа турбомашин. Величины $\bar{\sigma}_{-1д}$ и $\bar{\sigma}_a$ выражают средние значения для всей совокупности лопаток.

Рассеяние $\sigma_{-1д}$ связано с неизбежными отклонениями свойств материала и технологии изготовления; разброс σ_a вызывается различными условиями возбуждения и демпфирования колебаний. Все это дает основание рассматривать для каждой конкретной лопатки величины $\sigma_{-1д}$ и σ_a как случайные.

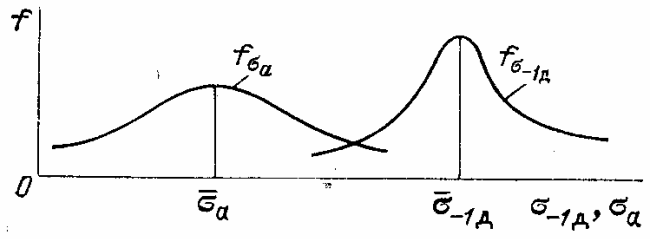


Рис. 8.57. Плотности распределения предела выносливости и амплитуды переменных напряжений в лопатках

Разность случайных величин

$$\zeta = \sigma_{-1д} - \sigma_a \qquad (201)$$

есть также величина случайная. Вероятность разрушения

$$P_{разр} = P(\zeta < 0) = F(0) \qquad (202)$$

равна вероятности того, что случайная величина ζ окажется отрицательной; $F(\zeta)$ — функция распределения случайной величины ζ. Предполагая, что $\sigma_{-1д}$ и σ_a имеют нормальное распределение, найдем

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{s_\zeta}\right), \qquad (203)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \tag{204}$$

Среднее значение и среднеквадратичное отклонение равны соответственно

$$\bar{\zeta} = \bar{\sigma}_{-1д} - \bar{\sigma}_a, \tag{205}$$

$$s_\zeta = \sqrt{s^2_{\sigma_{-1д}} + s^2_{\sigma_a}}, \tag{206}$$

где $s_{\sigma_{-1д}}$, s_{σ_a} — среднеквадратичные отклонения случайных величин $\sigma_{-1д}$ и σ_a. При определении s_ζ случайные величины $\sigma_{-1д}$ и σ_a предполагались независимыми.

Вероятность разрушения

$$P_{разр} = F(0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\bar{\zeta}}{s_\zeta}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\zeta}}{s_\zeta}\right). \tag{207}$$

Статистическая модель усталостной прочности представляет собой условие

$$P_{разр} \leqslant [P_{разр}], \tag{208}$$

где $[P_{разр}]$ — допустимое значение вероятности разрушения (обычно $[P_{разр}] = 10^{-6} - 10^{-3}$).

Значение $P_{разр}$ определяется величиной

$$\frac{\bar{\zeta}}{s_\zeta} = \frac{\bar{\sigma}_{-1д} - \bar{\sigma}_a}{\sqrt{s^2_{\sigma_{-1д}} + s^2_{\sigma_a}}} = \frac{\bar{n}_a - 1}{\sqrt{\bar{n}_a^2 v^2_{\sigma_{-1д}} + v^2_{\sigma_a}}},$$

где $\bar{n}_a = \bar{\sigma}_{-1д}/\bar{\sigma}_a$ — запас прочности по средним значениям; $v_{\sigma_{-1д}} = s_{\sigma_{-1д}}/\bar{\sigma}_{-1д}$, $v_{\sigma_a} = s_{\sigma_a}/\bar{\sigma}_a$ — коэффициенты вариации случайных величин $\sigma_{-1д}$ и σ_a. Связь вероятности разрушения и запаса прочности (по средним значениям) выражается равенством

$$P_{разр} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{n}_a - 1}{\sqrt{\bar{n}_a^2 v^2_{\sigma_{-1д}} + v^2_{\sigma_a}}}\right). \tag{209}$$

Для лопаток компрессоров и турбин коэффициенты вариации обычно составляют

$$v_{\sigma_{-1д}} \approx 0{,}1 - 0{,}2; \quad v_{\sigma_a} = 0{,}1 - 0{,}3.$$

Прочностная модель надежности валов. Валы являются ответственными высоконагруженными элементами машин. При построении моделей прочностной надежности рассматривается «опасное се-

чение» вала, в котором имеется точка с наибольшими напряжениями (точка A на рис. 8.58).

Обычно наиболее важным оказывается обеспечение надежности при переменных напряжениях с асимметричным циклом. В опасной точке действуют нормальное и касательное напряжения. Рассмотрим сначала случаи, когда эти напряжения изменяются по симметричному циклу (т. е. не имеют постоянных составляющих). Условие усталостной прочности для гладкого участка вала (при отсутствии концентрации напряжений) имеет вид

$$\sigma^*_{ia} = \sqrt{\sigma^{*2}_a + 3\tau^{*2}_a} = \sigma_{-1}, \quad (210)$$

где σ^*_a, τ^*_a — значения амплитуд переменных напряжений в момент разрушения.

Если σ_a и τ_a — амплитуды действующих переменных напряжений, то в момент разрушения

$$\sigma^*_a = n_a\sigma_a, \quad \tau^*_a = n_a\tau_a. \quad (211)$$

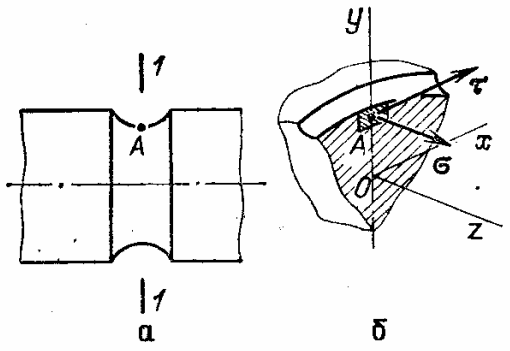


Рис. 8.58. Модель прочностной надежности вала: *а* — опасное сечение вала; *б* — нормальное σ и касательное τ напряжения в опасной точке вала

Запас усталостной прочности из соотношений (210) и (211) будет таким:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma^2_a + 3\tau^2_a}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ia}}. \quad (212)$$

Прочностная модель надежности имеет вид

$$n_a \geqslant [n_a]. \quad (213)$$

При наличии концентрации напряжений и с учетом влияния других факторов в условие усталостной прочности следует подставлять эквивалентные напряжения, и тогда в момент разрушения имеем

$$\sqrt{\left(\sigma^*_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma\varepsilon_\sigma}\right)^2 + 3\left(\tau^*_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau\varepsilon_\tau}\right)^2} = \sigma_{-1}, \quad (214)$$

где K_σ, K_τ — эффективные коэффициенты концентрации при изгибе и кручении; β_σ, ε_σ, β_τ, ε_τ — коэффициенты состояния поверхности и учета масштабного фактора. Значения K_σ, β_σ, ε_σ указаны в разд. 16; в первом приближении можно принимать

$$\beta_\tau = \beta_\sigma, \quad \varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma.$$

Прочностная модель надежности по зависимости (212) будет такой:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\sigma_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma}\right)^2 + 3\left(\tau_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau}\right)^2}} \geqslant [n_a]. \qquad (215)$$

При асимметричном цикле нагружения эквивалентные нормальные и касательные напряжения будут следующими:

$$\sigma_{ea} = \sigma_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m, \qquad (216)$$

$$\tau_{ea} = \tau_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau} + \psi_\tau \tau_m, \qquad (217)$$

где ψ_σ, ψ_τ — коэффициенты влияния постоянных напряжений (обычно принимают $\psi_\sigma = \sigma_{-1}/\sigma_b$, $\psi_\tau = \tau_{-1}/\tau_b$).

Прочностная модель надежности при усталостных разрушениях, связанных с асимметричными циклами нагружения, имеет вид

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\sigma_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m\right)^2 + 3\left(\tau_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau} + \psi_\tau \tau_m\right)^2}} \geqslant [n_a]. \qquad (218)$$

Замечание. При одновременном действии переменных нормальных и касательных напряжений условие усталостного разрушения принимают в виде

$$\sigma^*_{ia} = \sigma_{-1}, \qquad (219)$$

т. е. в момент разрушения интенсивность напряжения равна пределу выносливости. Условие (219) подтверждено экспериментально для пластичных конструкционных материалов.

Для хрупких материалов условие усталостной прочности будет таким:

$$\sigma^*_{1a} = \sigma_{-1}, \qquad (220)$$

где σ^*_{1a} — наибольшее главное напряжение в момент разрушения.

34. Прогибы стержней

Вводные замечания. Во многих случаях важно обеспечить не только прочность стержней, но и отсутствие значительных прогибов под нагрузкой. Прогибы вала, несущего шестерню, могут нарушить правильность зацепления. Прогибы вала турбины могут привести к недопустимому касанию лопаток о корпус и т. п.

Рассмотрение прогибов стержня весьма важно в задачах устойчивости колебания и в ряде других задач. Наконец, расчет прогибов необходим для решения статически неопредилимых задач, когда изгибающий момент в сечении заранее неизвестен. Оставляя пока в стороне статически неопределимые условия закрепления, изучим сначала прогибы стержня, считая силовые факторы в сечении стержня известными.

Параметры деформации и их физический смысл. Рассмотрим изгиб стержня в главной плоскости yOz (рис. 8.59). По гипотезе

плоских сечений (см. уравнение (2) гл. 2) деформация в точках поперечного сечения стержня

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz}. \tag{221}$$

Для параметров деформации ε_0 и $d\varphi_x/dz$ были установлены следующие зависимости для равномерно нагретого стержня (уравнения (14) гл. 2):

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{\int\limits_F E\,dF} = \frac{N}{A} = \frac{N}{EF}, \tag{222}$$

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{\int\limits_F y^2 E\,dF} = \frac{M_x}{B_x} = \frac{M_x}{EJ_x}, \tag{223}$$

где F, J_x — соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

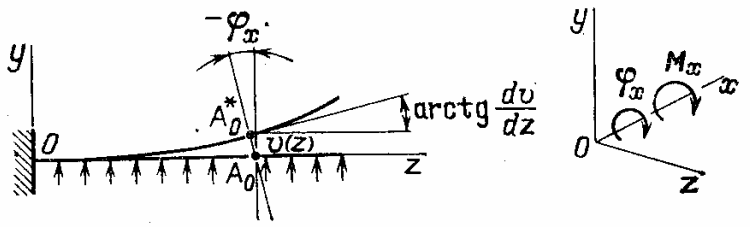


Рис. 8.59. Связь прогибов оси стержня $v(z)$ и углов поворотов $\varphi(z)$ сечений (положительное направление поворота сечения показано на рис. 8.4)

Как известно, гипотеза плоских сечений предполагает, что сечение стержня остается после деформации плоским. Второе важное допущение — будем пренебрегать деформациями сдвига. Тогда плоскость поперечного сечения останется перпендикулярной изогнутой оси стержня после деформации.

Ось стержня — геометрическое место центров тяжестей сечения — в деформированном состоянии показана на рис. 8.59. Прогибы стержня в плоскости yOz обозначены $v(z)$. Ось стержня в деформированном состоянии часто называют *упругой линией стержня.*

Физический смысл параметра деформации ε_0 ясен; его величина представляет удлинение оси стержня. Сечение стержня как жесткая пластинка составляет угол $\pi/2$ с касательной к оси стержня. Учитывая положительное направление отсчета, принятое для угла φ_x, следует записать

$$\varphi_x = -\operatorname{arctg}\frac{dv}{dz}. \tag{224}$$

Если углы поворота малы, то

$$\varphi_x \approx -\frac{dv}{dz}. \tag{225}$$

Угол поворота сечения равен (по величине) производной от функции прогиба стержня.

Дифференцируя равенство (255), находим

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2}. \tag{226}$$

Параметр изгибной деформации при малых углах поворота сечения равен (по величине) второй производной прогиба.

Замечание. Допущение об отсутствии сдвига существенно упрощает картину деформации стержня при изгибе. Стержень можно представить в виде проволоки (ось стержня), к которой припаяны жесткие пластинки (поперечные сечения). Прогибы оси стержня и ее растяжение полностью определяют изменение расстояний, а следовательно, и деформации во всех точках стержня.

Геометрическая картина изгибной деформации. Рассмотрим чисто изгибную деформацию, когда удлинение оси стержня отсутствует ($\varepsilon_0 = 0$). Картина деформации приведена на рис. 8.60. Угол поворота сечения стержня φ_x показан в положительном направлении.

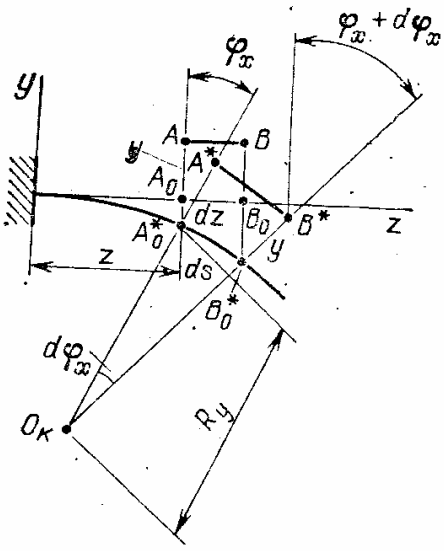


Рис. 8.60. Геометрическая интерпретация изгибной деформации

Отрезок AB на расстоянии y после деформации приобретает длину A^*B^*. Отрезок A_0B_0 на оси стержня после деформации сохраняет свою длину ($\varepsilon_0 = 0$):

$$A_0B_0 = AB = A_0^*B_0^* = ds. \tag{227}$$

Деформация растяжения волокна на расстоянии y от оси стержня

$$\varepsilon_z = \frac{A^*B^* - AB}{AB} = \frac{d\varphi_x\,(R_y + y) - ds}{ds} = \frac{d\varphi_x}{ds}\,y; \tag{228}$$

здесь использовано очевидное соотношение

$$ds = R_y d\varphi_x. \tag{229}$$

Величина R_y выражает радиус кривизны упругой линии. Кривизна кривой — величина, обратная радиусу кривизны:

$$\chi_y = \frac{1}{R_y} = \frac{d\varphi_x}{ds}. \tag{230}$$

Деформация удлинения оси стержня может быть добавлена к чисто изгибной деформации, и тогда

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{ds}. \tag{231}$$

При малых поворотах сечений соотношения (231) и (221) совпадают, так как

$$ds = dz\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2}, \tag{232}$$

и при

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \ll 1 \tag{233}$$

получим

$$ds = dz. \tag{234}$$

Применение условия (233) практически возможно при углах поворота до 20—30°.

Замечание. Переход от уравнения (224) к (225) связан с использованием условия (233). В общем случае из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_x = -\frac{dv}{dz}$$

после дифференцирования по z получаем

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin\varphi_x}{\cos\varphi_x}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi_x}\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2}. \tag{235}$$

Так как

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_x} = 1+\operatorname{tg}^2\varphi_x = 1+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2,$$

находим из соотношения (235)

$$\frac{d\varphi_x}{ds} = \frac{1}{R_y} = -\frac{d^2v/dz^2}{[1+(dv/dz)^2]^{3/2}}. \tag{236}$$

Если углы поворота сечения малы и условие (233) выполняется, то формулы (221) и (231) совпадают.

Уравнение упругой линии стержня. Продолжим рассмотрение изгиба в одной из главных плоскостей (в плоскости yOz) и будем считать, что нормальные усилия N в сечениях стержня отсутствуют. Тогда из уравнений (223) и (226) находим

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -\frac{M_x(z)}{EJ_x(z)}. \tag{237}$$

Полученное соотношение представляет уравнение упругой линии в дифференциальной форме.

Проинтегрируем обе части уравнения (237) от 0 до z; получим

$$\frac{dv}{dz}(z) = -\int_0^z \frac{M_x(z_1)}{EJ_x(z_1)}dz_1 + \frac{dv}{dz}(0), \tag{238}$$

где z_1 — переменная интегрирования $(0 \leqslant z_1 \leqslant z)$. В последнем равенстве $\frac{dv}{dz}(0)$ — угол поворота (точнее, угол поворота в сечении стержня $z = 0$).

Проинтегрировав обе части равенства (238) в тех же пределах, найдем

$$v(z) = -\int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1 + v(0) + \frac{dv}{dz}(0)\, z, \qquad (239)$$

где $v(0)$ — прогиб стержня в сечении $z = 0$.

Уравнение (239) представляет собой уравнение упругой линии. Входящие в него значения прогиба и угла поворота сечения при $z = 0$ определяются из условия закрепления стержня и граничных условий.

Замечание. Напомним, что величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования. Например,

$$\int_0^x x^2\, dx = \int_0^x \xi^2\, d\xi = \int_0^x x_1^2\, dx_1 = \frac{1}{3} x^3.$$

Одинаковое обозначение переменной интегрирования и переменного предела интегрирования может приводить к недоразумениям, поэтому в равенствах (238) и (239) вводятся обозначения z_1 и z_2.

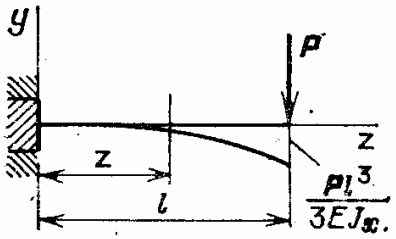


Рис. 8.61. Прогиб консольного стержня под действием сосредоточенной силы

Примеры, поясняющие применение уравнения упругой линии.

1. *Прогибы консольного стержня постоянного сечения под действием сосредоточенной силы* P (рис. 8.61). Стержень называется *консольным*, если одно из концевых сечений жестко закреплено, а другое свободно. Жесткое закрепление в сечении $z = 0$ (заделка) означает, что

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0,$$

т. е. смещение и угол поворота в заделке отсутствуют. Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = P(l - z).$$

Из уравнения (239) получаем

$$v(z) = -\frac{P}{EJ_x} \int_0^z \int_0^{z_1} (l - z_2)\, dz_2\, dz_1 = -\frac{P}{EJ_x} \int_0^z \left(l z_1 - \frac{1}{2} z_1^2 \right) dz_1,$$

или

$$v(z) = -\frac{P}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3 \right).$$

Наибольший прогиб будет при $z = l$:

$$v(l) = -\frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

2. *Прогибы консольного стержня постоянного сечения под действием распределенной нагрузки* (рис. 8.62). Решение начинаем с определения изгибающего момента в сечении. Равнодействующая сил, приложенных к отсеченной

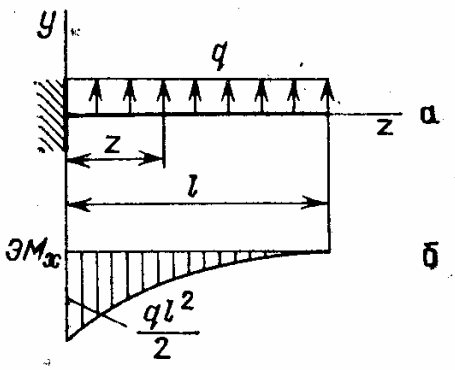


Рис. 8.62. Прогиб консольного стержня под действием распределенной нагрузки; *а* — расчетная схема; *б* — эпюра изгибающих моментов

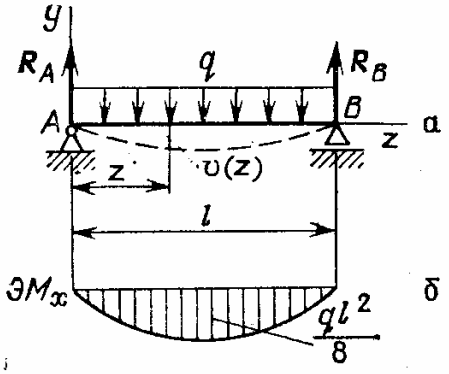


Рис. 8.63. Прогиб двухопорного стержня (балки) под действием распределенной нагрузки: *а* — расчетная схема; *б* — эпюра изгибающих моментов

части, равна $q(l - z)$; плечо равнодействующей $(l - z)/2$, следовательно,

$$M_x(z) = -q(l - z)^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Из уравнения (239) находим

$$v(z) = -\frac{q}{2EJ_x}\int_0^z\int_0^{z_1}(l - z_2)^2\,dz_2\,dz_1 = -\frac{q}{2EJ_x}\int_0^z\left(l^2 z_1 - lz_1^2 + \frac{1}{3}z_1^3\right) =$$

$$= -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{l^2 z^2}{2} - \frac{lz^3}{3} + \frac{z^4}{12}\right).$$

Прогиб конца стержня ($z = l$)

$$v(l) = -\frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

3. *Прогиб двухопорного стержня постоянного сечения под действием распределенной нагрузки* (рис. 8.63). В опорах стержня возникают реакции

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql.$$

Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = -\frac{1}{2}qlz + \frac{1}{2}qz^2.$$

В рассматриваемом случае условия закрепления таковы:

$$v(0) = 0, \qquad v(l) = 0.$$

Из уравнения упругой линии (239) находим

$$v(z) = \frac{q}{2EJ_x}\int_0^z\int_0^{z_1}\left(lz_2 - z_2^2\right)dz_2\,dz_1 + \frac{dv}{dz}(0)\,z.$$

Проведя интегрирование, получим

$$v(z) = \frac{q}{12EJ_x}\left(lz^3 - \frac{1}{2}z^4\right) + \frac{dv}{dz}(0)\,z.$$

Из краевого условия при $z = l$ определяем

$$\frac{dv(0)}{dz} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}.$$

Производная от функции прогибов в начале координат отрицательна (рис. 8.63).

Подставляя значение $\frac{dv}{dz}(0)$ в уравнение упругой линии, получаем

$$v(z) = -\frac{q}{12EJ_x}\left(\frac{1}{2}l^3z - lz^3 + \frac{1}{2}z^4\right).$$

Наибольший прогиб будет при $z = l/2$:

$$v\left(\frac{1}{2}l\right) = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Замечание. В технической литературе стержень, работающий на изгиб, часто называют *балкой*. Особенно распространено такое наименование в строительной технике, судостроении и в других областях. Так как «стержень» дает описание геометрической формы элемента конструкции, то в дальнейшем он будет иметь преимущественное применение. В старой технической литературе вместо термина «стержень» использовался термин «брус», который сейчас практически вышел из употребления.

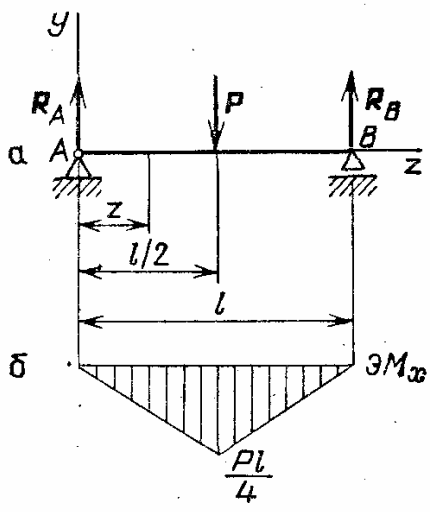


Рис. 8.64. Стержень (балка) на двух опорах под действием сосредоточенной силы: *а* — расчетная схема; *б* — распределение изгибающего момента

Уравнение упругой линии при изгибе стержней постоянного сечения. Приведенные примеры определения деформирования оси стержня были относительно просты тем, что изгибающий момент M_x имел одно аналитическое выражение для всего стержня. Но уже для балки, показанной на рис. 8.64, изгибающий момент имеет два выражения:

$$M_x(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2}Pz & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{2}P(l-z) & \text{при } \frac{l}{2} \leqslant z < l, \end{cases}$$

что делает более громоздким процесс интегрирования в уравнении (239). Можно, однако, существенно упростить использование уравнения (239) для нескольких типичных нагрузок, приведя уравне-

ние упругой линии к «стандартной форме». Разумеется, такая форма возможна только для стержней постоянного сечения. Для приведения уравнения упругой линии к стандартной форме, естественно, потребуется определенная формализация. Начало координат будем всегда помещать в левом конце стержня; направлениям внешних нагрузок в принятой системе координат припишем определенные знаки. На рис. 8.65 показаны положительные направления внешних нагрузок.

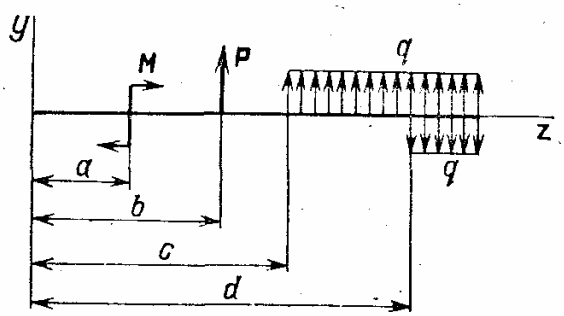


Рис. 8.65. Положительные направления внешних нагрузок для уравнения упругой линии в стандартной форме

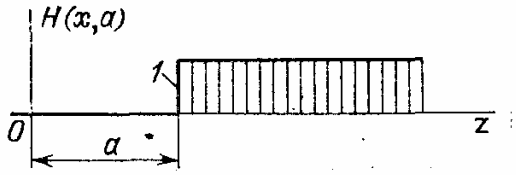


Рис. 8.66. Единичная разрывная функция (функция Хевисайда)

К числу внешних сил относятся усилия и моменты в опорах стержня, и потому опоры стержня не показаны. Уравнение упругой линии (239) представим в следующей стандартной форме:

$$v(z) = \frac{1}{EJ_x}\Phi(z) + v(0) + \frac{dv}{dz}(0)\,z, \tag{240}$$

где функция нагрузки

$$\Phi(z) = -\int_0^z \int_0^{z_1} M_x(z_2)\,dz_2\,dz_1. \tag{241}$$

При действии внешнего момента в сечении $z = a$ выражение для изгибающего момента принимает вид

$$M_x(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant a, \\ -M & \text{при } z > a. \end{cases} \tag{242}$$

Последнее равенство можно записать более кратко, если ввести единичную разрывную функцию (функцию Хевисайда):

$$H(z, a) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant a, \\ 1 & \text{при } z > a. \end{cases} \tag{243}$$

График функции Хевисайда приведен на рис. 8.66. Если $f(z)$ — произвольная (интегрируемая) функция, то

$$\int_0^z H(z_1, a)\,f(z_1)\,dz_1 = H(z, a)\int_a^z f(z_1)\,dz_1. \tag{244}$$

Последнее равенство очевидно, так как функция $H(z, a)$ «уничтожает» все значения $f(z)$ при $z < a$. Повторное интегрирование дает (проверьте!)

$$\int_0^z \int_0^{z_1} H(z_2, a) f(z_2)\, dz_2\, dz_1 = H(z, a) \int_a^z \int_a^{z_1} f(z_2)\, dz_2\, dz_1. \qquad (245)$$

Равенство (242) представим в виде

$$M_x(z) = -H(z,\ a) M. \qquad (246)$$

Функция нагрузки для внешнего момента на основании формулы (245) будет такой:

$$\Phi(z) = H(z, a) \int_a^z \int_a^{z_1} M\, dz_2\, dz_1 = H(z, a)\, M \frac{(z-a)^2}{2!}. \qquad (247)$$

Для внешней силы в сечении b

$$M_x(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant b, \\ -P(z-b) & \text{при } z > b, \end{cases} \qquad (248)$$

или

$$M_x(z) = -H(z,\ b) P(z-b).$$

Функция нагрузки для внешней силы в сечении z имеет вид

$$\Phi(z) = H(z, b) \int_b^z \int_b^{z_1} P(z_2 - b)\, dz_2\, dz_1 = H(z, b)\, P \frac{(z-b)^3}{3!}. \qquad (249)$$

На участке $c \leqslant z \leqslant d$ (рис. 8.65) к стержню приложена равномерно распределенная нагрузка с постоянной интенсивностью q. Допустим сначала, что распределенная нагрузка приложена на всем протяжении (до конца стержня) при $z \geqslant c$. Тогда изгибающий момент в сечении

$$M_x(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant c, \\ -\frac{1}{2} q (z-c)^2 & \text{при } z > c, \end{cases}$$

или

$$M_x(z) = -H(z, c)\, q \frac{(z-c)^2}{2}.$$

Функция нагрузки для распределенной нагрузки при $z > c$ имеет вид

$$\Phi(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} H(z, c)\, q \frac{(z_2 - c)^2}{2}\, dz_2\, dz_1 = H(z, c)\, q \frac{(z-c)^4}{4!}.$$

Представим теперь, что на участке при $z \geqslant d$ приложена такая же нагрузка, но в противоположном направлении. Тогда для нее функция нагрузки представляется в виде

$$\Phi(z) = -H(z, d)\, q \frac{(z-d)^4}{4!}.$$

Функция нагрузки для распределенной нагрузки на участке $c \leqslant z \leqslant d$ будет такой:

$$\Phi(z) = H(z, c)\, q \frac{(z-c)^4}{4!} - H(z, d)\, q \frac{(z-d)^4}{4!}. \qquad (250)$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда на стержень в сечениях $a_1, a_2, \ldots$ приложены моменты $M_1, M_2, \ldots$; в сечениях $b_1, b_2, \ldots$ — усилия $P_1, P_2, \ldots$ и на участках c_i, d_i распределена нагрузка q_i. Всего таких сечений n $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

В соответствии с принципом независимости действия сил, справедливым для упругих систем, при одновременном воздействии всех нагрузок уравнение упругой линии будет таким:

$$v(z) = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^{n} \left(H(z, a_i) M \frac{(z-a_i)^2}{2!} + H(z, b_i) P \frac{(z-b_i)^3}{3!} + \right.$$
$$\left. + H(z, c_i)\, q \frac{(z-c_i)^4}{4!} - H(z, d_i)\, q \frac{(z-d_i)^4}{4!} \right) + v(0) + \frac{dv}{dz}(0)\, z. \qquad (251)$$

Это и есть уравнение упругой линии в стандартной форме (или универсальное уравнение упругой линии). Его можно дополнить учетом распределенной нагрузки с линейным и квадратным законом изменения по z, но в этом нет необходимости, так как нагрузку $q(z)$ всегда можно аппроксимировать участками постоянной интенсивности.

Пример использования уравнения упругой линии стержня в стандартной форме. Определим уравнение упругой линии стержня на двух шарнирных опорах при действии сосредоточенной силы в середине пролета (см. рис. 8.64). К стержню приложены три внешние силы в сечении $z = 0$ $(P_1 = P/2)$, в сечении $z = l/2$ $(P_2 = -P)$ и в сечении $z = l$ $(P_3 = P/2)$.

По формулам (240) и (249) находим

$$v(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(H(z, 0) \cdot \frac{1}{2} P \frac{z^3}{6} - H\left(z, \frac{1}{2} l\right) P \frac{(z - l/2)^3}{6} \right) + \frac{dv}{dz}(0)\, z.$$

Сила P_3 (реакция в опоре B) в явном виде не участвует, так как приложена в правом конце стержня $(H(z, l) = 0)$. Из краевого условия $v(l) = 0$ получаем

$$\frac{dv}{dz}(0) = -\frac{Pl^2}{16EJ_x};$$

тогда уравнение упругой линии стержня примет вид

$$v(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[H(z, 0) \cdot \frac{1}{2} P \frac{z^3}{6} - H\left(z, \frac{1}{2} l\right) \frac{P(z - l/2)^3}{6} - \frac{Pl^2 z}{16} \right].$$

Наибольший прогиб получается при $z = l/2$:

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl^3}{48EJ_x}.$$

Основная форма дифференциального уравнения плоского изгиба стержня. Ранее было установлено дифференциальное уравнение изгиба (уравнение (237)), которое запишем в следующей форме:

$$EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -M_x(z). \tag{252}$$

После интегрирования уравнения (237) или (252) были получены значения прогиба $v(z)$ и угла поворота dv/dz (соотношения (238) и (239)). Однако во многих случаях более удобно определить в результате интегрирования все основные параметры задачи: прогибы, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Для этого следует перейти к другой, эквивалентной форме дифференциального уравнения изгиба.

Дифференцируя равенство (252) по z и используя уравнение равновесия (82), получим

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = -Q_y(z). \tag{253}$$

Снова повторяя дифференцирование и ссылаясь на соотношение

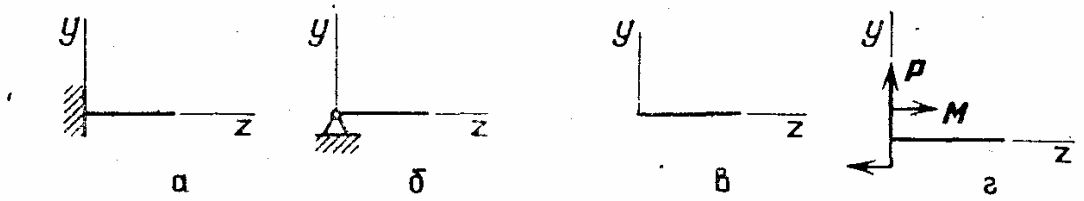


Рис. 8.67. Виды закрепления конца стержня: *а* — заделка; *б* — шарнирное закрепление; *в* — свободный конец; *г* — загруженный конец

(81), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = q_y(z). \tag{254}$$

Это и есть основная форма дифференциального уравнения плоского изгиба стержня.

Для стержня постоянного сечения ($J_x(z) = \text{const}$) уравнение (254) будет таким:

$$\frac{d^4v(z)}{dz^4} = \frac{q_y(z)}{EJ_x}. \tag{255}$$

Дифференциальное уравнение определяет широкий класс функций.

Из него должна быть выбрана функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи (т. е. условиям закрепления концов стержня). Разберем эти условия при $z=0$ (рис. 8.67); при $z=l$ они имеют точно такой же вид.

Конец заделан: $v(0)=0,\ \frac{dv}{dz}(0)=0.$

Шарнирное закрепление: $v(0)=0,\ \frac{d^2v}{dz^2}(0)=0.$

Свободный конец: $\frac{d^2v}{dz^2}(0)=0,\ \frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\Big|_{z=0}=0.$

Загруженный конец: $\frac{d^2v}{dz^2}(0)=-\frac{M}{EJ_x(0)},\ \frac{d}{dz}\left[EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right]\Big|_{z=0}=-P.$

Если производная dJ_x/dz ограничена при $z=0$, то второе условие для свободного конца может быть принято в более простом виде:

$$\frac{d^3v}{dz^3}(0)=0.$$

Условия на загруженном конце согласованы с правилами знаков для M_x и Q_x и условиями (252) и (253) (рис. 8.3).

Уравнение (254) представляет дифференциальное уравнение четвертого порядка, и для однозначности решения должны быть заданы четыре краевых условия (по два на каждом конце). При наличии сосредоточенных моментов и сил должны быть заданы скачки производных в соответствующих сечениях.

Замечание. Уравнение (254) называется основным, так как объединяет основные уравнения изгиба: геометрические, физические и статические. Уравнение (252) включает уравнения равновесия только косвенно (при определении изгибающего момента).

В форме (254) уравнение изгиба используется в задачах колебания и устойчивости стержней и других задачах, где требуется более полный анализ. Уравнение изгиба в основной форме является разрешающим, т. е. позволяет по заданной функции $q(z)$ найти основные параметры задачи без предварительного определения изгибающего момента в сечении.

Дифференциальное уравнение плоского изгиба в матричной форме. Уравнения изгиба (254) можно представить в виде совокупности четырех уравнений первого порядка. Введем следующие функции $y_i(z)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, подлежащие определению:

$$y_1(z)=v(z),\quad y_2(z)=\frac{dv(z)}{dz},\quad y_3(z)=M_x(z),\quad y_4(z)=Q_y(z).$$

Тогда из уравнений (252) — (254) получим

$$y_1'(z)=y_2(z),\quad y_2'(z)=-\frac{1}{EJ_x(z)}y_3(z),\quad y_3'(z)=y_4(z),\quad y_4'(z)=q_y(z), \tag{256}$$

где штрих означает производную по z.

Систему уравнений (256) запишем в матричной форме:

$$\{y'\} = [A]\{y\} + \{F\}, \tag{257}$$

где вектор состояния

$$\{y\}^{\mathrm{T}} = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4\} = \{v,\ v',\ M_x,\ Q_y\}, \tag{258}$$

матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(EJ_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

вектор внешней нагрузки

$$\{F\}^{\mathrm{T}} = \{0,\ 0,\ 0,\ q_y(z)\}. \tag{259}$$

Уравнения в матричной форме хорошо приспособлены для численного интегрирования на ЭВМ. Обычно для этих целей используются метод Рунге — Кутта и его различные модификации. Но весьма эффективным для решения уравнения (257) является метод последовательных приближений.

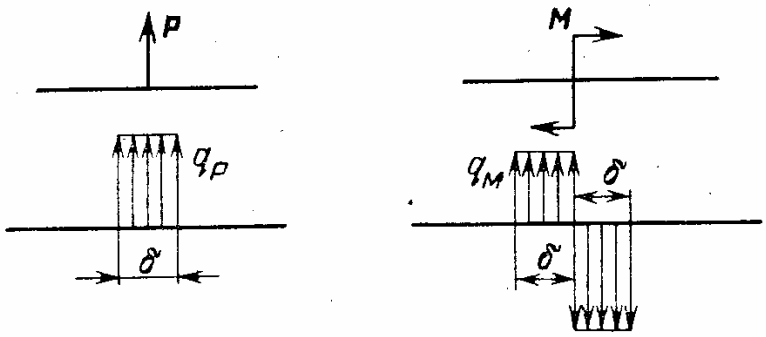


Рис. 8.68. Замена сосредоточенных воздействий распределенными

При наличии сосредоточенных силовых факторов их следует заменить эквивалентными распределенными нагрузками, действующими на малых участках (рис. 8.68). При действии силы P на участке δ прикладывается распределенная нагрузка

$$q_P = P/\delta; \tag{260}$$

момент M заменяется «парой» распределенных нагрузок и интенсивностью

$$q_M = M/\delta^2. \tag{261}$$

Величина δ в равенствах (260) и (261) может быть задана произвольно, но она должна отражать реальные условия нагружения и особенности передачи сосредоточенных усилий на конструкцию (ширину накладок, местные утолщения и т. п.).

Замечание. Следует отметить, что понятие сосредоточенного воздействия является идеализированным. В действительности такие воздействия осуществляются в виде распределенных нагрузок на малых участках (см. рис. 8.28).

Нормальные фундаментальные функции дифференциального уравнения изгиба и начальные параметры. Если имеется линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(v)=f(z), \tag{262}$$

то его общее решение может быть представлено в виде

$$v(z)=C_1y_1(z)+\ldots+C_ny_n(z)+y^*(z), \tag{263}$$

где $y_i(z)$ $(i=\overline{1,\ n})$ — линейно независимые частные решения однородного уравнения

$$L(v)=0; \tag{264}$$

$y^*(z)$ — какое-либо частное решение; C_1, ..., C_n — произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

Функции $y_i(z)$ $(i=\overline{1,\ n})$ образуют систему фундаментальных функций уравнения (262) или (264). Так как любые линейные комбинации частных решений однородного уравнения также являются его решениями, то можно выбрать в качестве частных решений функции, удовлетворяющие следующему условию для производной j-го порядка в начале координат:

$$y_i^{(j)}(0)=\frac{d^jy_i(0)}{dz^j}=\begin{cases}0 & \text{при } j\neq i-1,\\ 1 & \text{при } j=i-1\end{cases}\quad\begin{pmatrix}j=0,1,2,3;\\ i=1,2,3,4\end{pmatrix}. \tag{265}$$

Верхний индекс в круглых скобках означает порядок производной; производной нулевого порядка является сама функция $\left(y_i^{(0)}=y_i\right)$. Например, функция $y_2(z)$ должна иметь при $z=0$

$$y_2(0)=0,\quad y_2^{(1)}(0)=1,\quad y_2^{(2)}(0)=0,\quad y_2^{(3)}(0)=0. \tag{266}$$

Частные решения однородного уравнения $y_i(z)$, удовлетворяющие при $z=0$ условию (265), называются *нормальными фундаментальными функциями*. Выберем частное решение $y^*(z)$ таким, что при $z=0$ само решение и его $n-1$ первых производных обращаются в нуль:

$$y^*(0)=0,\quad y^{*(1)}(0)=0,\quad \ldots,\quad y^{*(n-1)}(0)=0. \tag{267}$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами условию (267) и уравнению (262) будет удовлетворять функция

$$y^*(z)=\int_0^z y_n(z-z_1)\,f(z_1)\,dz_1. \tag{268}$$

Если $y_i(z)$ являются нормальными фундаментальными функциями

и частное решение $y^*(z)$ соответствует условиям (267), то постоянные C_1, C_2 получают ясный физический смысл.

В результате общее решение дифференциального уравнения (262) можно записать в следующей форме:

$$v(z)=v(0)\,y_1(z)+v^{(1)}(0)\,y_2(z)+\ldots+v^{(n-1)}(0)\,y_n(z)+y^*(z). \quad (269)$$

Совокупность значений $v(0)$, $v^{(1)}(0)$, ... называют *начальными параметрами краевой задачи.*

Особыми преимуществами обладают нормальные фундаментальные функции для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, весьма распространенными при решении технических задач. Для таких уравнений удается сразу записать решения, имеющие скачки производных. Пусть в сечении a_s заданы скачки производных

$$\Delta_s v(z)=\Delta_s^{(0)},\quad \Delta_s v'(z)=\Delta_s^{(1)},\ \ldots,\ \Delta_s^{(n-1)}(z)=\Delta_s^{(n-1)}. \quad (270)$$

Общий интеграл уравнения (262) при наличии скачков производных в сечении $z=a_s$ будет таким:

$$v(z)=v(0)\,y_1(z)+\ldots+v^{(n-1)}(0)\,y_n(z)+ \\ +\sum_{j=0}^{n-1} H(z,a_s)\,\Delta_s^{(j)}y_{j+1}(z-a_s)+y^*(z). \quad (271)$$

При скачках в других сечениях (a_1, a_2, ...) добавляются аналогичные суммы.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение изгиба стержня постоянного сечения (уравнение (255)):

$$L(v)=\frac{d^4v}{dz^4}=\frac{q_y(z)}{EJ_x}. \quad (272)$$

Частными решениями однородного уравнения

$$\frac{d^4v}{dz^4}=0 \quad (273)$$

могут быть любые линейно независимые полиномы не выше третьей степени. Легко проверить (проверьте!), что нормальными фундаментальными функциями для уравнения (272) будут следующие:

$$y_1(z)=1,\quad y_2(z)=z,\quad y_3(z)=\frac{z^2}{2!},\quad y_4(z)=\frac{z^3}{3!}. \quad (274)$$

Уравнение упругой линии стержня теперь получим как частный случай решения (271):

$$v(z)=v(0)+\frac{dv}{dz}(0)\,z+\frac{d^2v}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!}+\frac{d^3v}{dz^3}(0)\frac{z^3}{3!}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m} H(z, a_s)\left(\Delta_s^{(0)}+\Delta_s^{(1)}(z-a_s)+\Delta_s^{(2)}\frac{(z-a_s)^2}{2!}+\Delta_s^{(3)}\frac{(z-a_s)^3}{3!}\right)+$$

$$+\int_0^z \frac{(z-z_1)^3}{3!}\frac{q(z_1)}{EJ_x}\,dy_1. \qquad (275)$$

Формула (275) представляет наиболее общее выражение для прогиба стержня.

В практических задачах скачок прогиба почти не встречается, и можно положить

$$\Delta_s^{(0)} = v(a_s+0) - v(a_s-0) = 0.$$

Скачок первой производной (угла поворота двух смежных сечений) может быть при наличии внутренних шарниров. Скачки второй и третьей производных происходят в сечениях, где приложены сосредоточенные моменты и силы (см. рис. 8.65):

$$\Delta_s^{(2)} = \frac{M}{EJ_x}, \quad \Delta_s^{(3)} = \frac{P}{EJ_x}.$$

В качестве *начальных параметров* в задаче об изгибе стержня обычно принимают следующие величины:

$$v(0), \quad \frac{dv}{dz}(0), \quad M_x(0) = -\frac{d^2v}{dz^2}(0)\,EJ_x, \quad Q_y(0) = -\frac{d^3v}{dz^3}(0)\,EJ_x.$$

Статически неопределимые задачи изгиба стержней. Если силовые факторы в сечении стержня (изгибающий момент, перерезывающая сила) не могут быть определены из условий равновесия (отсеченной части), то такие задачи относят к числу статически неопределимых. Рассмотрим несколько примеров решения подобных задач.

Пример 1. *Стержень под действием распределенных усилий.* Одно из концевых сечений заделано, другое шарнирно оперто (рис. 8.69, *а*). В системе имеется «лишнее закрепление» — шарнирное закрепление в точке *A*. Отбросим лишнее закрепление, заменив его неизвестным усилием X_1 (рис. 8.69, *б*).

Тогда получим статически определимую систему, которая называется «основной». По условиям задачи

$$v(l) = \delta_{1P} + X_1\delta_{11} = 0, \qquad (276)$$

где δ_{1P} — прогиб точки *A* от заданной нагрузки *P* в направлении усилия X_1; δ_{11} — прогиб от единичной силы, приложенной в точке *A*, в направлении усилия X_1.

Направление неизвестного усилия всегда предполагается заранее. Если в результате решения неизвестная величина X_1 получается со знаком минус, то, следовательно, она направлена в противоположную сторону. Значение δ_{1P} может быть взято из решения задачи на рис. 8.62:

$$\delta_{1P} = \frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

Величина δ_{11} определяется из решения задачи на рис. 8.61:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ_x}.$$

Теперь из уравнения (276) находим

$$X_1 = -\frac{3}{8}ql.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 8.69, *в*.

Пример 2. *Стержень на трех шарнирных опорах под действием распределенной нагрузки* (рис. 8.70). Первый этап расчета — превращение системы

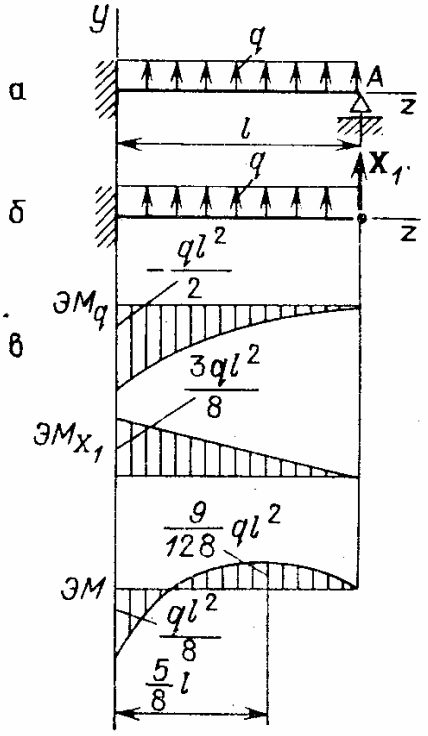


Рис. 8.69. Решение статически неопределимой задачи изгиба: *а* — расчетная схема; *б* — основная (эквивалентная) система; *в* — эпюры изгибающих моментов

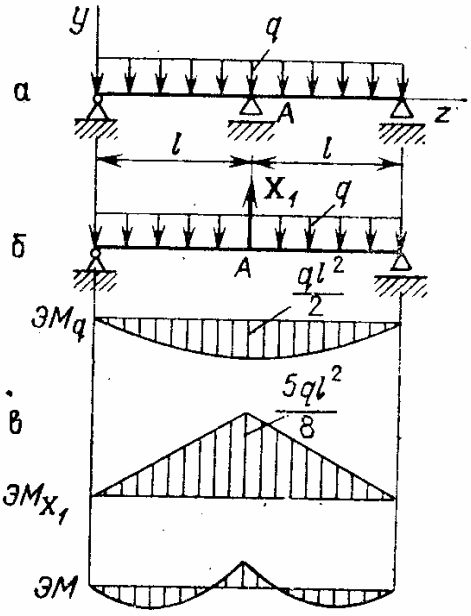


Рис. 8.70. Расчет балки на трех опорах: *а* — расчетная схема; *б* — основная (эквивалентная) схема; *в* — эпюры изгибающих моментов

в статически определимую путем отсечения «лишних связей» и замены их действия неизвестными усилиями (рис. 8.70, *б*). Выберем основную систему в виде балки с двумя шарнирными опорами. Прогиб в точке A отсутствует, и потому

$$\delta_{1P} + X_1\delta_{11} = 0. \qquad (277)$$

Прогиб от внешней нагрузки в основной системе δ_{1P} может быть определен из ранее решенной задачи (рис. 8.63). Учитывая, что общая длина балки $2l$, найдем

$$\delta_{1P} = -\frac{5}{384}\frac{q(2l)^4}{EJ_x} = -\frac{5}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Величину δ_{11} — прогиб в направлении X_1 от единичной силы того же направления — принимаем из решения приведенного выше примера (рис. 8.64)

$$\delta_{11} = \frac{1\cdot(2l)^3}{48EJ_x} = \frac{1\cdot l^3}{6EJ_x}.$$

Теперь из уравнения (277) находим

$$X_1 = \frac{5}{4}ql.$$

Эпюры изгибающих моментов (от нагрузки q, реакции в средней опоре и суммарная) приведены на рис. 8.70, *в*.

Замечание. Общий прием решения статически неопределимых задач изгиба (отбрасывание лишних связей, замена их неизвестными усилиями и определение последних из условий закрепления) составляет *метод сил*.

Учет деформации сдвига при изгибе стержня. Как уже указывалось, для коротких стержней и для стержней из материалов с небольшим сопротивлением сдвигу (композиционные материалы) перемещения, вызванные деформацией сдвига, оказываются соизмеримыми с перемещениями при деформации изгиба. Экспериментальные исследования и анализ точных решений показали, что деформации сдвига можно рассматривать независимо от деформации изгиба. На рис. 8.71 показана деформация сдвига консольного

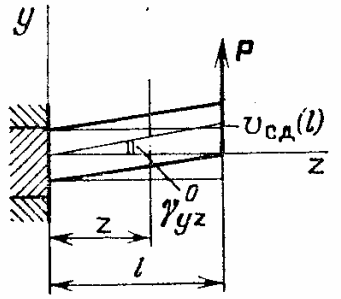


Рис. 8.71. Деформация сдвига при поперечной нагрузке консольного стержня

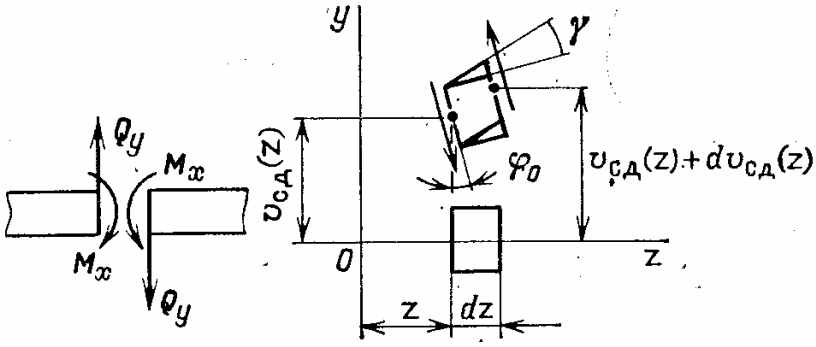


Рис. 8.72. Перемещение и деформация сдвига элемента стержня при деформации сдвига

стержня под действием поперечной нагрузки P. Сечения стержня получают перемещения вдоль оси y, взаимный поворот сечений отсутствует.

Деформацию сдвига на оси стержня между направлениями y, z при работе материала в упругой области можно принять следующей:

$$\gamma^0_{yz} = K_y(z)\frac{Q_y(z)}{GF(z)}, \qquad (278)$$

где G — модуль сдвига; $F(z)$ — площадь поперечного сечения; $Q_y(z)$ — перерезывающая сила в сечении; $K_y(z)$ — безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение каса-

тельных напряжений при поперечном изгибе (рекомендации по определению величины K_y будут даны ниже).

Перемещение и деформация сдвига элемента стержня показаны на рис. 8.72.

Кроме поступательного смещения на $v_{сд}(z)$ элемент может повернуться как жесткое целое на угол φ_0, одинаковый для всех элементов стержня, так как взаимный поворот сечений отсутствует. Приращение прогиба, вызванное деформацией сдвига на участке dz

$$dv_{сд}(z) = K_y \frac{Q_y}{GF} dz + \varphi_0 dz, \tag{279}$$

откуда

$$\frac{dv_{сд}(z)}{dz} = K_y \frac{Q_y}{GF} + \varphi_0. \tag{280}$$

Проинтегрировав обе части равенства в пределах от 0 до z, находим

$$v_{сд}(z) = \int_0^z K_y \frac{Q_y}{GF} dz + v_{сд}(0) + \varphi_0 z, \tag{281}$$

где $v_{сд}(0)$ и φ_0 — соответственно прогиб, угол поворота сечения $z = 0$. Уравнение (281) — основное уравнение для определения прогиба стержней в результате деформации сдвига.

Пример 1. Определить прогиб сдвига для консольного стержня под действием усилия P (см. рис. 8.71). Перерезывающая сила в сечении стержня $Q_y = P$. По формуле (281) находим прогиб на конце (угол поворота сечения и прогиб при $z = 0$ отсутствуют):

$$v_{сд}(l) = K_y \frac{Pl}{GF}.$$

Прогиб конца стержня в результате изгиба, как было получено выше, равен

$$v_{и}(l) = \frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

Отношение прогибов

$$\lambda = \frac{v_{сд}(l)}{v_{и}(l)} = K_y \frac{3EJ_x}{GFl^2}. \tag{282}$$

Для прямоугольного сечения $b \times h$ (h — высота сечения)

$$F = bh, \qquad J_x = bh^3/12.$$

Касательное напряжение при изгибе стержня прямоугольного сечения на оси

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F},$$

деформация сдвига

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{GF}.$$

Принимая $K_y = 3/2$, получим для прямоугольного сечения

$$\lambda = \frac{3}{8}\frac{E}{G}\frac{h^2}{l^2}.$$

Для обычного конструкционного материала

$$E/G = 2(1+\mu),$$

где μ — коэффициент Пуассона. Отношение прогибов сдвига и изгиба

$$\lambda = \frac{3}{4}(1+\mu)\frac{h^2}{l^2}.$$

При высоте сечения $h = l$ прогибы приблизительно одинаковы. При расчете на прочность зубьев шестерни, витков резьбы деформация сдвига должна обязательно учитываться.

Пример 2. Определить прогиб двухопорного стержня в результате деформации сдвига (рис. 8.73).

Реакции в опорах равны

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql.$$

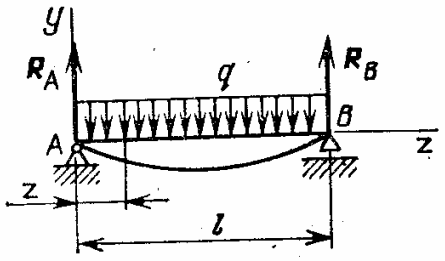


Рис. 8.73. Определение прогиба сдвига двухопорной балки

Перерезывающая сила в сечении равна

$$Q_y(z) = -\frac{1}{2}ql + qz.$$

По формуле (281) находим прогиб двухопорного стержня

$$v_{сд}(z) = \int_l^z \frac{K_y}{GF}\left(-\frac{1}{2}ql + qz_1\right)dz_1 + \varphi_0 z.$$

Для стержня постоянного сечения

$$v_{сд}(z) = -\frac{K_y}{GF}\frac{q}{2}(lz - z^2) + \varphi_0 z.$$

Из условия $v_{сд}(l) = 0$ находим $\varphi_0 = 0$.

Последний результат можно установить сразу, так как сечение $z = l/2$ не поворачивается вследствие симметрии.

Окончательно получим

$$v_{сд}(z) = -\frac{K_y}{2GF}q(lz - z^2).$$

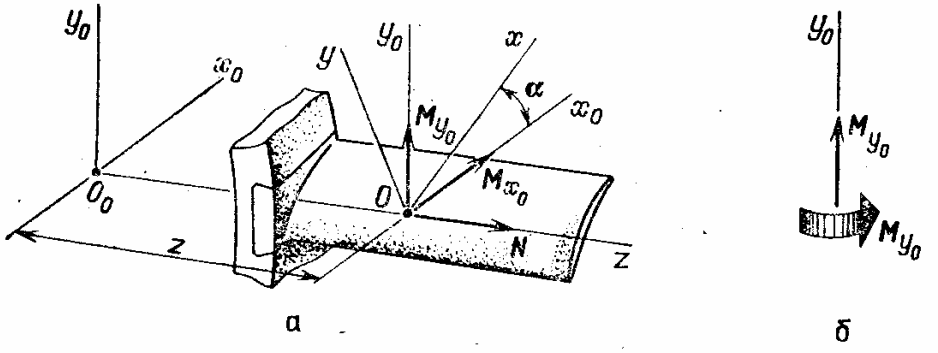
Замечание. Нельзя сделать вывод, что сечения стержня вообще не поворачиваются при деформации сдвига. Если, например, в задаче на рис. 8.73 половина балки имела бы другие размеры сечения, то $\varphi_0 \neq 0$. При наличии заделки или плоскости симметрии $\varphi_0 = 0$.

Уравнение упругой линии стержня при изгибе в двух главных плоскостях. Как уже указывалось, если нагрузки действуют в плоскости, совпадающей с одной из главных, то стержень испы-

тывает плоский изгиб. В этом случае упругая линия стержня является плоской кривой.

Однако часто нагрузки действуют не в главной плоскости или даже не в одной плоскости либо стержень обладает начальной закруткой (воздушные винты и др.) — все это приводит к задачам пространственного изгиба стержня.

На рис. 8.74 рассматриваются изгиб и растяжение лопатки турбины. Главные оси сечения x, y повернуты относительно осей конструкции x_0, y_0 на угол α (ось x_0 направлена вдоль оси вращения, ось z — вдоль оси лопатки в радиальном направлении).



а б

Рис. 8.74. Изгиб стержня в двух главных плоскостях (yOz и xOz): *а* — изгиб лопатки компрессора (изгибающие моменты изображаются векторами); *б* — правило изображения

В сечении z действуют растягивающее усилие N и изгибающие моменты M_{x_0} и M_{y_0}. На рис. 8.74 они изображены векторами, причем момент стремится осуществить поворот против часовой стрелки, если смотреть от конца вектора момента к его началу (правая система координат). Наиболее важное правило при исследовании пространственного изгиба состоит в следующем: изгибы в главных плоскостях можно рассматривать независимо друг от друга.

Изгибающий момент, действующий в главной плоскости yOz (рис. 8.75),

$$M_x = M_{x_0} \cos\alpha + M_{y_0} \sin\alpha. \tag{283}$$

По уравнению (237)

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} = -\frac{1}{EJ_x}(M_{x_0} \cos\alpha + M_{y_0} \sin\alpha). \tag{284}$$

Изгибающий момент, осуществляющий изгиб в главной плоскости xOz,

$$M_y = M_{y_0} \cos\alpha - M_{x_0} \sin\alpha. \tag{285}$$

Из уравнения (16) при отсутствии температурной деформации и

при постоянном модуле упругости получаем

$$\frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y}, \tag{286}$$

где $J_y = \int\limits_F x^2\,dF$ — момент инерции сечения относительно оси y.

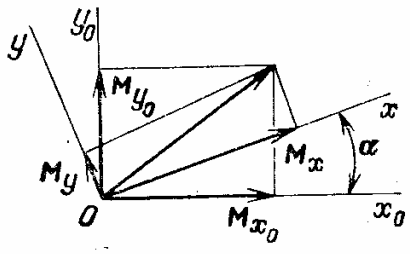


Рис. 8.75. Определение изгибающего момента относительно главных осей

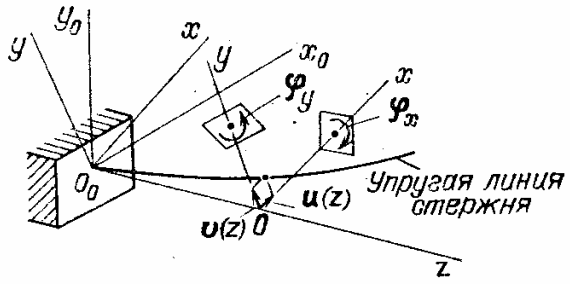


Рис. 8.76. Пространственная упругая линия стержня

Будем обозначать компоненты смещения центра тяжести сечения по осям x и y соответственно $u(z)$ и $v(z)$. Учитывая принятое правило знаков для углов поворота сечения (рис. 8.76) и считая их малыми, будем иметь

$$\varphi_x = -\frac{dv(z)}{dz}, \tag{287}$$

$$\varphi_y = \frac{du(z)}{dz}. \tag{288}$$

(Дайте объяснение, почему формулы (287) и (288) имеют в правых частях разные знаки!)

Из соотношений (285), (286) и (288) находим

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y}(M_{y_0}\cos\alpha - M_{x_0}\sin\alpha). \tag{289}$$

В общем случае изгиба упругая линия является пространственной кривой — точки оси стержня получают смещения по направлениям x и y. Уравнения (284) и (289) определяют прогибы стержня в общем случае изгиба.

Напряжения в точках поперечного сечения стержня находятся по формуле (18):

$$\sigma = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}. \tag{290}$$

Замечание. Приведенные уравнения пространственной упругой линии относятся к призматическим стержням. Если главные оси сечений имеют в начальном состоянии взаимный поворот (стержни с первоначальной закруткой: воздушные винты, лопатки и т. п.), то уравнения (284) и (289) дают компоненты вектора кривизны, которые следует проектировать на общие оси x_0, y_0.

Пример. Стержень прямоугольного сечения изгибается силой P и растягивается усилием N (рис. 8.77). Требуется найти напряжения в точках стержня и перемещения точки приложения сил. Главные оси сечений — оси x, y.

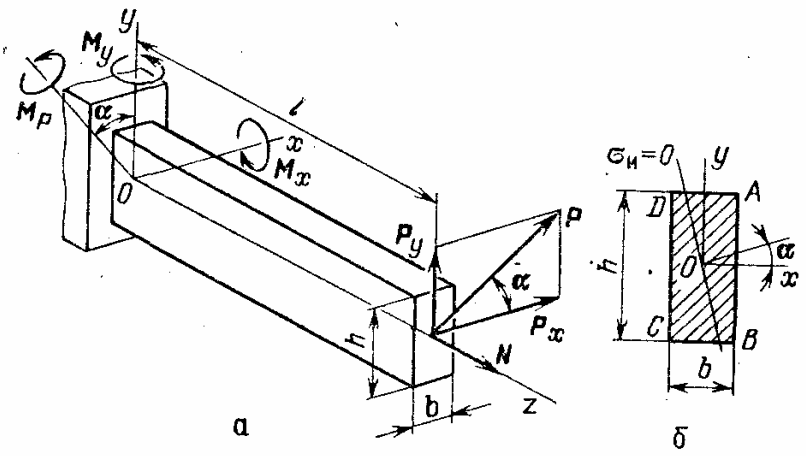


Рис. 8.77. Пространственный изгиб стержня

Изгибающие моменты в опасном сечении (т. е. в сечении, где имеются точки с наибольшими напряжениями) определим двумя способами. Сначала определим общий момент, модуль которого $M_P = Pl$, а проекции момента на оси x и y

$$M_x = -Pl\sin\alpha, \qquad M_y = Pl\cos\alpha.$$

Более просто в рассматриваемом примере разложить усилие P на составляющие P_x и P_y и найти значения M_x и M_y. Напряжения в поперечном сечении

$$\sigma = \sigma_р + \sigma_и = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} + x\frac{M_y}{J_y},$$

где $\sigma_р$ — напряжение растяжения, распределенное равномерно по площади поперечного сечения; напряжения изгиба

$$\sigma_и = y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}. \tag{291}$$

В поперечном сечении существует линия, которая называется *нейтральной*, в точках которой напряжение изгиба равно нулю. Уравнение этой линии, проходящей через центр тяжести сечения, имеет вид

$$\sigma_и = y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y} = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y}.$$

В рассматриваемом примере

$$\frac{y}{x} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Если $b = h$, то нейтральная линия перпендикулярна плоскости действия нагрузки.

ГЛАВА 9

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ, ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ, ОБЩИЕ СВОЙСТВА УПРУГИХ СИСТЕМ

Ранее для анализа распределения напряжений и деформаций применялись дифференциальные методы, основанные на геометрических, статических и физических соотношениях, описывающих поведение частицы материала или элемента конструкции. В результате получались дифференциальные уравнения, характеризующие «условия жизни» малого элемента. Интегрирование указанных уравнений давало описание работы всей конструкции, т. е. учитывало совместную работу всех сопряженных элементов. Краевые условия при интегрировании дифференциальных уравнений отражали особенности поведения элементов, примыкающих к границам тела. Однако существуют и другие методы анализа, которые могут быть названы *вариационными*. Эти методы основаны на изучении общих количественных характеристик конструкции (функционалов), таких как энергия деформации, работа внешних сил при деформации конструкции и т. п. Условие того, что функционал для всей конструкции должен приобретать минимальное значение, накладывает определенные ограничения на поведение каждого элемента. Эти ограничения или условия оказываются как раз теми дифференциальными уравнениями, которые изучались ранее. Таким образом, дифференциальные и вариационные методы не противоречат, а взаимно дополняют друг друга. Общность анализа, возможность использования приближенных методов, удобных для численной реализации на ЭВМ, делают вариационные или энергетические методы весьма важными для прочностного анализа конструкции.

Вариационные методы связаны с понятием функционала. *Функционалом* называется скалярная величина (число), зависящая от поведения функции или нескольких функций в определенной области. Например, длина кривой, соединяющей две заданные точки пространства, является функционалом; он имеет минимальные значения для линейной функции (прямой).

Вариационные методы приложимы для различных моделей материала, но в дальнейшем ограничимся рассмотрением работы конструкций в упругой области.

35. Потенциальная энергия деформации

Предварительное замечание. При деформации упругое тело накапливает энергию деформации за счет работы внешних сил. Сжатая пружина может возвратить затраченную на ее сжатие работу, так как обладает потенциальной энергией деформации. Это явление используется в ряде технических устройств (заводные пружины часов, пружины воздушных тормозов железнодорожных вагонов и т. п.). Ближайшая задача состоит в получении общих формул для определения потенциальной энергии деформации, но начнем с рассмотрения простейшего случая — растяжения стержня.

Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии стержней. Рассмотрим растяжение стержня усилием N (рис. 9.1,*а*). Усилие возрастает медленно от 0 до N и по закону упругости: пропорционально силе увеличивается удлинение стержня. Пренебрегая кинетической энергией частиц стержня и изменением их тепловой энергии в процессе нагружения, считаем по закону сохранения энергии, что потенциальная энергия деформации U

равна работе внешней силы:

$$U = \int_0^{\Delta l} N_1 \, d(\Delta l_1), \tag{1}$$

где N_1 и Δl_1 — значения усилия и удлинения в промежуточный момент нагружения.

По физическому смыслу интеграл (1) равен площади на рис. 9.1, *б*:

$$U = \frac{1}{2} N \Delta l. \tag{2}$$

При растяжении стержней

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \tag{3}$$

где E — модуль упругости; F — площадь поперечного сечения (изменением F в процессе деформации пренебрегают как малой величиной); l — первоначальная длина стержня.

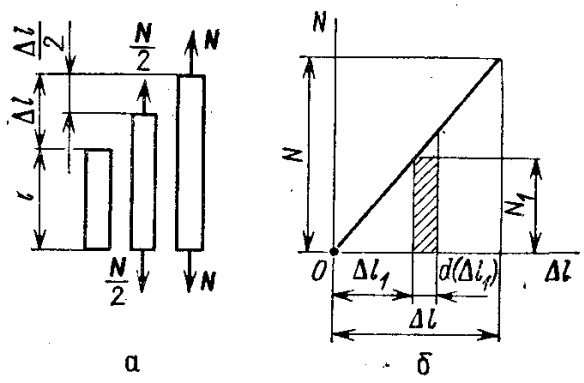


Рис. 9.1. Зависимость N и удлинения Δl при растяжении стержня: *а* — этапы нагружения; *б* — изменение усилия и удлинения в процессе нагружения

Множитель 1/2 в формуле (2) появился потому, что в процессе нагружения усилие было переменным (от 0 до N). Из равенств (2) и (3) получаем два эквивалентных выражения:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} = \frac{1}{2} \frac{EF(\Delta l)^2}{l}. \tag{4}$$

Введем понятие *удельной потенциальной энергии деформации* U_1 или потенциальной энергии деформации, приходящейся на единицу объема. Тогда

$$U = \int_V \int \int U_1 \, dV, \tag{5}$$

где V — объем тела.

При растяжении стержня силой N величина U_1 одинакова для всех элементов стержня, и потому

$$U_1 = \frac{U}{lF},$$

где $lF = V$ — объем стержня.

Из соотношения (4) находим

$$U_1 = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2, \tag{6}$$

где $\sigma = N/F$ и $\varepsilon = \Delta l/l$ — напряжения и деформации в стержне. Важное для дальнейшего рассмотрения равенство (6) можно получить непосредственно из уравнения (1).

Введем замену переменных, обозначая

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l,$$

где $\varepsilon_1 = \Delta l_1/l$ — деформация в данный момент нагружения (новая переменная). Тогда из равенства (1) получаем

$$U = lF \int_0^{\varepsilon} \sigma_1 \, d\varepsilon_1$$

и удельная энергия деформации равна

$$U_1 = \int_0^{\varepsilon} \sigma_1 \, d\varepsilon_1. \qquad (7)$$

Принимая соотношение упругости

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1,$$

найдем

$$U_1 = \frac{1}{2} E\varepsilon^2,$$

что совпадает с равенством (6).

Другой вывод формулы для потенциальной энергии деформации при растяжении и сжатии стержней. При действии внешней (растягивающей) нагрузки в сечениях стержня возникают внутренние силы упругости. Так как стержень деформируется, то внутренние силы упругости совершают работу.

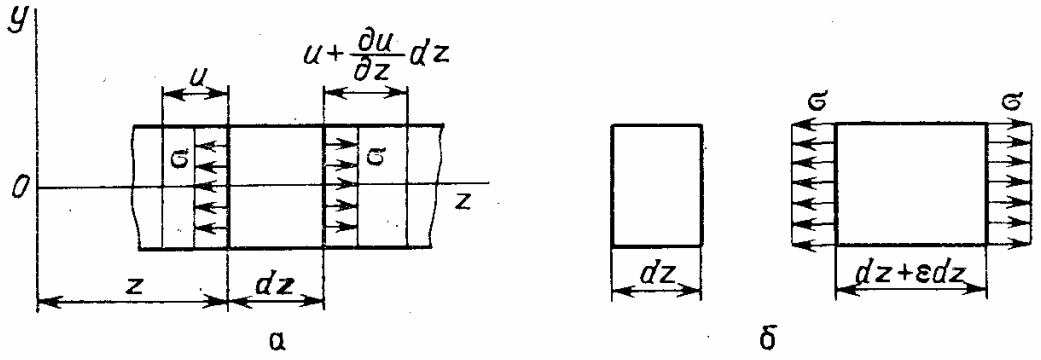


Рис. 9.2. Вычисление потенциальной энергии деформации как работы внутренних сил упругости: *а* — работа внутренних сил упругости с учетом перемещений сечений стержня; *б* — работа внутренних сил упругости как работа при деформации элемента

Рассмотрим элемент стержня (рис. 9.2, *а*). В сечении стержня действуют напряжения σ, которые прикладывались статически. Работа внутренних сил упругости при деформации элемента стержня может быть вычислена так:

$$dA_{\text{в}} = -\frac{1}{2} F\sigma u + \frac{1}{2} F\sigma \left(u + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz\right) = \frac{1}{2} F\sigma\varepsilon \, dz,$$

где $u(z)$ — перемещение сечения стержня, $\varepsilon = \partial u/\partial z$ — деформация материала стержня.

Работа внутренних сил упругости во всем объеме стержня

$$A_в = \int_0^l dA_в = \frac{1}{2} F \int_0^l \sigma\varepsilon \, dz = V \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

где $V = lF$ — объем стержня.

По закону сохранения энергии работа внутренних сил равна работе внешних сил и одновременно потенциальной энергии деформации:

$$U = V \frac{\sigma\varepsilon}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия равна

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon, \tag{9}$$

что совпадает с равенством (6).

Наконец, равенство (9) можно получить еще одним способом, рассматривая работу при деформации элемента (рис. 9.2, *б*).

Сечения элемента при деформации получат относительное смещение $\varepsilon \, dz$. Работа сил упругости при деформации элемента

$$dA_в = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon \, dz \, F = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon \, dV;$$

удельная потенциальная энергия деформации

$$U_1 = \frac{dA_в}{dV} = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon, \tag{10}$$

что снова приводит к прежним результатам.

Удельная потенциальная энергия деформации. Рассмотрим теперь общий случай определения потенциальной энергии деформации произвольно нагруженного упругого тела. Сначала будем считать, что на элемент тела действуют только нормальные напряжения (рис. 9.3). По граням элемента приложены напряжения σ_x, σ_y, σ_z. Изменения этих величин, вызванные приращением координат в пределах элемента, можно не учитывать, так как соблюдаются уравнения равновесия.

Работа внутренних сил упругости в результате деформации будет такой:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \, dy \, dz \cdot \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \sigma_y dz \, dx \cdot \varepsilon_y \, dy + \\ + \frac{1}{2} \sigma_z \, dx \, dy \cdot \varepsilon_z \, dz = \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z) \, dV,$$

где $dV = dx \, dy \, dz$.

Потенциальная энергия деформации равна

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z) \, dV,$$

а удельная потенциальная энергия деформации —

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z). \tag{11}$$

В частном случае одноосного растяжения получаются прежние зависимости.

Перейдем к определению удельной потенциальной энергии при деформациях сдвига. На рис. 9.4 изображен элемент тела, испытывающий дефомацию сдвига в плоскости xy.

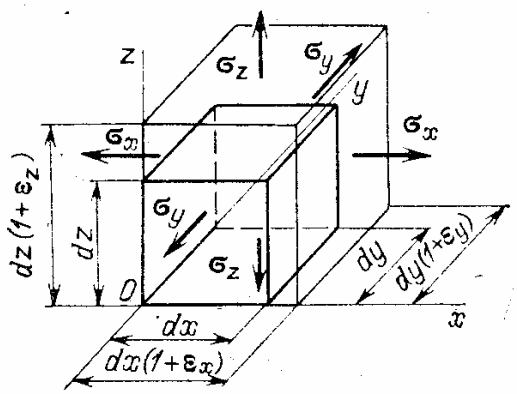


Рис. 9.3. Определение потенциальной энергии деформации при трехосном растяжении (сжатии)

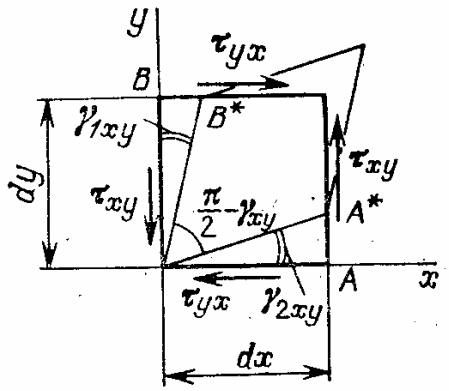


Рис. 9.4. Определение потенциальной энергии деформации при сдвиге

Первоначально прямой угол между осями x и y после деформации изменяется на величину

$$\gamma_{xy} = \gamma_{1xy} + \gamma_{2xy}. \tag{12}$$

Работа внутренних сил упругости, характеризующихся касательными усилиями на гранях элемента, может быть выражена таким образом:

$$dU = \frac{1}{2}(\tau_{xy}\,dy\,dz\cdot\gamma_{1xy}\,dx + \tau_{yx}\,dx\,dz\cdot\gamma_{2xy}\,dy).$$

Множитель 1/2, как и раньше, связан со статическим приложением усилий от нуля до максимальной величины к упругому телу.

Вследствие свойства парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},$$

и с помощью соотношения (12) находим

$$dU = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}\,dV.$$

Удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге в плоскости xy равна

$$U_1 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}. \tag{13}$$

Существенно, что удлинение ребер элемента не влияет на энергию деформации сдвига, так как касательные напряжения не производят работы при деформациях ε_x и ε_y. Соотношения, подобные (13), справедливы при сдвиге в других плоскостях.

Объединяя результаты для растяжения и сдвига, получим общую формулу для удельной потенциальной энергии деформации:

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \qquad (14)$$

В более кратком виде формулу (14) можно записать так:

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}, \qquad (15)$$

где $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ — векторы напряжений и деформаций; т — знак транспонирования.

Другие формулы для удельной потенциальной энергии деформации получаются из основной зависимости (14) при учете соотношений упругости (разд. 18).

Если не принимать во внимание температурную деформацию, то для изотропного тела

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \ldots, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z). \qquad (16)$$

Внося соотношения (16) в формулы (14), получим после несложных преобразований

$$U_1 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \qquad (17)$$

При выводе была учтена зависимость между модулем упругости E и модулем сдвига G:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Формулу (17) можно записать в более кратком виде, если представить соотношения упругости в матричной форме (разд. 18):

$$\{\varepsilon\} = [A]\{\sigma\}. \qquad (18)$$

Тогда получим следующий результат:

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}[A]\{\sigma\}. \qquad (19)$$

Последняя зависимость справедлива и для анизотропного тела, что отражается только в структуре матрицы.

Представим теперь удельную потенциальную энергию деформации как квадратичную функцию деформаций. Для изотропного уп-

ругого тела, пренебрегая температурными деформациями, будем иметь (разд. 18)

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{3E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon, \tag{20}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ — средняя деформация.

Из соотношения (14) получаем

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{9\mu}{1-2\mu}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right], \tag{21}$$

или в другой форме

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \frac{2\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right]. \tag{22}$$

Дадим матричную запись уравнений (21) и (22). Так как

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{23}$$

где $[C] = [A]^{-1}$ — матрица коэффициентов жесткости, то из соотношения (15) получаем

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\}. \tag{24}$$

Последнее равенство справедливо и для анизотропного тела, если соответствующим образом выбрать матрицу коэффициентов жесткости.

Отметим еще две группы соотношений, представляющие интерес в теоретическом плане. Они получаются непосредственным дифференцированием равенств (17) и (22):

$$\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \varepsilon_x, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \gamma_{xy}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} = 2G\varepsilon_x + \frac{3E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon = \sigma_x, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy}. \tag{26}$$

Потенциальная энергия деформации стержней при растяжении и изгибе. Ранее была установлена формула для потенциальной энергии при растяжении стержня постоянного сечения двумя усилиями по концам:

$$U = \frac{N^2}{2EF}l. \tag{27}$$

Получим теперь более общую формулу с помощью выражения (17).

При растяжении стержня отличным от нуля является нормальное напряжение $\sigma_z = \sigma$ (ось z направлена вдоль оси стержня).

Из соотношения (17) следует, что

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Потенциальная энергия стержня будет равна

$$U = \int\int\int_V U_1\, dV = \int_0^l \left(\int_F \frac{\sigma^2}{2E}\, dF \right) dz. \tag{28}$$

Здесь предполагается, что ось стержня прямолинейна и совпадает с осью z.

В общем случае стержень может состоять из отдельных участков, оси которых направлены под углом друг к другу, или быть криволинейным; тогда

$$U_1 = \int_0^l \left(\int_F \frac{\sigma^2}{2E}\, dF \right) ds, \tag{29}$$

где ds — элемент длины стержня, l — полная длина стержня.

Для стержня с постоянными параметрами упругости

$$\sigma = \frac{N(z)}{F(z)},$$

$$\int_F \frac{\sigma^2}{2E}\, dF = \frac{N^2(z)}{2EF^2(z)} \int_F dF = \frac{N^2(z)}{2EF(z)}.$$

Потенциальная энергия стержня при растяжении равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(z)}{EF(z)}\, dz. \tag{30}$$

В частном случае при постоянных значениях $N(z)$ и $F(z)$ получается равенство (27).

Для стержня с переменными параметрами упругости (разд. 4)

$$\sigma = \frac{EN}{\int_F E\, dF}. \tag{31}$$

Теперь из равенства (28) находим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A(z)}\, dz,$$

где $A(z) = \int_F E\, dF$ — жесткость сечения стержня на растяжение.

Рассмотрим теперь потенциальную энергию деформации при плоском изгибе стержня с постоянными параметрами упругости (рис. 9.5). Пренебрегая сначала касательными напряжениями изгиба,

воспользуемся равенством (28), полагая

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y.$$

Так как

$$\int_F \frac{\sigma^2}{2E} dF = \frac{M_x^2}{2EJ_x},$$

то получаем значение энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x} dz. \tag{32}$$

Аналогичное соотношение имеет место при изгибе в плоскости xOz: $U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dz$.

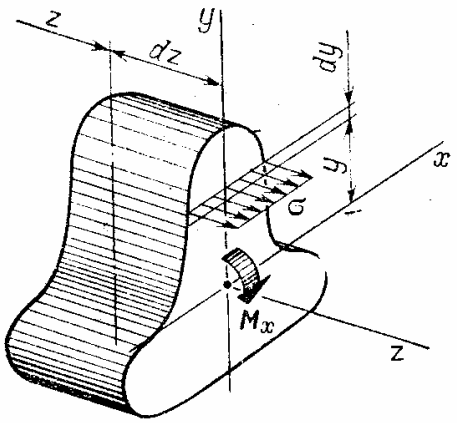


Рис. 9.5. Определение потенциальной энергии деформации при изгибе стержня

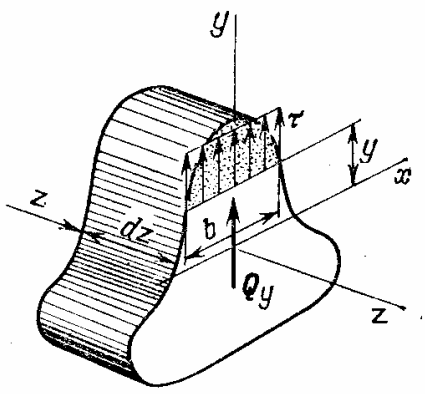


Рис. 9.6. Определение потенциальной энергии деформации, связанной с касательными напряжениями изгиба

Потенциальная энергия деформации при одновременном растяжении и изгибе стержня равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dz. \tag{33}$$

Для стержня с переменными параметрами упругости получаем

подобную зависимость:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{A}\,dz + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2}{B_x}\,dz + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^2}{B_y}\,dz, \tag{34}$$

где $A = \int_F E\,dF$, $B_x = \int_F Ey^2\,dF$, $B_y = \int_F Ex^2\,dF$ — жесткости сечения стержня на растяжение и изгиб.

Замечание. Равенства (33) и (34) не учитывают касательных напряжений изгиба. Как уже указывалось, их влияние может быть значительным для коротких стержней и для стержней из материалов с малым сопротивлением сдвигу.

Потенциальная энергия деформации, связанная с касательными напряжениями изгиба. При изгибе стержней поперечной нагрузкой возникают касательные напряжения (разд. 31).

Для плоского изгиба (рис. 9.6) касательное напряжение

$$\tau = \frac{Q_y S_{xf}}{bJ_x}, \tag{35}$$

где Q_y — перерезывающая сила в сечении, $S_{xf} = \int_f y\,dF$ — статический момент части сечения.

Потенциальная энергия деформации по формуле (17) будет равна

$$U = \int\int\int_V U_1\,dV = \int_0^l \left(\int_F \frac{\tau^2}{2G}\,dF\right) dz, \tag{36}$$

так как учитывается только касательное напряжение $\tau_{yz} = \tau$.

Далее найдем с помощью равенства (35)

$$\int_F \frac{\tau^2}{2G}\,dF = \frac{Q_y^2}{2GJ_x^2}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF = K_y(z)\frac{Q_y^2(z)}{GF(z)}, \tag{37}$$

где безразмерный коэффициент

$$K_y(z) = \frac{F(z)}{J_x^2(z)}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF \tag{38}$$

учитывает неравномерное распределение по поперечному сечению касательных напряжений изгиба.

Потенциальная энергия деформации, связанная с касательными напряжениями изгиба, равна

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l K_y \frac{Q_y^2(z)}{GF(z)}\,dz. \tag{39}$$

Если касательное напряжение распределяется равномерно по сечению:

$$\tau = \frac{Q_y(z)}{F(z)},$$

то из уравнений (37) и (38) $K_y = 1$.

Зависимость, подобная (39), существует и для изгиба в другой главной плоскости:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l K_x \frac{Q_x^2(z)}{GF(z)}\,dz. \tag{40}$$

Для стержня с переменными параметрами упругости касательное напряжение изгиба

$$\tau = \frac{Q_y S_{Exf}}{bB_x}, \tag{41}$$

где $S_{Exf} = \int_f yE\,dF$; $B_x = \int_F Ey^2\,dF$.

Выражение для потенциальной энергии деформации может быть принято в такой форме:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l K_y \frac{Q_y^2(z)}{A_\gamma(z)}\,dz, \tag{42}$$

где

$$A_\gamma = \int_F G\,dF \tag{43}$$

— жесткость сечения на сдвиг,

$$K_y = \frac{A_\gamma(z)}{B_x^2(z)}\int \frac{S_{Eyf}^2}{Gb^2}\,dF. \tag{44}$$

Для использования приведенных зависимостей необходимо знать величины K_x и K_y. Их определение покажем на следующем примере.

Пример определения коэффициентов касательных напряжений. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения (рис. 9.7). Для такого сечения

$$F = bh, \quad J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad S_{xf} = \frac{1}{2}b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Расчет проводим по формуле (38). Находим

$$\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF = \frac{b}{4}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy = \frac{bh^5}{120}.$$

Далее получаем

$$K_y = \frac{F}{J_x^2}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF = \frac{bh\cdot 12^2}{b^2h^6}\,\frac{bh^5}{12\cdot 10} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Замечание. Коэффициент K_y определяется в результате осреднения энергии деформации сдвига. При учете влияния сдвига на прогибы стержня (разд. 34) принималось для прямоугольного сечения $K_y = 3/2$ по максимальному значению касательных напряжений.

Величину $K_y = 1{,}2$, выражающую «среднеквадратичное касательное напряжение», следует считать более точной.

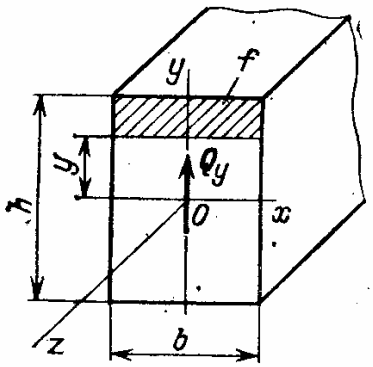


Рис. 9.7. Расчет коэффициента касательных напряжений

В общем случае в сечении стержня действуют растягивающее усилие $N(z)$, перерезывающие усилия Q_x и Q_y, изгибающие моменты M_x и M_y.

Потенциальная энергия деформации выражается следующим равенством:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l \frac{N_z^2}{EF}\,ds + \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x}\,ds + \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y}\,ds + \int_0^l K_x\frac{Q_x^2}{GF}\,ds + \int_0^l K_y\frac{Q_y^2}{GF}\,ds\right\}. \quad (45)$$

Формула (45) объединяет ранее рассмотренные составляющие энергии деформации.

Возможность простого суммирования энергии растяжения и изгиба вытекает из того, что оси x и y являются главными осями сечения. Элемент длины вдоль оси стержня обозначен ds (см. формулу (29)), так что имеется возможность использования равенства (45) для стержней с непрямой осью.

Для стержней с переменными параметрами упругости имеем

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l \frac{N_z^2}{A}\,ds + \int_0^l \frac{M_x}{B_x}\,ds + \int_0^l \frac{M_y^2}{B_y}\,ds + \int_0^l K_x\frac{Q_x^2}{A_\gamma}\,ds + \int_0^l K_y\frac{Q_y^2}{A_\gamma}\,ds\right\}, \quad (46)$$

где A, B_x, B_y и A_γ — жесткости сечения на растяжение, изгиб и сдвиг; коэффициенты K_x и K_y вычисляются по формулам типа (44).

Потенциальная энергия деформации стержней может быть представлена по-другому.

Из соотношений (14)—(16) гл. 8, пренебрегая температурными деформациями, получим

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EF} = \frac{N}{A},$$

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} = \frac{M_x}{B_x},$$

$$\frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y} = \frac{M_y}{B_y}.$$

Деформации сдвига для точек оси стержня

$$\gamma_{yx} = K_y \frac{Q_y}{GF} = K_y \frac{Q_y}{A_\gamma},$$

$$\gamma_{xz} = K_x \frac{Q_x}{GF} = K_x \frac{Q_x}{A_\gamma}. \tag{47}$$

В формулах для деформаций отмечается и общий случай, когда параметры упругости переменны по сечению и длине.

На основании равенства (45) и последних зависимостей получим

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l N\varepsilon_0\, ds + \int_0^l M_x \frac{d\varphi_x}{ds}\, ds + \int_0^l M_y \frac{d\varphi_y}{ds}\, ds + \int_0^l Q_x\gamma_{xz}\, ds + \int_0^l Q_y\gamma_{yz}\, ds\right\}. \tag{48}$$

Равенство (48) имеет ясный физический смысл: потенциальная энергия деформации равна работе внутренних силовых факторов.

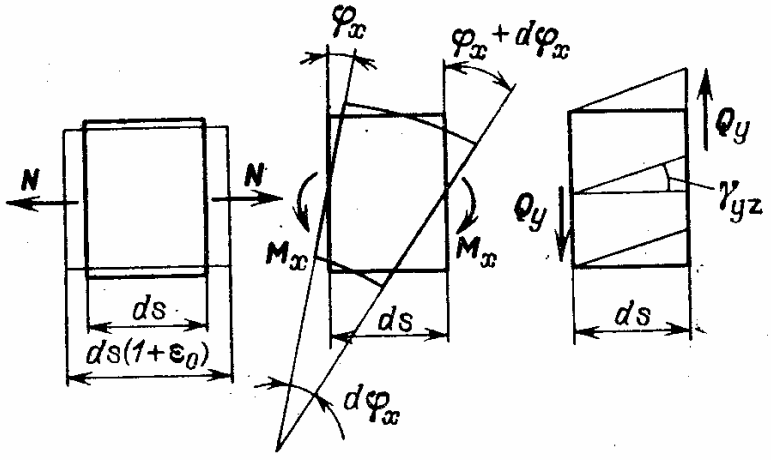


Рис. 9.8. Работа силовых факторов при деформации элемента стержня

На рис. 9.8 показана деформация элемента стержня при плоском изгибе.

Работа внутренних силовых факторов при деформации элемента стержня равна

$$dU = \frac{1}{2} N\varepsilon_0\, ds + \frac{1}{2} M_x\, d\varphi_x + \frac{1}{2} Q_y\gamma_{xy}\, ds. \tag{49}$$

Наконец, можно выразить потенциальную энергию деформации стержня через параметры деформации:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l A\varepsilon_0^2\, ds + \int_0^l B_x\left(\frac{d\varphi_x}{ds}\right)^2 ds + \int_0^l B_y\left(\frac{d\varphi_y}{ds}\right)^2 ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \frac{1}{K_x} A_\gamma\,(\gamma_{xz})^2\, ds + \int_0^l \frac{1}{K_y} A_\gamma\,(\gamma_{yz})^2\, ds\right\}. \tag{50}$$

Замечание. В большинстве практических задач при вычислении потенциальной энергии деформации слагаемыми, связанными с учетом касательных напряжений изгиба, можно пренебречь.

36. Вариационные методы

Введение. После приложения внешней нагрузки произойдет деформация конструкции (тела) и установится равновесие. Состояние равновесия можно проверить по выполнению условий равновесия каждого элемента тела, но можно использовать и другой путь: проанализировать поведение системы при малых возможных отклонениях (вариациях). Именно этим путем в теоретической механике (механике твердого, недеформируемого тела) были получены общие уравнения равновесия Лагранжа (начало возможных перемещений). Состояние упругой деформированной системы может быть однозначно описано перемещениями ее точек в процессе деформации — функциями u, v и w. Полная потенциальная энергия, как будет показано в дальнейшем, может рассматриваться как функционал

$$J = J(u, v, w). \tag{51}$$

При вариациях функций u, v, w (малых отклонениях, согласованных со связями), которые обозначаются δu, δv и δw, изменяется величина функционала. Считая отклонения достаточно малыми, можно записать

$$\delta J = J(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) - J(u, v, w). \tag{52}$$

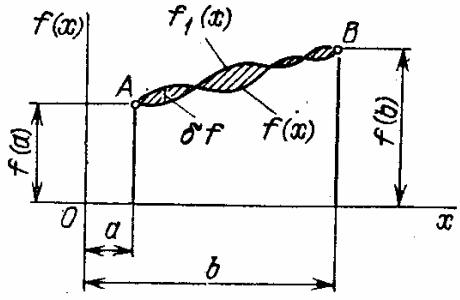


Рис. 9.9. Понятие вариации функции

Состояние равновесия системы характеризуется условием

$$\delta J = 0.$$

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, остановимся вкратце на математической стороне вопроса.

Пусть имеется функционал, зависящий от функции $f(x)$:

$$J(f) = \int_a^b F(f, f', f'', x)\, dx, \tag{53}$$

где F — некоторая функция, зависящая от функции f, ее первых производных и независимого переменного x. Например, если $f(x)$ представляет кривую, проходящую через две заданные точки A и B (рис. 9.9), то функционал

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

равен длине кривой L.

Рассмотрим другую функцию $f_1(x)$ — функцию сравнения, которая проходит через те же точки, и назовем вариацией функции

$$\delta f(x) = f_1(x) - f(x). \tag{54}$$

Вариацию функции можно дифференцировать, причем

$$\frac{d}{dx}(\delta f(x)) = \frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx} = \delta f'(x). \tag{55}$$

Операции варьирования и дифференцирования переставимы; $\delta f'(x)$ означает вариацию функции $f'(x)$. Вариация функционала (53) равна приращению функционала в результате вариации функции f и ее производных:

$$\delta J(f) = \int_a^b F(f + \delta f, f' + \delta f', f'' + \delta f'', x)\,dx - \int_a^b F(f, f', f'', x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [F(f + \delta f, f' + \delta f', f'' + \delta f'', x) - F(f, f', f'', x)]\,dx. \tag{56}$$

Считая вариации функции малыми величинами и рассматривая f, f' и f'' как независимые аргументы функции F, запишем

$$F(f + \delta f, f' + \delta f', f'' + \delta f'', x) =$$

$$= F(f, f', f'', x) + \frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial F}{\partial f''}\delta f'' + O(\delta f, \delta f', \delta f''), \tag{57}$$

где $O(\delta f, \delta f', \delta f'')$ — величина более высокой степени малости относительно δf, $\delta f'$, $\delta f''$.

Теперь, используя соотношение (57) и пренебрегая $O(\delta f, \delta f', \delta f'')$, находим из равенства (56)

$$\delta J(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial F}{\partial f''}\delta f''\right)dx. \tag{58}$$

Замечание. Поясняя равенство (57), напомним, что функция многих переменных $\Phi(x, y, z)$ может быть разложена в ряд в окрестности точки x_0, y_0, z_0 по формуле

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Delta z + O(\Delta x, \Delta y, \Delta z),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$.

Равенство (57), в сущности, совпадает с приведенной формулой. Например, если

$$F(f, f', f'', x) = ff' + f''x + f'^2,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial f} = f', \quad \frac{\partial F}{\partial f'} = f + 2f', \quad \frac{\partial F}{\partial f''} = x.$$

В равенстве (57) отсутствует частная производная по x, так как величина x не варьируется.

Условия экстремума функционала, уравнение Эйлера — Пуассона, метод Рэлея — Ритца. Поставим задачу — отыскать функцию $f(x)$, для которой первая вариация функционала обращается в нуль:

$$\delta J(f) = 0. \tag{59}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется экстремалью, а значение $J(f)$ — экстремумом функционала.

Равенство (58) не дает сразу ответа для поставленной задачи, так как подынтегральные члены разнородны. Преобразуем правую часть уравнения (58) с помощью интегрирования по частям. Предварительно отметим

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'}\,\delta f'\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'}\,\frac{d}{dx}(\delta f)\,dx = \frac{\partial F}{\partial f'}\,\delta f\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f\,dx. \tag{60}$$

Подобные преобразования дают

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f''\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\,\frac{d}{dx}(\delta f')\,dx = \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f'\,dx. \tag{61}$$

Повторяя интегрирование по частям в последнем члене равенства (61), находим

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f''\,dx = \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\Big|_a^b - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f\,dx. \tag{62}$$

Теперь условие (59) можно записать так:

$$\delta J(f) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\Big|_a^b = 0. \tag{63}$$

Равенство (63) должно быть справедливым для произвольной вариации δf. В частности, если рассматривать вариации δf и $\delta f'$, обращающиеся в нуль на концах интервала, а в промежуточных точках произвольные, то интеграл будет равен нулю только при условии

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right) = 0. \tag{64}$$

Это и есть дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона для функции $f(x)$. Опять же в силу произвольности вариации δf должны выполняться краевые условия

$$\left[\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\Big|_a^b = 0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\Big|_a^b = 0. \tag{66}$$

Итак, для решения вариационного уравнения (59) следует найти решение уравнения (64) при краевых условиях (65) и (66).

Построение точных решений дифференциальных уравнений часто оказывается затруднительным, и для решения уравнения (59) применяют приближенные методы, в частности метод Рэлея — Ритца.

Метод Рэлея — Ритца состоит в следующем. Допустим, что функция $f(x)$ может быть представлена рядом

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x), \tag{67}$$

где $f_i(x)$ — заранее выбранные функции, удовлетворяющие наложенным на систему связям; c_i — коэффициенты, подлежащие определению.

Соответственно

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x), \tag{68}$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i''(x). \tag{69}$$

Внося значения $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ в равенство (59) и проведя интегрирование, находим

$$J(f) = J(c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{70}$$

Вариация функционала теперь определяется так:

$$\delta J(f) = \frac{\partial J}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial J}{\partial c_2}\delta c_2 + \ldots + \frac{\partial J}{\partial c_n}\delta c_n.$$

Учитывая условия (59) и считая вариации δc_i совершенно произвольными, получаем n уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{71}$$

из которых определяем n неизвестных: $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Примеры использования уравнения Эйлера — Пуассона и метода Рэлея — Ритца будут приведены в дальнейшем.

Точное решение вариационного уравнения

$$\delta J(f) = 0$$

должно обеспечивать его выполнение при произвольных вариациях f, разумеется, согласованных со связями системы. В методе Рэлея — Ритца вариация

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \delta c_i f_i(x).$$

Класс вариаций функций ограничен выбором и числом функций, что означает наложение дополнительных связей на систему,

повышающих ее «жесткость». Очевидно, если система функций обладает достаточной полнотой, приближенное решение будет ближе к точному.

Применение начала возможных перемещений, вариационное уравнение Лагранжа. Пусть имеется твердое деформируемое тело (рис. 9.10), к поверхности которого приложены распределенные нагрузки **p**, а на элементы тела действуют массовые (объемные) силы **F**.

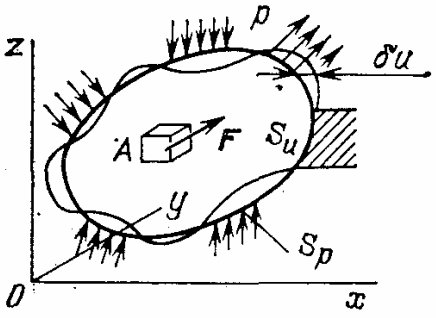


Рис. 9.10. Применение начала возможных перемещений

Допустим, что упругие смещения точек тела u, v, w получили вариации (возможные перемещения) δu, δv, δw, совместимые с геометрическими связями. Поэтому на части поверхности S_u, где смещения являются заданными (например, поверхность заделки), вариации смещений отсутствуют. В результате вариации смещений изменится потенциальная энергия деформации и произойдет работа внешних сил

$$\delta W = \int\limits_{S_p}\int (p_x\delta u + p_y\delta v + p_z\delta w)\,dS + \int\limits_{V}\int\int (F_x\delta u + F_y\delta v + F_z\delta w)\,dV, \tag{72}$$

где S_p — часть поверхности тела с заданными внешними усилиями.

Начало возможных перемещений применительно к деформируемому телу формулируется следующим образом: в состоянии равновесия возможная работа внешних сил равна приращению потенциальной энергии деформации:

$$\delta U = \delta W. \tag{73}$$

Начало возможных перемещений (73) можно записать в виде вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0, \tag{74}$$

где U — потенциальная энергия деформации;

$$W = \int\limits_{S_p}\int (p_x u + p_y v + p_z w)\,dS + \int\limits_{V}\int\int (F_x u + F_y v + F_z w)\,dV \tag{75}$$

— возможная работа внешних сил.

При определении возможной работы значения и направления внешних нагрузок считаются неизменными (множитель 1/2 отсутствует).

Вариация функции W (уравнение (72)) получается в результате варьирования перемещений при постоянных внешних силах. Легко видеть, что W равно удвоенной работе внешних сил, приложенных статически к упругому телу:

$$W = 2A. \tag{76}$$

Величина

$$\Pi = U - W \tag{77}$$

называется *полной потенциальной энергией системы.*

Величину П можно представить в матричной форме (см. уравнение (15)):

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V\int\int \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\,dV - \int\limits_{S_p}\int\int \{p\}^T\{u\}\,dS - \int\limits_V\int\int \{F\}^T\{u\}\,dV, \tag{78}$$

где

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$

— векторы перемещений, поверхностной нагрузки и массовых сил.

При решении задач теории упругости с помощью вариационного уравнения Лагранжа обычно в качестве основных неизвестных принимаются смещения u, v, w, что обеспечивает выполнение условий совместности деформаций.

Вариационное уравнение

$$\delta\Pi = 0 \tag{79}$$

гарантирует выполнение уравнений равновесия и краевых условий, т. е. приводит к точному решению задачи.

Замечания. 1. При выводе формулы для полной потенциальной энергии системы (функционала Лагранжа) не требовалось выражение для вариации энергии деформации. Оно имеет следующий вид:

$$\delta U = \int\limits_V\int\int \{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}\,dV. \tag{80}$$

В правой части равенства (72) стоит возможная работа внутренних силовых факторов, которые при вариации деформаций считаются постоянными. В связи с этим начало возможных перемещений для деформируемого тела можно представить в более общей форме:

$$\int\limits_V\int\int \{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}\,dV = \int\limits_{S_p}\int\int \{p\}^T\{\delta u\}\,dS + \int\limits_V\int\int \{F\}^T\{\delta u\}\,dV, \tag{81}$$

пригодной и для неупругих систем.

В состоянии равновесия возможная работа внешних сил равна возможной работе внутренних силовых факторов.

2. Вариация полной потенциальной энергии происходит в результате вариации перемещений. Последние должны удовлетворять наложенным на систему связям (внешним — условиям закрепления и т. п. и внутренним — условиям непрерывности деформаций).

Полная потенциальная энергия деформации выражается через перемещения и их производные. Методы, основанные на начале возможных перемещений, часто называют *методами вариации перемещений.*

Вариационное уравнение изгиба стержня. Применим общее вариационное уравнение (79) к плоскому изгибу стержня переменно-

го сечения (рис. 9.11). Стержень подвергается действию распределенной нагрузки $q(z)$, усилия P и момента M.

Потенциальная энергия деформации стержня

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ_x}dz=\frac{1}{2}\int_0^l EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz. \tag{82}$$

В равенстве (82) $v(z)$ представляет прогиб оси стержня. Возможная работа внешних сил

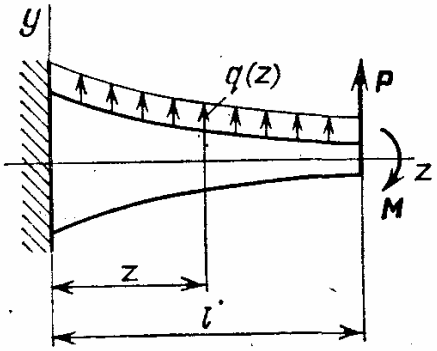


Рис. 9.11. Вывод вариационного уравнения изгиба стержня

$$W=\int_0^l q(z)\,v(z)\,dz+Pv(l)-M\frac{dv}{dz}(l). \tag{83}$$

Полная потенциальная энергия системы

$$\Pi=U-W=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2-q(z)\,v(z)\right]dz-$$

$$-Pv(l)+M\frac{dv}{dz}(l).$$

Вариационное уравнение изгиба стержня

$$\delta\Pi=\delta\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2-qv\right]dz-P\delta v(l)+M\delta v'(l)=0. \tag{84}$$

Можно считать

$$\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2-qv\right]dz=\int_0^l F(v,\,v',\,v'',\,z)\,dz,$$

где $F=EJ_x(v'')^2/2-qv$. Далее находим

$$\frac{\partial F}{\partial v}=-q,\quad \frac{\partial F}{\partial v'}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial v''}=EJ_x v''. \tag{85}$$

Пользуясь формулой (63), полагая $f=v$, $x=z$, получим

$$\delta\int_a^b\left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2-qv\right]dz=\int_0^l\left[-q+\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right]\delta v\,dz-$$

$$-\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\delta v\Big|_0^l+EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\,\delta\frac{dv}{dz}\Big|_0^l. \tag{86}$$

Вариационное уравнение изгиба стержня (82) можно записать

в такой форме:

$$\delta\Pi = \int_0^l \left[-q + \frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}\right)\right] \delta v\, dz - \left[P + \frac{d}{dz}\left(EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}\right)\right]_l \delta v\,(l) + \\ + \left[EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} - M\right]_l \delta v'\,(l) = 0, \quad (87)$$

так как $\delta v = \delta v' = 0$ при $z = 0$ (заделка).

Уравнение (87) должно быть справедливо для произвольной вариации, и потому оно эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}\right) = q \quad (88)$$

и краевым условиям при $x = l$

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M, \quad (89)$$

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}\right) = -P. \quad (90)$$

Уравнение (88) является дифференциальным уравнением изгиба стержня, условия (89), (90) — силовые краевые условия при $x = l$. Краевые условия при $x = 0$ должны выполняться для функции $v(z)$ по построению

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0. \quad (91)$$

Таким образом, вариационное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению и краевым условиям.

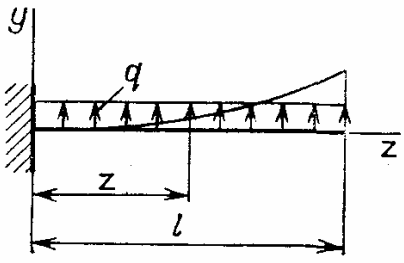


Рис. 9.12. Применение метода Рэлея — Ритца к задаче изгиба стержня

Применение метода Рэлея — Ритца к задаче изгиба стержня. Метод Рэлея — Ритца применяется для решения многих задач определения напряжений и деформаций в твердых деформируемых телах. Покажем алгоритм метода на простом примере изгиба стержня постоянного сечения под действием равномерной нагрузки (рис. 9.12).

Полная потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x (v'')^2\, dz - \int_0^l qv\, dz. \quad (92)$$

В соответствии с равенством (67) примем прогиб стержня равным

$$v(z) = \sum_{i=1}^{h} c_i f_i(z), \quad (93)$$

где $f_i(z)$ — возможные функции для прогиба стержня. В рассматриваемом примере они должны удовлетворять наложенным (геометрическим) связям

$$f_i(0) = 0, \quad f_i'(0) = 0. \tag{94}$$

Можно принять

$$f_1 = \left(\frac{z}{l}\right)^2, \quad f_2 = \left(\frac{z}{l}\right)^3, \ \ldots, \ f_i = \left(\frac{z}{l}\right)^{i+1}.$$

Решим сначала задачу с одним параметром, положив

$$v(z) = c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2, \quad v''(z) = \frac{2c_1}{l^2}.$$

Внося значения v и v'' в равенство (92), находим

$$\Pi = \frac{EJ_x}{2}\int_0^l \frac{4c_1^2}{l^4}dz - q\int_0^l c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = \frac{2EJ_x}{l^3}c_1^2 - \frac{qc_1}{l^2}\frac{l^3}{3}.$$

Из условия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{4EJ_x}{l^3}c_1 - \frac{ql}{3} = 0$$

находим

$$c_1 = \frac{ql^4}{12EJ_x}, \quad v(z) = \frac{ql^2z^2}{12EJ_x}.$$

Наибольший прогиб составит

$$v(l) = \frac{ql^4}{12EJ_x}, \tag{95}$$

что отличается от точного значения (см. разд. 34)

$$v(l) = \frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

Для уточнения решения примем

$$v(z) = c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2\left(\frac{z}{l}\right)^3, \quad v''(z) = \frac{2c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l},$$

и далее

$$\Pi = \frac{EJ_x}{2}\int_0^l \left(\frac{2c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)^2 dz - q\int_0^l \left(c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2\left(\frac{z}{l}\right)^3\right) dz.$$

Дифференцируя последнее соотношение по c_1 и c_2, получаем систему

уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = EJ_x \int_0^l \left(2\frac{c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)\frac{2}{l^2}\,dz - q\int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = EJ_x \int_0^l \left(2\frac{c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)\frac{6z}{l^3}\,dz - q\int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^3 dz = 0$$

или

$$c_1 + \frac{3}{2}c_2 = \frac{1}{12}\frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_1 + 2c_2 = \frac{1}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Из последних уравнений находим

$$c_1 = \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_2 = -\frac{ql^4}{12EJ_x},$$

и далее

$$v(z) = \frac{5}{24}\frac{ql^2z^2}{EJ_x} - \frac{qlz^3}{12EJ_x}. \tag{96}$$

Наибольшее значение прогиба равно

$$v(l) = \frac{ql^4}{8EJ_x},$$

что совпадает с точным решением.

Как видно, добавление одного параметра в ряде (93) существенно повысило точность расчета.

Применение начала возможных перемещений для определения прогибов стержней. Интеграл Мора. Этот метод имеет широкое распространение при решении практических задач. Пусть имеется стержень, загруженный произвольными силами (основная система, рис. 9.13, *а*), и в сечении a возник прогиб $v(a)$. Для его определения поступим следующим образом.

Рассмотрим тот же стержень под действием единичного усилия $P = 1$ (единичная система, рис. 9.13, *б*). Стержень получит прогиб $v_1(z)$, в сечениях стержня под действием единичной силы возникнут изгибающий момент $M_{1x}(z)$ и перерезывающая сила $Q_{1y}(z)$.

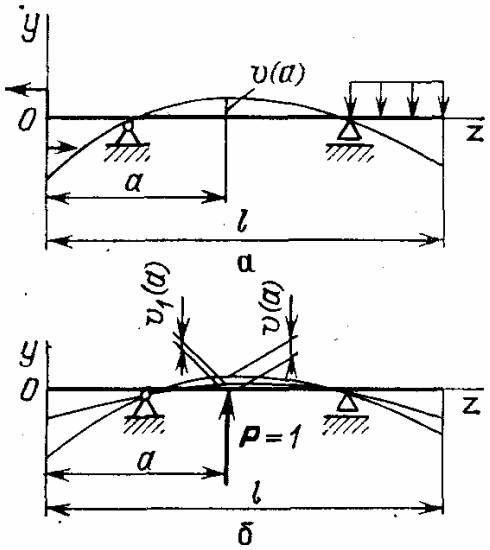


Рис. 9.13. Вывод интеграла Мора из начала возможных перемещений: *а* — основная система; *б* — единичная система

Допустим теперь, что единичной системе (рис. 9.13, *б*) сообщили возможные смещения, равные действительным прогибам стержня в основной системе:

$$\delta v_1(z) = v(z). \tag{97}$$

Равенство (97) вполне закономерно — прогибы $v(z)$ являются малыми величинами, удовлетворяющими связям системы.

Так как возможная работа внешних сил равна возможной работе внутренних силовых факторов (начало возможных перемещений), то

$$1 \cdot v(a) = \int_0^l M_1(z)\, d\varphi(z) + \int_0^l Q_{1y}(z)\, \gamma_{yz}(z)\, dz =$$

$$= \int_0^l M_{1x}(z) \frac{d\varphi_x}{dz}\, dz + \int_0^l Q_{1y}(z)\, \gamma_{yz}(z)\, dz, \quad (98)$$

где $d\varphi_x/dz$ и γ_{yz} соответствуют прогибам $v(z)$ в основной системе.

Далее имеем с учетом температурных деформаций (см. уравнение (15) гл. 8)

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x + M_{xT}}{B_x}, \quad (99)$$

где $B_x = \int_F y^2 E\, dF$ — жесткость сечения на изгиб, $M_{xT} = \int_F Ey\alpha_T T\, dF$ — температурный момент.

Деформация сдвига (см. разд. 35) равна

$$\gamma_{yz} = K_y \frac{Q_y}{A_y}. \quad (100)$$

Таким образом, прогиб в сечении a будет

$$v(a) = \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{B_y}\, dz + \int_0^l K_y \frac{Q_{1y}(z)\, Q_y(z)}{A_y} dz + \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_{xT}(z)}{B_x}\, dz. \quad (101)$$

Это и есть *интеграл Мора* для вычисления прогиба стержня.

Для того чтобы найти прогиб в заданном сечении, нужно приложить единичную силу в этом сечении, определить изгибающий момент и перерезывающую силу от единичной силы и вычислить интеграл Мора (101). Если величина $v(a)$ получается положительной, то прогиб совпадает по направлению с единичной силой.

Во многих практических задачах интеграл, связанный с действием перерезывающей силы, может быть опущен.

Для стержня с постоянными параметрами упругости, пренебрегая перерезывающими усилиями и неравномерным нагревом, будем иметь

$$v(a) = \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{EJ_x(z)}\, dz. \quad (102)$$

Замечание. Следует отметить, что $M_{1x}(z)$ имеет размерность длины, а $Q_{1y}(z)$ — безразмерная величина; так как в равенстве (98) была сокращена размерная единица силы (см. примеры).

Пример. Пусть требуется определить прогиб конца консольного стержня прямоугольного сечения, загруженного силой P (рис. 9.14), с учетом деформации сдвига.

Воспользуемся формулой (101), считая параметры упругости постоянными, материал стержня равномерно нагретым ($M_{xT} = 0$),

$$v(l) = -\int_0^l \frac{(l-z)\,P\,(l-z)}{EJ_x}\,dz -$$

$$- K_y \int_0^l \frac{1 \cdot P}{FG}\,dF = -\left(\frac{Pl^3}{3EJ_x} + \frac{6}{5}\frac{Pl}{GF}\right) =$$

$$= -\left(\frac{4Pl^3}{Ebh^3} + \frac{6}{5}\frac{Pl}{Gbh}\right).$$

Знак минус означает, что прогиб направлен в сторону, противоположную приложенной единичной силе.

Решение совпадает с прежними результатами (см. разд. 34).

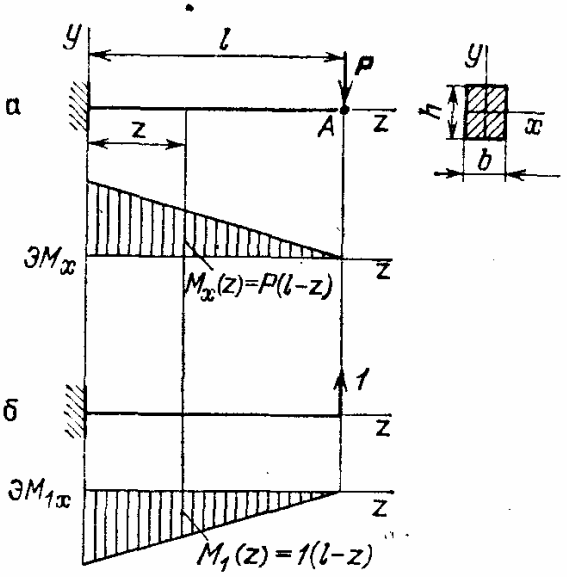


Рис. 9.14. Определение прогиба стержня с помощью интеграла Мора: *а* — основная система; *б* — единичная система

Общий случай определения прогибов с помощью интеграла Мора. Одно из основных преимуществ интеграла Мора состоит в том, что он, в сущности, не связан с какой-либо общей системой координат. Правило знаков для силовых факторов выбрано заранее

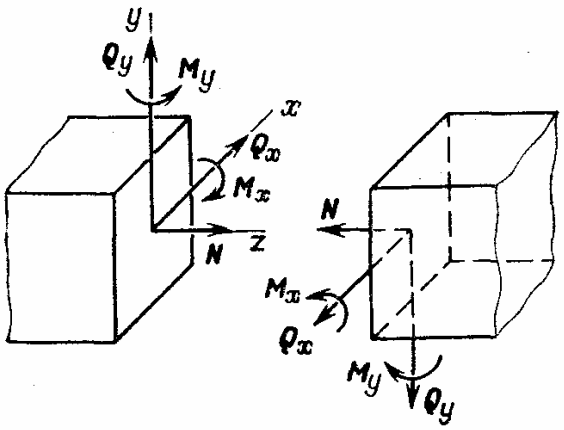


Рис. 9.15. Правило знаков для изгибающих моментов и сил (показаны положительные направления)

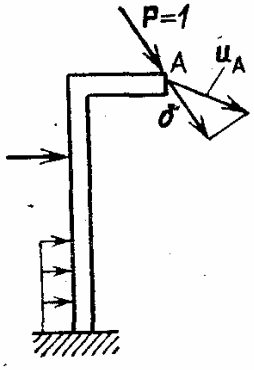


Рис. 9.16. Физический смысл интеграла Мора (проекция перемещения точки на направление приложенной единичной силы)

в местной системе координат (рис. 9.15), которая может быть ориентирована произвольным образом в пространстве. Ось s в каждом сечении направлена по касательной к оси стержня.

Важно только, что для силовых факторов от внешней нагрузки и единичного силового фактора применяется единое правило знаков. Перемещение точки стержня в направлении единичной силы определяется следующим равенством:

$$\delta = \int_0^l \frac{N_1 N}{A}\,ds + \int_0^l \frac{M_{1x}M_x}{B_x}\,ds + \int_0^l \frac{M_{1y}M_y}{B_y}\,ds + \int_0^l K_x \frac{Q_{1x}Q_x}{A_\gamma}\,ds + \int_0^l K_y \frac{Q_{1y}Q_y}{A_\gamma}\,ds. \tag{103}$$

Напомним, что оси x, y являются главными приведенными осями сечения; A, B_x, B_y, A_γ — жесткости сечений на растяжение, изгиб и сдвиг; N_1, M_{1x}, M_{1y}, Q_{1x}, Q_{1y} — силовые факторы в сечении стержня от действия единичной силы. Подчеркнем, что по смыслу вывода величина δ не является полным перемещением точки оси стержня, а является проекцией на направление действия единичной силы. Например, для стержня, показанного на рис. 9.16, полное перемещение точки A равно u_A, а интеграл Мора дает величину δ.

Для неравномерно нагретых стержней к величине δ добавляется

$$\delta_T = \int_0^l \frac{N_1 N_T}{A}\,ds + \int_0^l \frac{M_{1x}M_{xT}}{B_x}\,ds + \int_0^l \frac{M_{1y}M_{yT}}{B_y}\,ds, \tag{104}$$

где в соответствии с равенствами (14)—(16) гл. 8 температурные усилия равны

$$N_T = \int_F E\alpha_T T\,dF, \quad M_{xT} = \int_F yE\alpha_T T\,dF, \quad M_{yT} = -\int_F xE\alpha_T T\,dF. \tag{105}$$

Замечание. Интеграл Мора применим для определения прогибов при упругопластических деформациях. В этом случае характеристики жесткости A, B_x, B_y и A_γ определяются методом переменных параметров упругости.

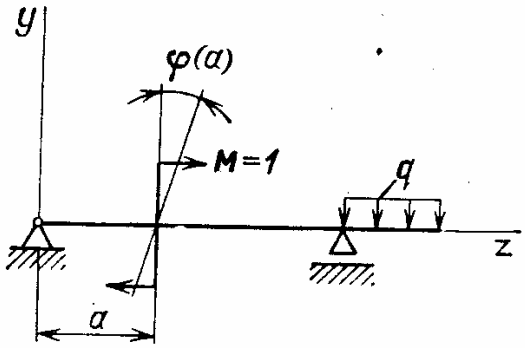


Рис. 9.17. Работа единичного момента

Определение угла поворота с помощью интеграла Мора. Для этого в сечении (рис. 9.17), где требуется определить угол поворота, прикладывается единичный момент ($M = 1$). В стержне под действием единичного момента $M = 1$ возникнут силовые факторы $M_{1x}(z)$, $Q_{1y}(z)$ и т. д.

Считая прогибы стержня под действием внешней нагрузки возможными перемещениями для единичной системы, получим, подобно равенству (102), $1 \cdot \varphi(a) = \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\,M_x(z)}{EJ_x}\,dz$, где $M_x(z)$ — изгибающий момент от внешней нагрузки.

В общем случае справедлива формула (103), в которой δ заменяется на φ, а силовые факторы N_1, M_{1x}, M_{1y}, ... определяются от единичного изгибающего момента.

Замечание. Возможны дальнейшие обобщения интеграла Мора, когда прикладывается не единичный силовой фактор, а единичная система сил. Физический смысл интеграла Мора вытекает из того, что он представляет возможную работу единичной системы сил на перемещениях основной системы.

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина. В общем случае (стержень переменного сечения, сложная система нагрузок) интеграл Мора определяется путем численного интегрирования. Во многих практически важных случаях, когда жесткость сечения постоянна по длине стержня, интеграл Мора может быть вычислен по правилу Верещагина. Рассмотрим определение интеграла Мора на участке от a до b (рис. 9.18).

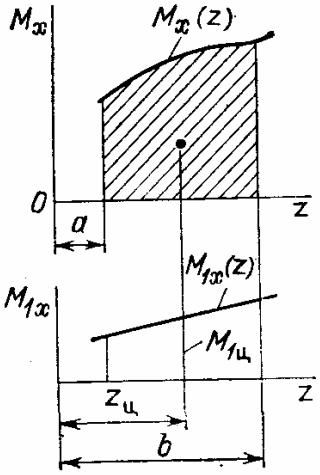


Рис. 9.18. Правило Верещагина для вычисления интеграла Мора

Эпюры момента от единичного силового фактора состоят из отрезков прямых. Не нарушая общности, предположим, что в пределах участка

$$M_{1x}(z) = Az + B, \qquad (106)$$

где A и B — параметры прямой.

Интеграл Мора на рассматриваемом участке постоянного сечения имеет вид

$$\int_a^b \frac{M_{1x}(z)\,M_x(z)}{EJ_x}\,dz = \frac{1}{EJ_x}\int_a^b (Az + B)\,M_x(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left(A\int_a^b zM_x(z)\,dz + B\int_a^b M_x(z)\,dz\right); \qquad (107)$$

при этом

$$\int_a^b M_x(z)\,dz = F, \qquad (108)$$

где F — площадь под кривой $M_x(z)$ (площадь эпюры изгибающих моментов от внешних сил на участке z).

Далее следует учесть, что статический момент площади эпюры моментов равен

$$\int_a^b zM_x(z)\,dz = z_ц F, \qquad (109)$$

где $z_ц$ — абсцисса центра тяжести площади F.

Равенство (109) справедливо, когда $M_x(z)$ в пределах участка не изменяет знак и $M_x(z)\,dz = dF$ может рассматриваться как элемент площади эпюры. Теперь из соотношений (107)—(109) получаем

$$\int_a^b \frac{M_{1x}(z)\,M_x(z)}{EJ_x}\,dz = \frac{FM_{1ц}}{EJ_x}, \quad (110)$$

где

$$M_{1ц} = Az_ц + B$$

— момент от единичной нагрузки в сечении $z = z_ц$.

Вспомогательная таблица для использования правила Верещагина дана на рис. 9.19.

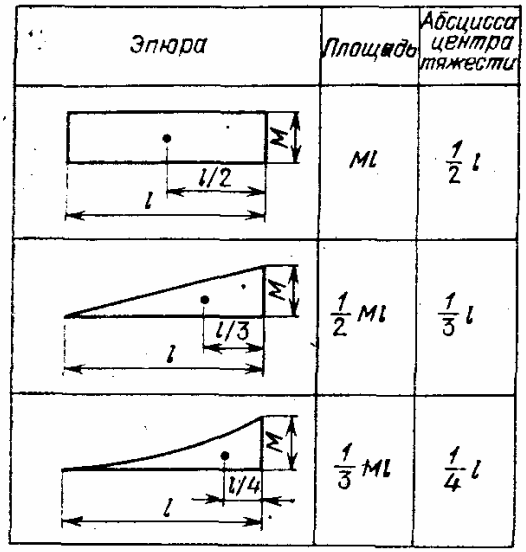


Рис. 9.19. Площади и положение центров тяжести эпюр моментов

Замечания. 1. Если эпюра от действия внешних сил на участке линейна (например, при действии сосредоточенных сил и моментов), то правило можно применять в обращенном виде: площадь эпюры от единичного силового фактора F_1 умножить на ординату эпюры $M_x(z)$, соответствующую центру тяжести площади F_1. Это вытекает из приведенного доказательства.

2. Правило Верещагина может быть распространено на интеграл Мора в общем виде (уравнение (103)). Основное требование при этом состоит в следующем: в пределах участка внутренние силовые факторы от единичной нагрузки (N_1, M_{1x}, M_{1y}, Q_{1x}, Q_{1y}) должны быть линейными функциями вдоль оси стержня (линейность эпюр!).

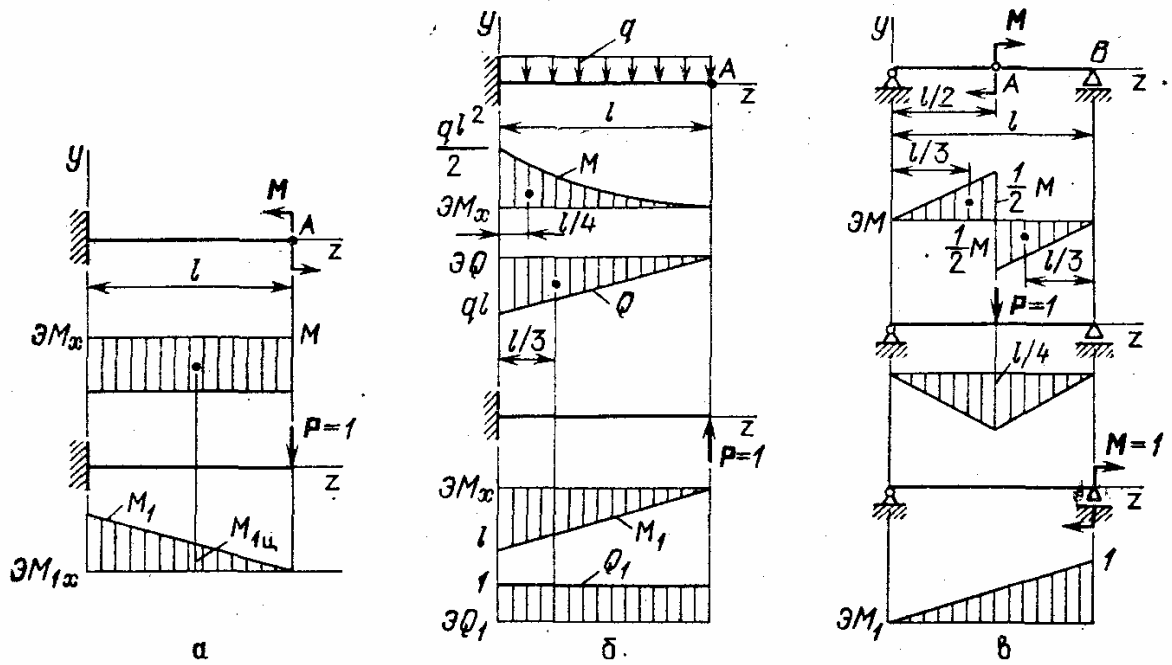


Рис. 9.20. Примеры определения прогиба и углов поворота по правилу Верещагина

Примеры. 1. Определить прогиб в точке A консольного стержня при действии сосредоточенного момента M (рис. 9.20, *а*).

Прогиб в точке A определяем по формуле (для краткости индекс опускается)

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ}\,dz = -\frac{1}{EJ} F M_{1ц} = -\frac{1}{EJ} Ml \cdot \frac{1}{2} l = -\frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Знак минус связан с тем, что M_1 и M имеют разные знаки.

2. Определить прогиб в точке A в консольном стержне под действием распределенной нагрузки.

Прогиб определяем по формуле

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ}\,dz + \int_0^l K \frac{Q_1 Q}{GF}\,dz.$$

Эпюры изгибающего момента M и перерезывающей силы Q от внешней нагрузки показаны на рис. 9.20, *б*, ниже на этом рисунке приведены эпюры M_1 и Q_1 при действии единичной силы. Далее находим

$$\delta_A = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l + \frac{K}{GF} \cdot \frac{1}{2} ql \cdot l \cdot 1 = \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Kql^2}{2GF}.$$

3. Определить прогиб в точке A и угол поворота в точке B для двухопорной балки, загруженной сосредоточенным моментом (рис. 9.20, *в*).

Прогиб определяем по формуле (деформацией сдвига пренебрегаем)

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ}\,dz.$$

Так как эпюра момента от единичной силы не изображается одной линией, то интеграл разбиваем на два участка:

$$\delta_A = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} l + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} l = 0.$$

Угол поворота в точке B равен

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) 1 = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{Ml}{24}.$$

Замечание. Из приведенных примеров видно, что способ Верещагина в простых случаях позволяет быстро определить прогибы и углы поворота. Важно только применять единое правило знаков для $M(z)$ и $M_1(z)$. Если условиться при изгибе стержня строить эпюры изгибающих моментов на «растянутом волокне» (см. рис. 9.20), то сразу легко видеть положительные и отрицательные значения моментов.

Особое преимущество правила Верещагина состоит в том, что оно может быть использовано не только для стержней, но и для рам (разд. 17).

Ограничения для применения правила Верещагина. Эти ограничения вытекают из вывода формулы (110), но обратим на них внимание еще раз.

1. Эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки должна быть в виде одной прямой линии. На рис. 9.21, *а* показан случай, когда это условие не соблюдается. Интеграл Мора необходимо вычислять отдельно для участков *I* и *II*.

2. Изгибающий момент от внешней нагрузки в пределах участка должен иметь один знак. На рис. 9.21, *б* показан случай, когда правило Верещагина следует применять для каждого участка в отдельности. Это ограничение не относится к моменту от единичной нагрузки.

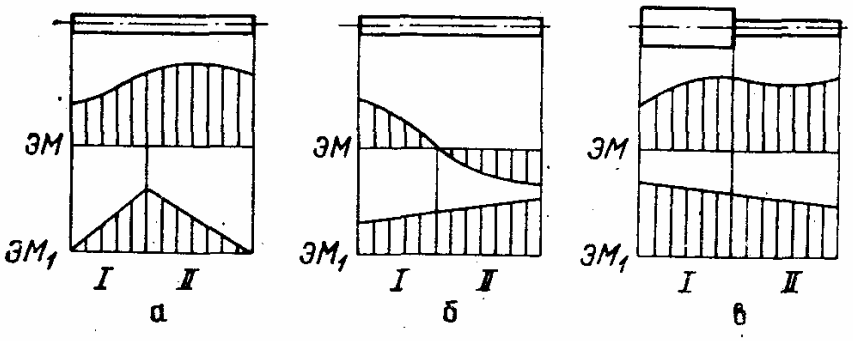


Рис. 9.21. Ограничения при использовании правила Верещагина: *а* — эпюра имеет излом; *б* — эпюра имеет разные знаки; *в* — стержень имеет разные сечения

3. Жесткость стержня в пределах участка должна быть постоянна, иначе интегрирование следует распространять отдельно на участки с постоянной жесткостью. Ограничения по постоянной жесткости можно избежать, если строить эпюры $M(z)/(EJ(z))$.

37. Вариационные методы и общие свойства упругих систем

Два основных вариационных метода. Ранее рассматривался вариационный метод, основанный на начале возможных перемещений (метод вариации перемещений). Перемещения предполагались достаточно непрерывными функциями, с тем чтобы выполнялись условия совместности (непрерывности) деформаций. Условия равновесия и краевые условия для напряжений удовлетворялись с помощью вариационного уравнения Лагранжа.

Другой вариационный метод — *метод вариации напряжений* — основан на сравнении двух близких напряженных состояний, каждое из которых удовлетворяет условиям равновесия и краевым условиям. Вариационное уравнение метода эквивалентно условиям совместности деформаций.

В некотором смысле методы противоположны: при вариации перемещений условия совместности удовлетворяются заранее и находится решение, соответствующее уравнениям равновесия. В качестве основных неизвестных принимаются перемещения. В методе вариации напряжений заранее выполняются уравнения равновесия и краевые условия и строится решение, удовлетворяющее условиям совместности; основными неизвестными являются напряжения.

Рассмотрим теперь основные уравнения метода вариации напряжений сначала на простом примере растяжения стержня.

Метод вариации напряжений. Стержень переменного сечения (лопатка турбины) растягивается в поле центробежных сил (рис. 9.22). В концевом сечении $z = l$ приложена распределенная поверх-

постная нагрузка, интенсивность которой равна

$$p_z(l) = \frac{N_l}{S(l)}, \tag{111}$$

где $S(l)$ — площадь поперечного сечения стержня при $z = l$. На стержень действуют массовые силы, причем интенсивность на единицу объема

$$F_z = \rho\omega^2(R_1 + z), \tag{112}$$

где ρ — плотность материала, ω — угловая скорость, R_1 — радиус корневого сечения.

Растягивающее усилие в сечении z

$$N(z) = N_l + \int_z^l F_z(z_1)\, S(z_1)\, dz_1, \tag{113}$$

где $S(z_1)$ — площадь поперечного сечения стержня.

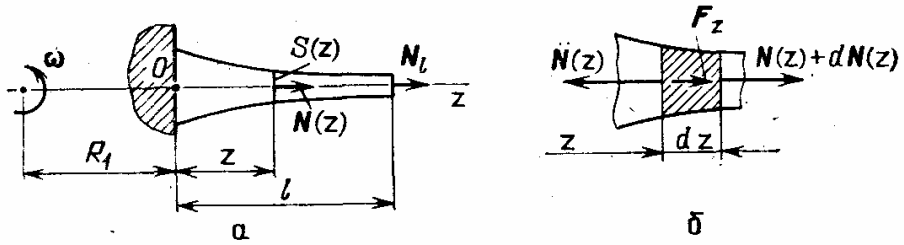


Рис. 9.22. Растяжение стержня: *а* — расчетная схема; *б* — равновесие элемента стержня

Напряжение растяжения в поперечном сечении

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{S(z)}. \tag{114}$$

Условие равновесия элемента стержня имеет вид

$$\frac{dN(z)}{dz} = -F_z S(z). \tag{115}$$

Теперь рассмотрим вариации напряженного состояния при вариации внешних нагрузок (усилия на конце стержня N_l и объемных распределенных усилий F_z). Геометрические размеры стержня не варьируются.

Будем считать, что вариации напряжений, вызываемые вариациями внешних нагрузок, согласованы с условиями равновесия и краевыми условиями.

На торце стержня ($z = l$) вариация внешнего усилия

$$\delta N_l = S(l)\ \delta p_z. \tag{116}$$

Следовательно, вариация растягивающего напряжения в сечении

$z = l$ должна быть

$$\delta\sigma_z(l) = \frac{\delta N_l}{S(l)} = \delta p_z, \tag{117}$$

где δp_z — вариация поверхностной нагрузки на торце стержня.

Вариация растягивающего усилия

$$\delta N(z) = \delta\sigma_z(z)\ S(z) \tag{118}$$

должна удовлетворять уравнению равновесия (115):

$$\frac{d}{dz}(\delta\sigma_z(z)\,S(z)) = -\delta F_z S(z), \tag{119}$$

где δF_z — вариация объемного усилия.

Причина, вызывающая вариацию объемного усилия, для дальнейшего несущественна; это может быть изменение угловой скорости вращения или плотности материала.

Рассмотрим вариацию (изменение) потенциальной энергии стержня, считая материал упругим:

$$\delta U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(N+\delta N)^2}{ES}\,dz - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2\,dz}{ES} = \int_0^l \frac{N\,\delta N}{ES}\,dz - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(\delta N)^2}{ES}\,dz.$$

Так как вариация усилий предполагается малой, то вторым членом правой части равенства можно пренебречь:

$$\delta U = \int_0^l \frac{N\,\delta N}{ES}\,dz. \tag{120}$$

Учитывая, что

$$\frac{N}{S} = \sigma_z, \quad \frac{\sigma_z}{E} = \varepsilon_z, \tag{121}$$

запишем равенство (120) в таком виде:

$$\delta U = \int_0^l \varepsilon_z\,\delta N\,dz = \iiint_V \varepsilon_z\,\delta\sigma_z\,dV. \tag{122}$$

Так как

$$\delta N = \int_S\int \delta\sigma_z\,dS = \delta\sigma_z\,S, \tag{123}$$

то величина

$$\varepsilon_z\ \delta\sigma_z = \delta U_1 \tag{124}$$

представляет вариацию удельной потенциальной энергии деформации. Преобразуем формулу для вариации потенциальной энергии

стержня с помощью интегрирования по частям:

$$\delta U = \int_0^l \varepsilon_z \, \delta\sigma_z \, S \, dz = \int_0^l \frac{dw}{dz} \delta\sigma_z \, S \, dz = w \, \delta\sigma_z \, S \Big|_0^l - \int_0^l w \frac{d}{dz} (\delta\sigma_z \, S) \, dz, \quad (125)$$

где $w(z)$ — перемещение сечения стержня вдоль оси z, одинаковое во всех точках сечения; $w(0) = 0$ при $z = 0$. Учитывая условие равновесия (119), находим

$$\delta U = w(l) \, \delta\sigma_z(l) \, S(l) + \int_0^l w \, \delta F_z \, S \, dz$$

или

$$\delta U = w(l) \, \delta N_l + \int_0^l w \, \delta F_z \, S \, dz. \quad (126)$$

Последнее равенство устанавливает связь между вариацией потенциальной энергии стержня и работой вариаций внешних сил. Соотношение (126) представляет частный случай вариационного уравнения метода вариаций напряжений.

Замечание. Равенство (126) можно записать так:

$$\int_0^l \varepsilon_z \, \delta\sigma_z \, S \, dz = w(l) \, \delta N_l + \int_0^l w \, \delta F_z \, S \, dz. \quad (127)$$

Величина

$$\int_0^l \varepsilon_z \, \delta\sigma_z \, S \, dz = \int\int_V \int \varepsilon_z \, \delta\sigma_z \, dV = \delta H \quad (128)$$

называется *вариацией потенциальной функции напряжений*. Для упругих деформаций потенциальная функция напряжений равна потенциальной энергии стержня (энергии деформации):

$$H = U. \quad (129)$$

На рис. 9.23 показана кривая деформирования (σ, ε). Площадь под кривой деформирования равна удельной энергии деформации. Величина H представляет площадь, дополняющую U до площади прямоугольника $\sigma \times \varepsilon$:

$$H = \sigma\varepsilon - U. \quad (130)$$

Величину H иногда называют дополнительной энергией деформации. Если зависимость (σ, ε) выражается прямой линией (упругие деформации), то справедливо равенство (129).

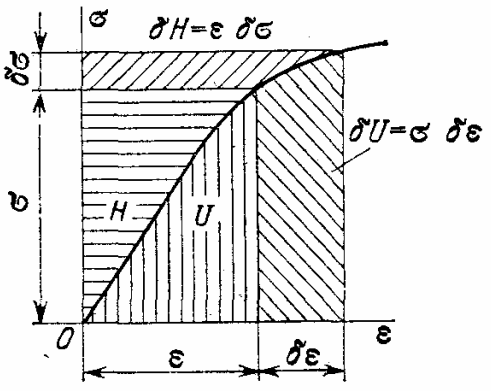


Рис. 9.23. Связь энергии деформации и потенциальной функции напряжений

В дальнейшем ограничимся применением метода вариации напряжений для линейно упругого материала. Ограничения могут быть сняты, если вместо U подразумевать H.

Вариационное уравнение метода вариации напряжений. В разобранном частном случае было получено вариационное уравнение

(126), которое запишем теперь в более общей форме:

$$\delta U = \int\limits_V\int\int \varepsilon_z\,\delta\sigma_z\,dV = \int\limits_S\int w\,\delta p_z\,dS + \int\limits_V\int\int w\,\delta F_z\,dV, \qquad (131)$$

так как

$$w(l)\,\delta N_l = w(l)\,\delta p_z\,S = \int\limits_{S_p}\int w\,\delta p_z\,dz. \qquad (132)$$

Интеграл распространяется на поверхность тела S_p, на которой заданы внешние усилия (торец стержня $z = l$); величина $w(l)\delta p_z$ одинакова во всех точках концевого сечения стержня.

В общем случае вариационное уравнение метода вариации напряжений имеет следующий вид:

$$\delta U = \int\limits_V\int\int (\varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \varepsilon_y\,\delta\sigma_y + \ldots + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx})\,dV =$$

$$= \int\limits_{S_p}\int (u\,\delta p_x + v\,\delta p_y + w\,\delta p_z)\,dS + \int\limits_V\int\int (u\,\delta F_x + v\,\delta F_y + w\,\delta F_z)\,dV. \qquad (133)$$

Вариация потенциальной энергии деформации равна работе вариаций внешних сил на действительных перемещениях.

Действительные перемещения — это перемещения в упругой системе от действия внешних нагрузок.

Вариация энергии деформации всего тела равна

$$\delta U = \int\limits_V\int\int \delta U_1\,dV, \qquad (134)$$

где U_1 — удельная потенциальная энергия,

$$\delta U_1 = \varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \varepsilon_y\,\delta\sigma_y + \ldots + \gamma_{zx}\,\delta\tau_{zx}. \qquad (135)$$

Удельная потенциальная энергия деформации в методе вариации напряжений выражается через основные неизвестные — напряжения

$$U = U_1(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \ldots,\ \tau_{2x}). \qquad (136)$$

Вариация потенциальной энергии деформации может быть представлена в такой форме:

$$\delta U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x}\delta\sigma_x + \frac{\partial U_1}{\partial \sigma_y}\delta\sigma_y + \ldots + \frac{\partial U_1}{\partial \tau_{zx}}\delta\tau_{zx}. \qquad (137)$$

Из формулы для потенциальной энергии упругого тела (соотношение (17)) получаем

$$\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E} = \varepsilon_x, \qquad (138)$$

что подтверждает идентичность зависимостей (135) и (137), а также и то обстоятельство, что левая часть уравнения (133) содержит вариацию потенциальной энергии деформации.

Вариационное уравнение (133) можно представить в матричной форме:

$$\int\int\int_V \{\varepsilon\}^T \{\delta\sigma\}\, dV = \int\int_{S_p} \{u\}^T \{\delta p\}\, dS + \int\int\int_V \{n\}^T \{\delta F\}\, dV. \quad (139)$$

При упругих деформациях

$$\int\int\int_V \{\varepsilon\}^T \{\delta\sigma\}\, dV = \delta U. \quad (140)$$

Замечание. В уравнении (133) или (139) вариация внешних сил может быть произвольной! Некоторые нагрузки могут рассматриваться как постоянные, другая часть сил или даже одна сила могут варьироваться. Вариации напряжений связаны с вариациями внешних сил условиями равновесия и краевыми условиями.

Следствия вариационного уравнения. Теорема Кастильяно. Пусть на малом участке поверхности ΔS приложена сила P, вектор которой составляет углы α, β, γ с осями координат (рис. 9.24). Косинусы углов (направляющие косинусы):

$$\cos\alpha = l, \quad \cos\beta = m, \quad \cos\gamma = n. \quad (141)$$

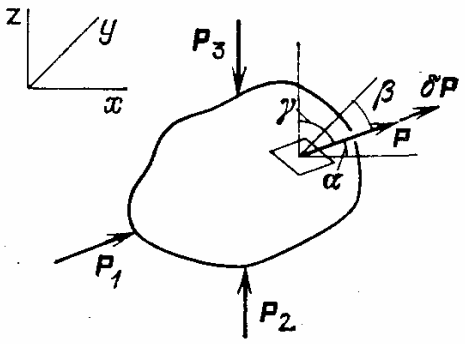


Рис. 9.24. К доказательству теоремы Кастильяно

Рассматривая сосредоточенную силу как распределенную нагрузку на малом участке, будем иметь следующие компоненты поверхностной нагрузки:

$$p_x \Delta S = lP, \quad p_y \Delta S = mP, \quad p_z \Delta S = nP. \quad (142)$$

Проводя вариацию этих компонент нагрузки, получим

$$\delta p_x \Delta S = l\delta P, \quad \delta p_y \Delta S = m\delta P, \quad \delta p_z \Delta S = n\delta P. \quad (143)$$

Предполагая, что варьируется только сила P, получим из вариационного уравнения (139)

$$\delta U = (u_A l + v_A m + w_A n)\,\delta P = \delta_P\, \delta P, \quad (144)$$

где $\delta_P = u_A l + v_A m + w_A n$ — проекция полного перемещения точки приложения силы на направление ее действия.

Приращение потенциальной энергии деформации вызвано приращением усилия δP, и потому

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P}\, \delta P. \quad (145)$$

Теперь из равенств (144) и (145) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_P. \quad (146)$$

Равенство (146) составляет *теорему Кастильяно.*

Частная производная потенциальной энергии деформации по силе равна проекции полного перемещения точки приложения силы на направление ее действия.

Замечания. 1. Вполне естественно, что по теореме Кастильяно определяется только проекция перемещения точки приложения силы на направление силы, а не полное перемещение. Это вытекает из того, что вариационное уравнение содержит работу вариации силы (скалярное произведение перемещения и силы).

По условиям (143) вариация силы происходит в направлении ее действия.

2. Величина δ_P определяется не только усилием P, величина которого варьировалась, а всеми приложенными к телу нагрузками (проекция действительного перемещения точки A на направление усилия P). Все другие нагрузки влияют на величину потенциальной энергии деформации и ее частной производной по P.

3. Теорема Кастильяно при наличии пластических деформаций выражается следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \delta_P.$$

Элементарные доказательства теоремы Кастильяно. Рассмотрим в качестве примера упругой системы балку, нагруженную силами

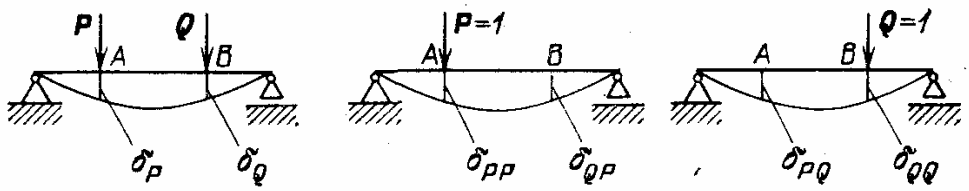


Рис. 9.25. К доказательству теоремы Кастильяно элементарным способом

P и Q (рис. 9.25). Прогибы в точках приложения сил P и Q обозначены δ_P и δ_Q. Считая для упругих систем действие сил независимым, можно записать

$$\delta_P = \delta_{PP}P + \delta_{PQ}Q, \qquad (147)$$

где δ_{PP} — перемещение в точке A от единичной силы в точке A, δ_{PQ} — перемещение в точке A от единичной силы в точке B.

Будем считать, что потенциальная энергия деформации не зависит от порядка приложения нагрузок и определяется работой внешних сил.

Пусть к балке сначала приложена только сила P. Она совершит работу

$$A_1 = \frac{1}{2} P\delta_{PP}P = \frac{1}{2}\delta_{PP}P^2.$$

Во втором нагружении статически прикладывается сила Q, причем сила P в процессе второго нагружения остается постоянной. Работа внешних сил при втором нагружении

$$A_2 = \frac{1}{2} Q(\delta_{QQ}Q) + P(\delta_{PQ}Q) = \frac{1}{2}\delta_{QQ}Q^2 + \delta_{PQ}PQ.$$

Потенциальная энергия системы после двух нагружений

$$U = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\delta_{PP}P^2 + \frac{1}{2}\delta_{QQ}Q^2 + \delta_{PQ}PQ.$$

Дифференцируя по P, находим

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_{PP}P + \delta_{PQ}Q = \delta_P, \qquad (148)$$

что и составляет теорему Кастильяно. Существенно, что перемещения от единичных сил зависят только от геометрических размеров системы и модуля упругости и не зависят от внешних усилий (в пределах упругости материала) — при дифференцировании они должны рассматриваться как постоянные.

Замечание. Можно привести несколько других элементарных доказательств теоремы Кастильяно, но всегда используется прием двух нагружений: независимость результата от порядка приложения нагрузок. Во всех доказательствах не рассматриваются другие порядки нагружения, так как они требуют привлечения теоремы взаимности. Однако элементарные доказательства всегда привлекательны — в них более четко выступает физическая сущность вопроса.

Примеры применения теоремы Кастильяно. 1. *Прогиб консольного стержня при действии силы на конце стержня* (рис. 9.26).

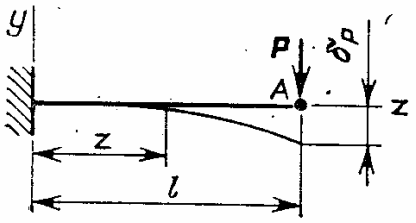


Рис. 9.26. Определение прогиба стержня с помощью теоремы Кастильяно

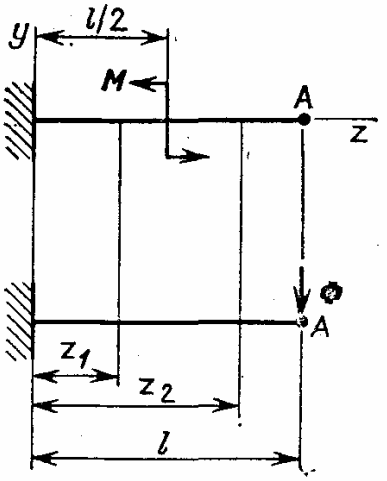


Рис. 9.27. Определение прогиба в произвольной точке стержня по теореме Кастильяно (способ фиктивной силы)

Для определения прогиба в точке A составляем выражение потенциальной энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2 dz}{EJ_x} = \frac{P}{2EJ_x}\int_0^l (l-z)^2\, dz = \frac{P^2 l^3}{6EJ_x}.$$

По теореме Кастильяно имеем

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ_x},$$

что соответствует ранее полученным результатам.

2. *Определение прогиба в произвольной точке стержня* (рис. 9.27). К стержню приложен момент M, и требуется определить прогиб в точке A. Для этого приложим в этой точке A силу Φ, применим теорему Кастильяно, но в окончательном результате положим $\Phi = 0$.

Потенциальная энергия деформации стержня (по участкам) равна

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{l/2}\frac{[M-\Phi(l-z_1)]^2}{EJ_x}\,dz_1+\frac{1}{2}\int_{l/2}^{l}\frac{\Phi^2(l-z_2)^2}{EJ_x}\,dz_2=\frac{M^2l}{4EJ_x}-\frac{M\Phi l^2}{8EJ_x}+\frac{\Phi^2l^3}{6EJ_x}.$$

Далее находим

$$\frac{\partial U}{\partial\Phi}=-\frac{3Ml^2}{8EJ_x}+\frac{\Phi l^3}{3EJ_x}.$$

Прогиб в точке A получаем при $\Phi=0$:

$$\delta_A=\left.\frac{\partial U}{\partial\Phi}\right|_{\Phi=0}=-\frac{3Ml^2}{8EJ_x}.$$

В рассматриваемом случае результат можно получить проще, если провести дифференцирование под знаком интеграла и положить $\Phi=0$. Тогда получаем

$$\delta_A=\left.\frac{\partial U}{\partial\Phi}\right|_{\Phi=0}=\left.\int_0^l\frac{M(z)\dfrac{\partial M}{\partial\Phi}\,dz}{EJ_x}\right|_{\Phi=0}=-\int_0^{l/2}\frac{M(l-z)}{EJ_x}\,dz=-\frac{3Ml^2}{8EJ_x}.$$

Знак минус показывает, что прогиб направлен противоположно силе Φ.

3. *Определение перемещения фермы в точке приложения нагрузки* (рис. 9.28). Определяем усилия в стержнях по условиям равновесия

$$N_1\cos\beta=N_2\cos\alpha,\quad N_1\sin\beta+N_2\sin\alpha=P.$$

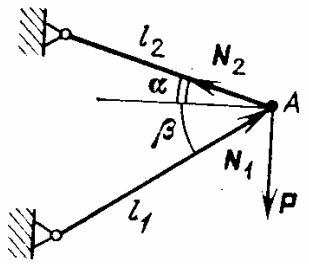


Рис. 9.28. Определение перемещений фермы с помощью теории Кастильяно

Из этих равенств получаем

$$N_1=P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad N_2=P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Потенциальная энергия деформации системы

$$U=\frac{1}{2}\frac{N_1^2l_1}{EF}+\frac{1}{2}\frac{N_2^2l_2}{EF}=$$

$$=\frac{P^2}{2EF}\left(l_1\cos^2\alpha+l_2\cos^2\beta\right)\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Перемещение точки A в направлении действия силы P по теореме Кастильяно равно

$$\delta_P=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{P}{EF}\left(l_1\cos^2\alpha+l_2\cos^2\beta\right)\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Замечание. В рассматриваемом примере очевидна эффективность метода вариации напряжений (усилий) при определении перемещений в сложных системах. Решение задачи на основании геометрических соображений значительно труднее.

Общие свойства упругих систем. Рассмотрим два важных свойства линейных упругих систем произвольной структуры, которые называются принципом независимости действия сил и принципом взаимности.

Принцип независимости действия сил утверждает, что в упругой системе напряжения и деформации от действия одной нагрузки не

зависят от наличия или отсутствия других нагрузок. Более строгая формулировка требует указания о линейности системы; напряжения и деформации должны быть пропорциональны действующей нагрузке.

Например, при контактной деформации упругих шаров принцип независимости действия сил несправедлив, так как зависимость перемещения от силы оказывается нелинейной. По этой же причине принцип независимости действия сил не может использоваться при наличии пластических деформаций или деформаций ползучести. Из принципа независимости действия сил вытекает, что действие суммы сил равно сумме действий каждой силы в отдельности.

Важным следствием принципа является утверждение, что результат действия суммы сил не зависит от порядка их приложения.

Принцип независимости действия сил подтверждается экспериментально и хорошо проверен на практике. Его теоретическое доказательство основывается на том, что линейные упругие системы описываются линейными дифференциальными уравнениями, для которых справедлив принцип суперпозиций.

Замечания. 1. Важным условием, сопутствующим применению принципа независимости действия сил, является принцип начальных размеров, в соответствии с которым условия равновесия рассматриваются для начального, недеформированного состояния. Если принцип начальных размеров в рассматриваемой задаче не может быть использован, то, как правило, неприменим и принцип независимости действия сил.

2. Для справедливости принципа независимости действия сил требуется одинаковая линейная зависимость усилий и перемещений при нагружении и разгрузке.

3. Разномодульные упругие конструкции, у которых параметры упругости зависят от знака действующих напряжений, не относятся к числу линейных систем, и для них, следовательно, принцип независимости действия сил неприменим.

Принцип взаимности. Этот принцип основан на принципе независимости действия сил и является его следствием.

Рассмотрим произвольное упругое тело (рис. 9.29), к которому приложены единичные силы $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$. Пусть δ_1 — перемещение точки A_1 при действии только одного усилия P_1 и δ_{11} — проекция этого перемещения на направление P_1. В точке A_2 от единичного усилия возникает перемещение в направлении усилия P_2, равное δ_{21}. Если к телу приложена единичная сила $P_2 = 1$, то она вызывает перемещение точки A_2, обозначенное δ_{22}, и в точке A_1 — перемещение δ_{12}.

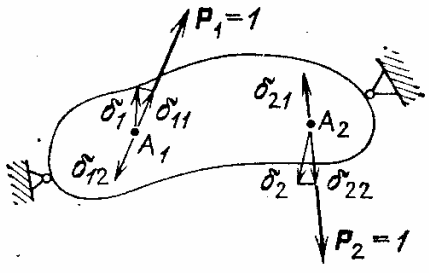


Рис. 9.29. Принцип взаимности для упругих систем

В соответствии с принципом независимости действия сил результат воздействия и, в частности потенциальная энергия деформации, не должен зависеть от порядка приложения нагрузки. Пусть

к упругой системе статически приложена сначала сила $P_1 = 1$. Тогда потенциальная энергия деформации, равная работе внешних сил, составит $\frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1$. Если затем статически приложено усилие $P_2 = 1$, то произойдет увеличение потенциальной энергии деформации за счет работы внешних сил. Усилие P_2 совершит работу $\frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1$, но, что самое важное, произведет работу усилие $P_1 = 1$, которое в процессе возрастания усилия P_2 оставалось постоянным (работа равна $1\cdot\delta_{21}\cdot 1$). При указанном порядке нагружения (сначала P_1, затем P_2) потенциальная энергия деформации равна

$$U_1 = \frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1 + \frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1 + \delta_{21}\cdot 1. \qquad (149)$$

Если изменить порядок нагружения (сначала P_2, затем P_1), получим

$$U_2 = \frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1 + \frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1 + \delta_{12}\cdot 1. \qquad (150)$$

Приравнивая значения U_1 и U_2, находим

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \qquad (151)$$

Перемещения δ_{12} и δ_{21} от единичных сил в других точках называются *коэффициентами влияния.*

Принцип взаимности утверждает: коэффициенты влияния являются симметричными, т. е. не изменяются при перестановке их индексов.

В общем случае

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \qquad (152)$$

Замечание. В общем случае принцип взаимности утверждает: работа сил первой системы на перемещениях от второй системы сил равна работе сил второй системы на перемещениях от первой системы. В частном случае, когда первая система представляет единичную силу P_1, а вторая — единичную силу P_2, получается равенство (151).

Доказательство в общем случае полностью повторяет приведенный вывод.

ГЛАВА 10

СЛОЖНЫЕ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕЙ

Классические модели стержней, основанные на гипотезе плоских сечений и одноосном напряженном состоянии, в некоторых случаях оказываются недостаточными, и приходится рассматривать более сложные модели. В теории тонкостенных стержней происходит отказ от гипотезы плоских сечений, в полупространственной теории стержней не используется гипотеза о ненадавливании.

38. Тонкостенные стержни

Вводные замечания. К числу наиболее распространенных тонкостенных стержней относятся прокатные профили, сварные балки и т. п. (рис. 10.1). Толщина профиля (стенки поперечного сечения) δ мала по сравнению с размерами поперечного сечения. В тонкостенных стержнях (открытого профиля) возникают явления, которые не могут быть учтены прежними моделями кручения и изгиба стержней.

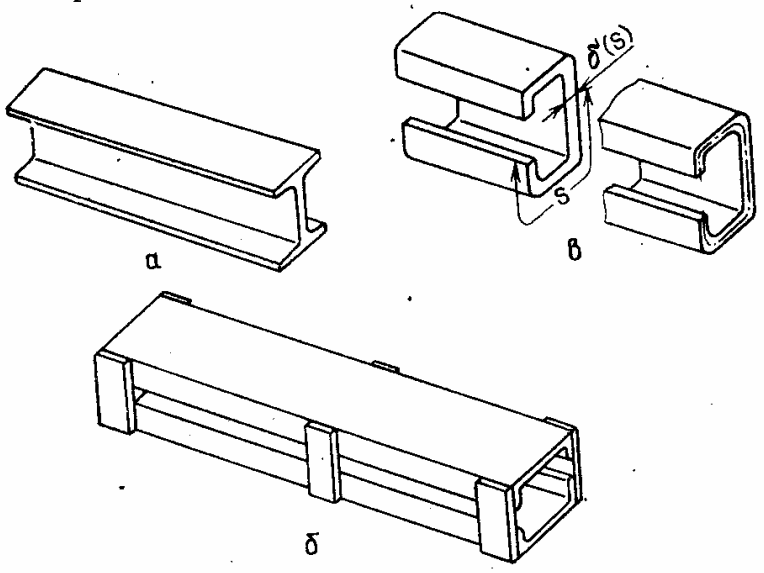


Рис. 10.1. Тонкостенные стержни

Главная особенность деформации тонкостенных стержней — появление значительной депланации сечения при действии крутящих моментов и связанных с ней нормальных напряжений.

На рис. 10.2 показано кручение стержня коробчатого сечения с открытым (незамкнутым) профилем. Если концевые сечения имеют возможность осевых перемещений (свободное или чистое кручение), то края разреза (точки A и B) заметно расходятся; когда развитие осевых деформаций стеснено (стесненное кручение), депланация (выход точек сечения из первоначальной плоскости поперечного сечения) уменьшается.

Следует отметить, что стеснение осевых деформаций повышает жесткость и прочность тонкостенного стержня. Для тонкостенных стержней замкнутого профиля депланация будет существенно меньше (разд. 28), и для них, как правило, можно использовать обычную теорию кручения и изгиба стержней.

Определяющим для учета влияния «тонкостенности» профиля является параметр

$$\nu = J_{\min}/J_к,$$

где $J_{\min}$ — минимальный момент инерции сечения на изгиб, $J_к$ — геометрическая жесткость сечения стержня на кручение.

При малых ν ($\nu \leqslant 3$) следует использовать обычную теорию изгиба и кручения, при больших ν — учитывать дополнительные эффекты, связанные с

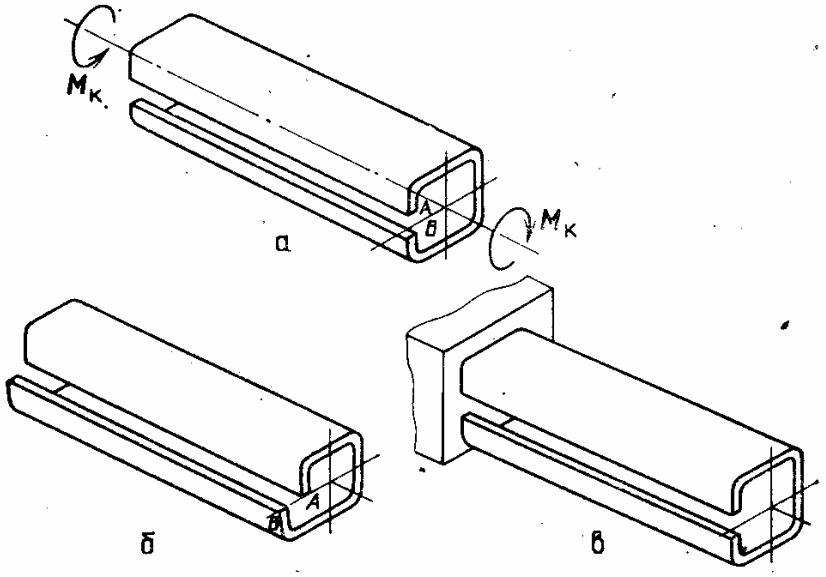


Рис. 10.2. Депланация при кручении тонкостенного стержня открытого профиля: *а* — схема нагружения; *б* — чистое кручение; *в* — стесненное кручение

«тонкостенностью» стержня. Например, для стержня (рис. 10.3, *а*) с коробчатым сечением при наличии разреза (открытый профиль)

$$J_{\min} = 2\left(\frac{\delta a^3}{12} + \frac{\delta a^3}{4}\right) = \frac{2}{3}\delta a^3, \quad J_к = \frac{4}{3}\delta^3 a, \quad \nu = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\delta^2}.$$

Для замкнутого сечения (рис. 10.3, *б*)

$$J_{\min} = \frac{2}{3}\delta a^3, \quad J_к = a^3\delta, \quad \nu = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, для стержня замкнутого сечения использование рассматри-

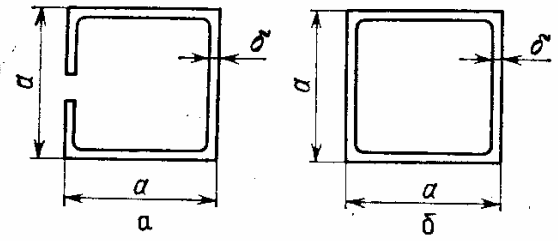


Рис. 10.3. Определение параметра тонкостенности для стержня коробчатого сечения с открытым (*а*) и замкнутым (*б*) профилями

ваемых ниже моделей не принесет новых результатов, тогда как для коробчатого сечения открытого профиля учет «тонкостенности» необходим уже при $\delta \leqslant 0{,}25\,a$. Дальнейшее рассмотрение относится к тонкостенным стержням открытого профиля.

Замечание. Не следует полагать, что для тонкостенных стержней замкнутого сечения всегда можно использовать обычные модели стержней. Во многих случаях оказывается необходимым учет деформации поперечного сечения, особенно для криволинейных труб (эффект Кармана).

Чистое кручение тонкостенных стержней открытого профиля. Кручение стержня моментами, приложенными по торцам стержня при отсутствии стеснения осевых перемещений, называется *чистым* (свободным) *кручением.*

При чистом кручении сечение стержня не деформируется (в плоскости поперечного сечения) (рис. 10.4), оно поворачивается как

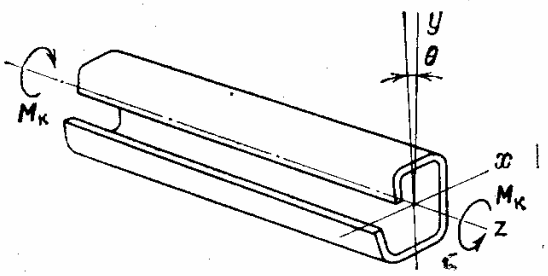


Рис. 10.4. Чистое кручение тонкостенного стержня

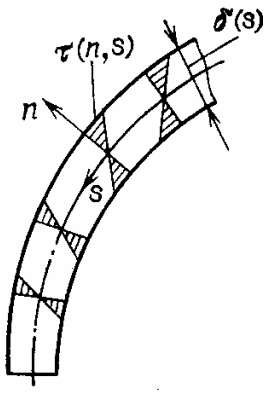


Рис. 10.5. Распределение касательных напряжений при чистом кручении

жесткое на угол $\theta(z)$ (разд. 28). Крутящий момент чистого кручения равен

$$M_{\text{к}}^{(1)} = C\frac{d\theta(z)}{dz}, \tag{1}$$

здесь C — жесткость стержня на кручение:

$$C = \int_0^L C_1(s)\,ds, \tag{2}$$

где $C_1(s)$ — жесткость единицы длины средней линии профиля, L — длина средней линии (разд. 28). При постоянных параметрах упругости

$$C_1(s) = \frac{1}{3}G\delta^3(s),$$

где G — модуль сдвига, $\delta(s)$ — толщина профиля. Жесткость стержня на кручение при $G = \text{const}$ равна

$$C = GJ_{\text{к}},$$

где

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3(s)\,ds. \tag{3}$$

Касательные напряжения чистого кручения при $G = \text{const}$ распределяются линейно по толщине профиля (рис. 10.5):

$$\tau(s, n) = \frac{2M_к}{C} n, \tag{4}$$

где n — расстояние по нормали до средней линии профиля.

В крайних точках сечения

$$\tau\left(s, \frac{\delta}{2}\right) = -\tau\left(s, -\frac{\delta}{2}\right) = \frac{M_к \delta}{GJ_к}.$$

В точках средней линии профиля ($n = 0$) касательные напряжения и, следовательно, деформации сдвига отсутствуют.

Замечание. В задаче о чистом кручении в качестве оси поворота сечения (оси кручения) может рассматриваться любая ось, параллельная оси стержня. Расчетные соотношения (значения напряжений, жесткость на кручение и др.) не зависят от выбора центра поворота сечений (разд. 26); перемещения определяются с точностью до движения стержня как твердого тела. В задачах стесненного кручения, когда стержень закреплен, такой произвол отсутствует — ось кручения, как будет показано в дальнейшем, становится вполне определенной.

Стесненное кручение тонкостенных стержней. Основные гипотезы. Рассмотрим теперь стесненное кручение, при котором какое-либо сечение стержня лишено возможности осевого смещения (депланации) (рис. 10.6). Примем две основные гипотезы, предложенные В. З. Власовым:

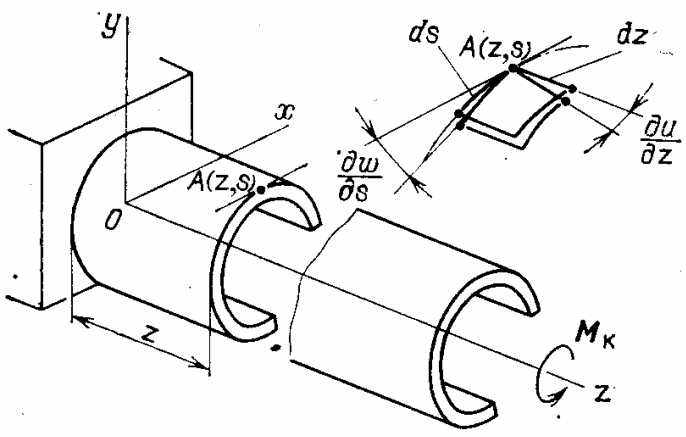


Рис. 10.6. Стесненное кручение стержня, определение сдвига в срединной поверхности стержня

1. Сечение стержня не искажается в своей плоскости.

2. В срединной поверхности стержня отсутствует деформация сдвига.

Эти гипотезы полностью справедливы для чистого кручения; в условиях стесненного кручения они носят приближенный характер. Произвольную точку срединной поверхности A характеризуют две координаты: z — расстояние вдоль оси z, s — расстояние вдоль дуги средней линии, отсчитываемое от начальной точки A_0 (положение начальной точки будет указано в дальнейшем). В соответствии с первой гипотезой сечение стержня при кручении поворачивается как жесткое целое. Если O_1 — центр поворота, то смещение точки A (рис. 10.7) равно

$$u_A = r\theta(z),$$

где r — расстояние от точки A до оси поворота, $\theta(z)$ — угол пово-

рота сечения в своей плоскости. Составляющая перемещения u точки A вдоль касательной к контуру равна

$$u = p\theta(z), \tag{5}$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на направление касательной к средней линии контура в точке A. Положение оси поворота определяется после рассмотрения условий равновесия. Угол сдвига в срединной поверхности стержня (разд. 8) равен

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}, \tag{6}$$

где w — составляющая перемещения точки A вдоль оси z.

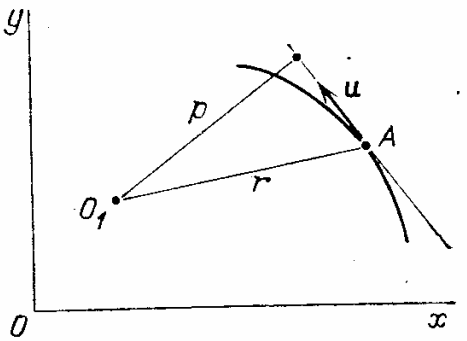


Рис. 10.7. Касательное перемещение точки средней линии профиля при кручении

На основании второй основной гипотезы $\gamma = 0$, и потому

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial z} = -p\frac{d\theta(z)}{dz}. \tag{7}$$

Интегрируя равенство (7) по переменной s, находим (рис. 10.8)

$$w = -\frac{d\theta(z)}{dz}\int_0^s p\,ds + w_0, \tag{8}$$

где w_0 — осевое смещение в точке A_0 (в точке начала отсчета дуги).

Величина

$$p\,ds = d\omega \tag{9}$$

равна удвоенной площади сектора, основание которого ds, вершина O_1; p — перпендикуляр, опущенный на основание. Имеем

$$\int_0^s p\,ds = \int d\omega = \omega(s), \tag{10}$$

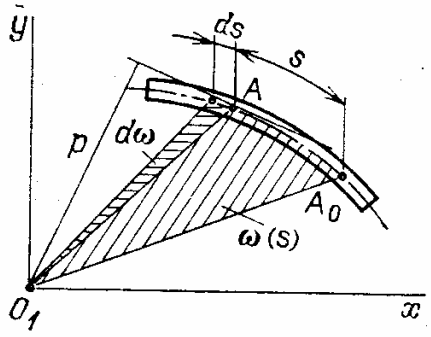


Рис. 10.8. Секториальная площадь как функция средней линии профиля

где $\omega(s)$ — удвоенная площадь сектора A_0O_1A с вершиной в центре поворота (точке O_1) (рис. 10.8). Величину $\omega(s)$ называют *секториальной площадью*, и эта геометрическая характеристика играет центральную роль в теории тонкостенных стержней. В дальнейшем будут указаны примеры определения секториальных площадей. Равенство (8) представим так:

$$w = -\frac{d\theta}{dz}\omega(s) + w_0. \tag{11}$$

Депланация сечения $(w - w_0)$ пропорциональна секториальной площади.

Нормальные напряжения стесненного кручения. Из равенства (11) получаем для деформации в направлении оси z следующую зависимость:

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{d^2\theta}{dz^2}\omega + \varepsilon_0, \tag{12}$$

где $\varepsilon_0 = \partial w_0/\partial z$ — осевая деформация в точке $s = 0$ (точке A_0). Нормальные напряжения при упругих деформациях равны

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{13}$$

где E — модуль упругости.

Равенство (13) предполагает, что «поперечные» нормальные напряжения отсутствуют (гипотеза ненадавливания) и стержень равномерно нагрет.

При кручении стержня (в том числе при стесненном) внешние силы (см. рис. 10.6) сводятся только к крутящему моменту, и потому должно быть

$$\int_F \sigma\, dF = 0, \tag{14}$$

$$\int_F x\sigma\, dF = 0, \tag{15}$$

$$\int_F y\sigma\, dF = 0. \tag{16}$$

Из уравнений равновесия (14)—(16) и соотношений (12) и (13) находим

$$-\frac{d^2\theta}{dz^2}\int_F \omega E\, dF + \varepsilon_0 \int_F E\, dF = 0, \tag{17}$$

$$\int_F x\omega E\, dF = 0, \tag{18}$$

$$\int_F y\omega E\, dF = 0, \tag{19}$$

так как оси x, y являются главными приведенными осями сечения. Для главных осей имеем

$$\int_F xE\, dF = 0, \quad \int_F yE\, dF = 0, \quad \int_F xyE\, dF = 0. \tag{20}$$

Из уравнения (17) следует, что

$$\varepsilon_0 = \frac{d^2\theta}{dz^2}\frac{\int_F \omega E\, dF}{\int_F E\, dF}. \tag{21}$$

Далее находим

$$\sigma = E\left(-\frac{d^2\theta}{dz^2}\omega + \varepsilon_0\right) = -\frac{d^2\theta}{dz^2}E\left(\omega - \frac{\int\limits_F \omega E\,dF}{\int\limits_F E\,dF}\right). \tag{22}$$

Начало отсчета дуги s (точку A_0) выберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_F \omega E\,dF = 0. \tag{23}$$

Условие (23) означает, что точку A_0 надо выбирать так, чтобы среднее значение секториальной площади (для всего сечения) обращалось в нуль.

Теперь вернемся к условиям (18) и (19) для секториальной площади. Как будет показано в дальнейшем, они определяют точку O_1 — центр поворота сечения (центр кручения).

Как только при кручении появляются нормальные напряжения, ось поворота сечений становится определенной в силу необходимости удовлетворения условиям равновесия (15) и (16).

Секториальная площадь, для которой равенствами (15) и (16) установлен полюс (точка O_1), а соотношением (23) — начало отсчета дуги, называется *главной секториальной площадью.* Полюс секториальной площади помещается в центре кручения.

Из равенства (22) вытекает

$$\sigma = -\frac{d^2\theta}{dz^2}E\omega. \tag{24}$$

Нормальные напряжения стесненного кручения пропорциональны главной секториальной площади. Эти напряжения при постоянном модуле упругости распределены равномерно по толщине стенки, так как осевая деформация принимается одинаковой по толщине профиля.

Касательные напряжения стесненного кручения. Внешний крутящий момент передается от сечения к сечению с помощью касательных напряжений чистого и стесненного кручения.

Будем предполагать, что момент касательных напряжений чистого кручения, распределенных линейно по толщине стенки, определяется прежним соотношением:

$$M_к^{(1)} = C\frac{d\theta}{dz}, \tag{25}$$

где C — жесткость стержня на кручение (см. разд. 28).

При постоянном модуле сдвига имеем

$$M_к^{(1)} = GJ_к\frac{d\theta}{dz}. \tag{26}$$

При передаче крутящего момента следует принять во внимание касательные напряжения, вызываемые нормальными напряжениями стесненного кручения.

Рассмотрим равновесие элемента стержня, показанного на рис. 10.9.

Обозначим N_f нормальную силу, действующую на часть сечения с площадью f. Учитывая зависимость (24), находим

$$N_f = \int_f \sigma\, dF = -\frac{d^2\theta}{dz^2}\int_f E\omega\, dF. \tag{27}$$

Из условия равновесия элемента стержня получим

$$\tau(s)\,\delta(s) = \frac{\partial N_f}{\partial z}. \tag{28}$$

Предполагается, что кромки профиля свободны от касательных усилий.

На основании равенства (27) получаем

$$\tau(s) = -\frac{d^3\theta}{dz^3}\frac{1}{\delta(s)}\int_f E\omega\, dF. \tag{29}$$

Величина

$$\int_f E\omega\, dF = S_{E\omega} \tag{30}$$

называется приведенным секториальным статическим моментом отсеченной части сечения.

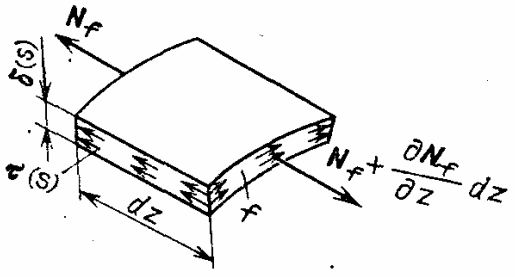


Рис. 10.9. Определение касательных напряжений стесненного кручения

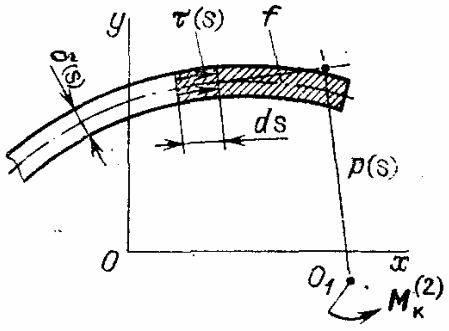


Рис. 10.10. Определение крутящего момента касательных напряжений стесненного кручения

Крутящий момент касательных напряжений стесненного кручения (рис. 10.10) определяется так:

$$M_к^{(2)} = -\int_F \tau(s)\delta(s)p(s)ds = -\int_F \tau(s)\,\delta(s)\,d\omega.$$

Подставляя значение $\tau(s)$ из равенства (29), находим

$$M_{\text{к}}^{(2)} = \frac{d^3\theta}{dz^3}\int_F \left(\int_f E\omega\, dF\right) d\omega.$$

С помощью интегрирования по частям устанавливаем

$$\int_F \left(\int_f E\omega\, dF\right) d\omega = \omega \int_f E\omega dF \Big|_{f=0}^{f=F} - \int_F E\omega^2\, dF. \tag{31}$$

Первый член правой части равенства обращается в нуль в силу условия (23).

Величину

$$\int_F E\omega^2\, dF = B_\omega \tag{32}$$

будем называть *секториальной жесткостью сечения.*

При постоянном модуле упругости имеем

$$B_\omega = EJ_\omega, \tag{33}$$

где $J_\omega = \int_F \omega^2\, dF$ — секториальный момент инерции.

Момент касательных напряжений стесненного кручения ($E = \text{const}$)

$$M_{\text{к}}^{(2)} = -\frac{d^3\theta}{dz^3} EJ_\omega. \tag{34}$$

В общем случае

$$M_{\text{к}}^{(2)} = -\frac{d^3\theta}{dz^3} B_\omega.$$

Замечание. Момент касательных напряжений стесненного кручения $M_{\text{к}}^{(2)}$ называют иногда изгибно-крутильным моментом M_ω:

$$M_{\text{к}}^{(2)} = M_\omega,$$

так как он появляется в результате стеснения осевых деформаций и возникновения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня.

Дифференциальное уравнение стесненного кручения. Внешний крутящий момент уравновешивается касательными напряжениями чистого и стесненного кручения:

$$M_{\text{к}} = M_{\text{к}}^{(1)} + M_{\text{к}}^{(2)}. \tag{35}$$

Моменты определяются относительно оси, проходящей через центры кручения (ось $z_{\text{к}}$ на рис. 10.11).

Принимая во внимание соотношения (1) и (34), находим

$$GJ_{\text{к}} \frac{d\theta}{dz} - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} = M_{\text{к}}(z). \tag{36}$$

В общем случае на стержень могут действовать распределенные крутящие моменты (см. рис. 10.11) $m_к(z)$.

В сечении z крутящий момент

$$M_к(z) = M_к + \int_z^l m_к(z_1)\,dz_1, \tag{37}$$

где $m_к(z_1)$ — крутящий момент на единицу длины стержня.

Из соотношения (37) следует равенство

$$\frac{dM_к}{dz} = -m_к(z), \tag{38}$$

что можно установить также из условия равновесия элемента стержня между сечениями z и $z + dz$.

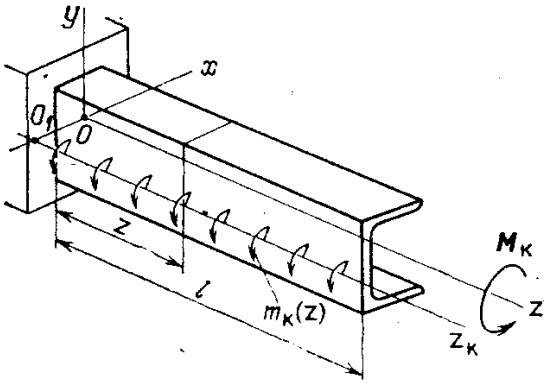


Рис. 10.11. Кручение тонкостенного стержня распределенными моментами. Ось $z_к$ — ось, проходящая через центры кручения (центры поворота) сечений

Дифференцируя равенство (36) по z, приходим к основному уравнению стесненного кручения:

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}\right) - \frac{d}{dz}\left(GJ_к \frac{d\theta}{dz}\right) = m_к(z). \tag{39}$$

Для стержня с переменными параметрами упругости уравнение стесненного кручения будет таким:

$$\frac{d}{dz}\left(B_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}\right) - \frac{d}{dz}\left(C \frac{d\theta}{dz}\right) = m_к(z). \tag{40}$$

Для стержня постоянного сечения с постоянными характеристиками жесткости по длине

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \beta^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{m_к(z)}{EJ_\omega}, \tag{41}$$

где

$$\beta^2 = \frac{GJ_к}{EJ_\omega}. \tag{42}$$

Решение уравнения стесненного кручения тонкостенных стержней и краевые условия. Рассмотрим решение уравнения (40) для стержня с постоянными параметрами. Предполагая частные решения однородного уравнения в виде

$$\theta = ce^{\lambda z},$$

найдем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \beta^2\lambda^2 = 0,$$

корни которого

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \beta, \quad \lambda_4 = -\beta.$$

Решение уравнения (40) можно записать так:

$$\theta = c_1 + c_2 z + c_3 \operatorname{ch} \beta z + c_4 \operatorname{sh} \beta z + \theta^*, \tag{43}$$

где c_1, c_2, ...— произвольные постоянные, θ^* — частное решение неоднородного уравнения.

Более удобно представить решение с помощью нормальных фундаментальных функций:

$$\theta = \theta(0)\,\Phi_1(z) + \frac{d\theta}{dz}(0)\,\Phi_2(z) + \frac{d^2\theta}{\beta^2 dz^2}(0)\,\Phi_3(z) + \frac{d^3\theta}{\beta^3 dz^3}(0)\,\Phi_4(z) + \Phi^*(z), \tag{44}$$

где

$$\Phi_1(z) = 1, \quad \Phi_2(z) = z, \quad \Phi_3(z) = \operatorname{ch} \beta z - 1, \quad \Phi_4(z) = \operatorname{sh} \beta z - \beta z.$$

Частное решение имеет вид

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{EJ_\omega} \int_0^z \Phi_4(z - z_1)\, m(z_1)\, dz_1. \tag{45}$$

В равенстве (44) величины $\theta(0), \frac{d\theta}{dz}(0), \frac{d^2\theta}{dz^2}(0), \frac{d^3\theta}{dz^3}(0)$ представляют собой начальные параметры. При отсутствии распределенной нагрузки

$$\Phi^*(z) \equiv 0.$$

Для практического использования решение (44) вместе с производными функции $\theta(z)$ целесообразно записать в матричной форме:

$$\{\theta(z)\} = [\Phi] \cdot \{\theta(0)\}, \tag{46}$$

где

$$\{\theta(z)\}^T = \left\{\theta(z), \frac{d\theta}{dz}, \frac{d^2\theta}{dz^2}, \frac{d^3\theta}{dz^3}\right\}$$

— фундаментальная матрица;

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch} \beta z - 1) & \frac{1}{\beta^3}(\operatorname{sh} \beta z - \beta z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta z & \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch} \beta z - 1) \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \beta z & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta z \\ 0 & 0 & \beta \operatorname{sh} \beta z & \operatorname{ch} \beta z \end{bmatrix}. \tag{47}$$

В решении (46) предполагается, что распределенные моменты отсутствуют.

Рассмотрим теперь краевые условия.

Жесткая заделка торца стержня (рис. 10.12, *а*). В этом случае

$$\theta(0) = 0, \tag{48}$$

$$\frac{d\theta}{dz}(0) = 0. \tag{49}$$

Последнее соотношение справедливо в силу равенства (11), так как осевое смещение $w = 0$ во всех точках заделанного сечения.

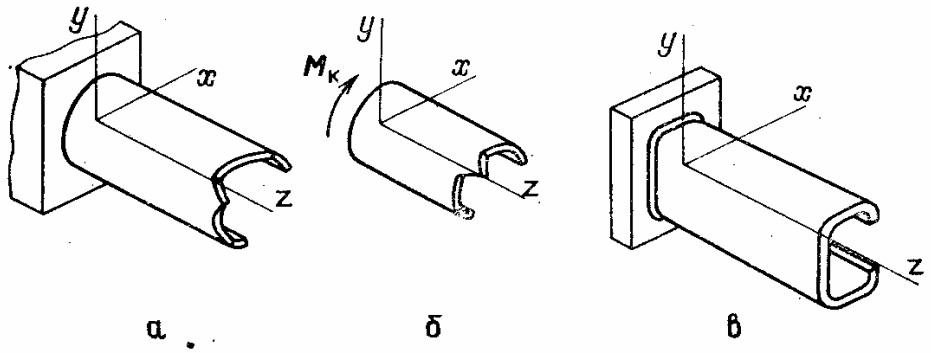


Рис. 10.12. Краевые условия при стесненном кручении: *а* — жесткая заделка; *б* — свободный торец; *в* — скользящая заделка

Из условия (49) вытекает важный вывод: в жесткой заделке касательные напряжения чистого кручения отсутствуют (см. равенство (1)); крутящий момент передается касательными напряжениями стесненного кручения.

Торец стержня свободен. Предполагается, что на торце стержня (рис. 10.12, *б*) нормальные напряжения отсутствуют. Из формулы (24) получаем

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(0) = 0. \tag{50}$$

Крутящий момент на торце стержня является заданным, и в силу соотношения (36)

$$GJ_к \frac{d\theta}{dz}(0) - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}(0) = M_к. \tag{51}$$

Если крутящий момент на торце отсутствует, то

$$GJ_к \frac{d\theta}{dz}(0) - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}(0) = 0. \tag{52}$$

Торец стержня свободно оперт, но поворот сечения невозможен (рис. 10.12, *в*). При наличии скользящей заделки торец стержня имеет возможность осевого перемещения, нормальные напряжения на торце отсутствуют

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(0) = 0. \tag{53}$$

Угол поворота сечения равен

$$\theta(0) = 0. \tag{54}$$

Замечание. Краевые условия в сечении $z = l$ составляются точно таким же образом, как и при $z = 0$.

Рассмотрим кручение стержня при жесткой заделке одного из торцов (рис. 10.13, *а*). Геометрические характеристики сечения будем считать известными (их определение рассматривается ниже). В сечении $z = 0$ имеется жесткая заделка, и по условиям (48) и (49) начальные параметры равны

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta}{dz}(0) = 0.$$

Краевые условия при $z = l$ будут такими (условия (50) и (51)):

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(l) = 0, \tag{55}$$

$$GJ_к \frac{d\theta}{dz}(l) - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}(l) = M_к. \tag{56}$$

С помощью решения (46), используя строчки матрицы (47), находим из условий (55) и (56)

$$\theta''(0)\,\mathrm{ch}\,\beta l + \theta'''(0)\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}\,\beta l = 0, \tag{57}$$

$$\beta^2\left[\theta''(0)\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}\,\beta l + \theta'''(0)\frac{1}{\beta^2}\times\right.$$
$$\left.\times(\mathrm{ch}\,\beta l - 1)\right] - [\theta''(0)\,\beta\,\mathrm{sh}\,\beta l +$$
$$+ \theta'''(0)\,\mathrm{ch}\,\beta l] = \frac{M_к}{EJ_\omega}. \tag{58}$$

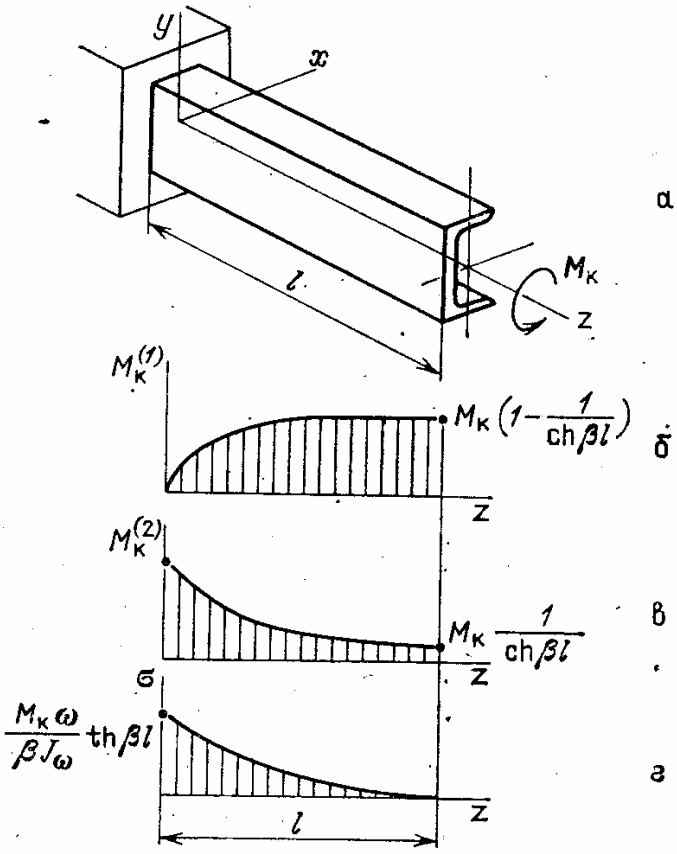


Рис. 10.13. Кручение стержня при жесткой заделке корневого сечения: *а* — схема стержня; *б*, *в*, *г* — эпюры крутящих моментов чистого $M_к^{(1)}$ и стесненного $M_к^{(2)}$ кручения и нормальные напряжения σ

Уравнение (58) после очевидных сокращений дает

$$\theta'''(0) = -\frac{M_к}{EJ_\omega}, \tag{59}$$

что можно было установить сразу в силу равенства (36).

Из соотношения (57) находим

$$\theta''(0) = \frac{\mathrm{sh}\,\beta l}{\beta\,\mathrm{ch}\,\beta l}\frac{M_к}{EJ_\omega}. \tag{60}$$

Используя решение (46), находим момент касательных напряжений чистого кручения:

$$M_к^{(1)} = GJ_к\frac{d\theta}{dz} = GJ_к\left[\theta''(0)\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}\,\beta z + \theta'''(0)\frac{1}{\beta^2}(\mathrm{ch}\,\beta z - 1)\right].$$

Внося значения $\theta''(0)$ и $\theta'''(0)$, получаем

$$M_к^{(1)} = M_к \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \beta (l - z)}{\operatorname{ch} \beta l}\right].$$

Момент касательных напряжений стесненного кручения

$$M_к^{(2)} = -EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} = -EJ_\omega [\theta''(0)\, \beta \operatorname{sh} \beta z + \theta'''(0) \operatorname{ch} \beta z],$$

или

$$M_к^{(2)} = M_к \frac{\operatorname{ch} \beta (l - z)}{\operatorname{ch} \beta l}.$$

Легко видеть, что условие

$$M_к^{(1)} + M_к^{(2)} = M_к$$

выполняется.

Нормальные напряжения стесненного кручения

$$\sigma = -E\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -E\omega \left[\theta''(0) \operatorname{ch} \beta z + \theta'''(0) \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta z\right],$$

или

$$\sigma = -\frac{M_к}{\beta J_\omega} \omega \frac{\operatorname{sh} \beta (l - z)}{\operatorname{ch} \beta l}.$$

Примерное распределение крутящих моментов $M_к$ и нормальных напряжений σ по длине стержня показано на рис. 10.13, *б* — *г*.

Изгиб и кручение тонкостенных стержней. Нормальные напряжения. Разберем теперь общий случай нагружения стержня, когда внешние силы дают в поперечном сечении не только крутящий

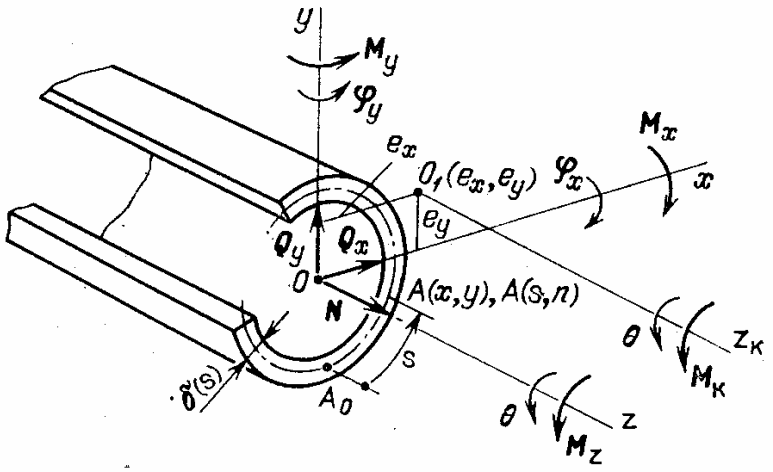


Рис. 10.14. Изгиб и кручение тонкостенного стержня: O — центр тяжести сечения; O_1 — центр кручения, или центр жесткости сечения; e_x, e_y — координаты центра кручения; x, y — главные оси

момент, как это предполагалось ранее, но также изгибающие моменты и усилия (рис. 10.14).

Внешние силы приводятся к главным осям сечения x, y в виде перерезывающих усилий Q_x и Q_y, осевого усилия N, изгибающих

моментов M_x, M_y и момента M_z относительно оси z, проходящей через центр тяжести сечения. Будем считать, что сечение стержня не деформируется в своей плоскости и к обычным деформациям стержня на основе гипотезы плоских сечений добавляются деформации, связанные с депланацией сечения при кручении.

Тогда перемещения точки A сечения стержня могут быть представлены так (см. разд. 27):

$$w = w_0 + \varphi_x y - \varphi_y x - \frac{d\theta}{dz}\omega, \tag{61}$$

где φ_x, φ_y — углы поворота сечения относительно осей x, y. Последний член правой части равенства (61) выражает осевое смещение (депланацию) при кручении. Угол поворота сечения θ определяется относительно оси, перпендикулярной плоскости поперечного сечения (он одинаков для осей z и $z_к$, проходящих через центр тяжести O или через центр кручения O_1).

Величина ω в равенстве (61) представляет секториальную площадь и зависит от дуги s, характеризующей положение точки A (см. рис. 10.14), и полюса, который принимается в центре кручения O_1.

Здесь и в дальнейшем под ω понимается главная секториальная площадь, удовлетворяющая условиям

$$\int_F E\omega\, dF = 0, \quad \int_F Ex\omega\, dF = 0, \quad \int_F Ey\omega\, dF = 0. \tag{62}$$

Оси x, y являются главными осями сечения, и для них

$$\int_F Ex\, dF = 0, \quad \int_F Ey\, dF = 0, \quad \int_F Exy\, dF = 0. \tag{63}$$

Деформация в точке A в направлении оси z равна

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \varepsilon_0 + \frac{d\varphi_x}{dz} y - \frac{d\varphi_y}{dz} x - \frac{d^2\theta}{dz^2}\omega. \tag{64}$$

Для упругого, равномерно нагретого материала, используя гипотезу одноосного напряженного состояния, находим, что деформациям ε отвечают напряжения

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + \frac{d\varphi_x}{dz} y - \frac{d\varphi_y}{dz} x - \frac{d^2\theta}{dz^2}\omega\right). \tag{65}$$

Теперь из условий равновесия

$$\int_F \sigma\, dF = N, \quad \int_F \sigma y\, dF = M_x, \quad \int_F \sigma x\, dF = -M_y, \tag{66}$$

учитывая равенства (62) и (63), получим

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{A}, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{B_x}, \quad \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{B_y}, \tag{67}$$

где жесткости стержня на растяжение и изгиб равны

$$A = \int_F E\,dF, \quad B_x = \int_F y^2 E\,dF, \quad B_y = \int_F x^2 E\,dF. \tag{68}$$

Нормальные напряжения в стержне с учетом соотношений (67) и (65) будут такими:

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x} - x\frac{M_y}{B_y} - \frac{d^2\theta}{dz^2}\omega\right\}. \tag{69}$$

Формуле для нормальных напряжений в тонкостенном стержне можно придать более удобный вид, если ввести понятие *бимомента*

$$M_B = \int_F \sigma\omega\,dF. \tag{70}$$

Умножая обе части равенства (69) на ω и интегрируя по всей площади сечения, находим в силу условий (62)

$$M_B = -\frac{d^2\theta}{dz^2}B_\omega, \tag{71}$$

где $B_\omega = \int E\omega^2\,dF$ — секториальная жесткость сечения.

Подставляя значение $d^2\theta/dz^2$ в соотношение (69), получаем

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x} - x\frac{M_y}{B_y} + \omega\frac{M_B}{B_\omega}\right\}. \tag{72}$$

Для стержня с постоянными параметрами упругости имеем

$$\sigma = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y} + \omega\frac{M_B}{J_\omega}. \tag{73}$$

Замечания. 1. Как видно из соотношения (73), в теории тонкостенных стержней распределение деформаций и напряжений при изгибе не подчиняется гипотезе плоских сечений. Гипотеза дополняется законом секториальной площади.

2. Величина бимомента M_B имеет размерность [сила $\times$ длина ^{2}], т. е. отличается от размерности обычных моментов.

Другое отличие состоит в том, что значение M_B в поперечном сечении стержня в противоположность изгибающим моментам M_x и M_y не может быть найдено из условий равновесия. Это объясняется тем, что величина M_B определяется самоуравновешенной системой сил. Значения M_B определяются в самом процессе решения. Если в концевых сечениях стержня внешние усилия заданы, то становится известной и величина бимомента.

Условие (71) показывает, что осевые силы, приложенные к торцу стержня, могут вызвать закручивание тонкостенного стержня при

$$M_B \not\equiv 0.$$

3. Формулу для нормальных напряжений (69) можно представить в виде суммы

$$\sigma = \sigma_и + \sigma_{ск}, \tag{74}$$

где

$$\sigma_и = E\left(\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x} - x\frac{M_y}{B_y}\right)$$

— обычные напряжения изгиба;

$$\sigma_{ск} = -\frac{d^2\theta}{dz^2} E\omega$$

— нормальные напряжения стесненного кручения (соотношение (24)).

Такое «разделение» произошло потому, что координаты x, y и секториальная площадь удовлетворяют условиям (62) и (63).

Касательные напряжения изгиба. Центр жесткости сечения. При кручении и изгибе тонкостенного стержня возникают касательные напряжения чистого и стесненного кручения и касательные напряжения изгиба. Все эти группы касательных напряжений могут рассматриваться отдельно. Ранее были изучены касательные напряжения чистого и стесненного кручения, и потому займемся касательными напряжениями изгиба. Вкратце они рассматривались в разд. 31, где был разобран соответствующий пример.

Исходным для расчета является условие равновесия (28), причем выражение для N_f будет таким:

$$N_f = \int_f \sigma\, dF = \frac{N}{A}\int_f E\, dF + \frac{M_x}{B_x}\int_f Ey\, dF - \frac{M_y}{B_y}\int_f Ex\, dF. \qquad (75)$$

Интегралы распространяются на отсеченную часть сечения, площадь которой f. Из равенства (28), считая осевое усилие N постоянным, находим касательные напряжения поперечного изгиба

$$\tau_и(s) = \frac{1}{\delta(s)}\left\{\frac{1}{B_x}\frac{dM_x}{dz} S_{Efx} - \frac{1}{B_y}\frac{dM_y}{dz} S_{Efy}\right\}, \qquad (76)$$

где $S_{Efx} = \int_f Ey\, dF$, $S_{Efy} = \int_f Ex\, dF$ — упруго-статические моменты отсеченной части сечения.

Из условий равновесия элемента стержня (рис. 10.15) получаем

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \qquad (77)$$

$$\frac{dM_y}{dz} = -Q_x, \qquad (78)$$

и тогда формула для касательных напряжений изгиба имеет вид

$$\tau(s) = \frac{Q_y S_{Efx}}{\delta(s) B_x} + \frac{Q_x S_{Efy}}{\delta(s) B_y}. \qquad (79)$$

При постоянном модуле упругости

$$\tau_и(s) = \frac{Q_y S_{fx}}{\delta(s) J_x} + \frac{Q_x S_{fy}}{\delta(s) J_y}, \qquad (80)$$

где S_{fx}, S_{fy} — статические моменты части площади сечения f. Ка-

сательные напряжения изгиба в поперечном сечении образуют систему сил (разд. 30), которая, если ее приводить к центру тяжести сечения, эквивалентна не только перерезывающему усилию, но и крутящему моменту M_τ (рис. 10.16, *а*).

Точка поперечного сечения, относительно которой касательные напряжения изгиба не дают момента, называется *центром жесткости*

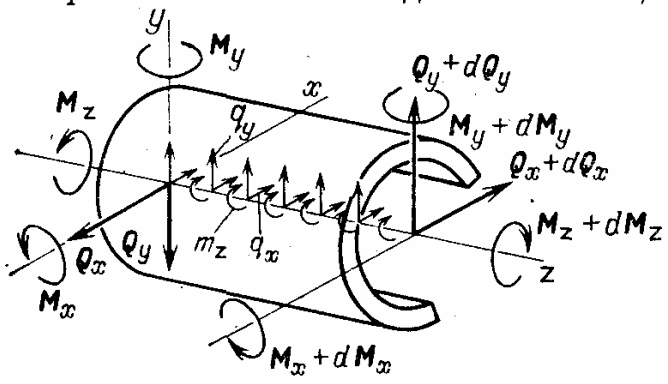


Рис. 10.15. Условия равновесия элемента стержня

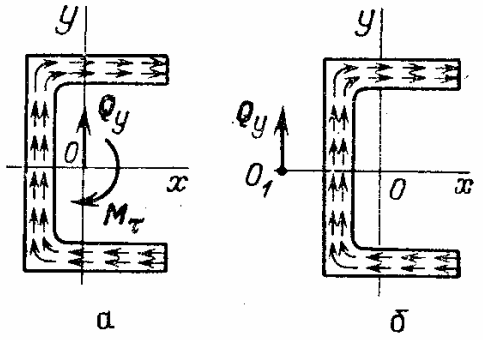


Рис. 10.16. Понятие о центре жесткости поперечного сечения (O — центр тяжести, O_1 — центр жесткости). Система касательных усилий приводится к центру тяжести (*а*) или к центру жесткости (*б*)

сечения или центром изгиба. Покажем сначала, что центр жесткости совпадает с центром кручения (точкой O_1).

Определим момент касательных усилий изгиба относительно точки O_1, в которой помещается полюс главной секториальной площади. Момент будет равен (см. рис. 10.10 и (30))

$$M_{\tau u} = -\int_F \tau(s)\delta(s)p(s)ds = -\int_F \tau(s)\,\delta(s)\,d\omega = -\frac{Q_y}{B_x}\int_F S_{Efx}\,d\omega - \frac{Q_x}{B_y}\int_F S_{Efy}\,d\omega. \tag{81}$$

Учитывая (62), (63) и интегрируя по частям, находим

$$\int_F \left(\int_f Ey\,dF\right) d\omega = \omega \int_f Ey\,dF \Big|_{f=0}^{f=F} - \int_F Ey\omega\,dF = 0,$$
$$\int_F \left(\int_f Ex\,dF\right) d\omega = \omega \int_f Ex\,dF \Big|_{f=0}^{f=F} - \int_F Ex\omega\,dF = 0. \tag{82}$$

Следовательно, момент касательных усилий, вызванных касательными напряжениями изгиба, обращается в нуль относительно центра кручения (точки поворота сечения при кручении). Центр жесткости совпадает с центром кручения.

Этот же результат можно получить другим путем. Равенство (81) справедливо, конечно, при произвольном выборе точки O_1. Нетрудно заметить, что

$$M_{\text{ти}} = 0,$$

если всегда выполняются условия

$$\int_F S_{Efx}\, d\omega = 0, \quad \int_F S_{Efy}\, d\omega = 0. \tag{83}$$

Для главных осей сечения x, y условия (83) и равенства (82) приводят к зависимостям

$$\int_F Ey\omega\, dF = 0, \quad \int_F Ex\omega\, dF = 0, \tag{84}$$

определяющим положение центра жесткости (центра изгиба).

Но соотношения (84) ранее были установлены для центра кручения (уравнения (62) и (63)), что и доказывает их совпадение.

Замечания. 1. Тождественность центра жесткости и центра кручения при упругих деформациях можно рассматривать как следствие теоремы взаимности. Для этого достаточно рассмотреть две системы сил, приложенных к свободному торцу консольного стержня: поперечную силу и крутящий момент.

2. Равенства (84), определяющие положение центра жесткости тонкостенного профиля, получаются из обычного рассмотрения касательных напряжений изгиба. Они не связаны непосредственно с проблемой стесненного кручения.

Пример. *Изгиб стержня швеллерного сечения поперечной силой* (рис. 10.17).

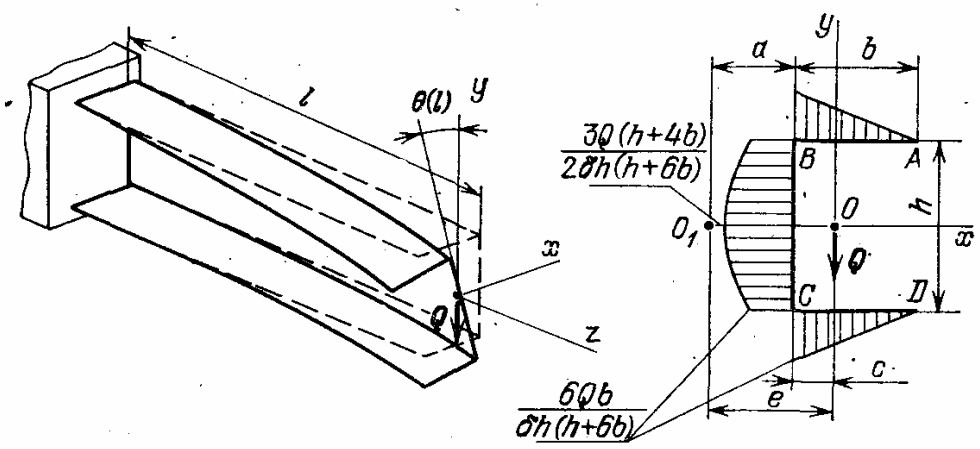


Рис. 10.17. Изгиб тонкостенного стержня поперечным усилием

Определим касательные напряжения при изгибе стержня, пользуясь формулой (80).

Найдем положение центра жесткости сечения по распределению касательных напряжений изгиба.

Крутящий момент касательных усилий при изгибе относительно точки O_1 — центра жесткости, отстоящего от средней линии стенки BC на расстояние a, должен быть равен нулю:

$$M_{O_1} = Qa - \frac{1}{2}\frac{6Qb}{\delta h\,(h+6b)}\, b\delta h = 0. \tag{85}$$

Первый член выражает момент от касательных усилий в стенке BC (их равнодействующая равна Q); второй член — момент от касательных усилий в полках (множитель 1/2 появляется в силу линейного распределения напряжений вдоль полки; толщина профиля δ считается малой). Из равенства (85) получаем

$$a = \frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Расстояние между центром жесткости и центром тяжести сечения

$$e = a + c = \frac{3b^2}{h + 6b} + \frac{b^2}{h + 2b} = \frac{4b^2 (h + 3b)}{(h + 6b)(h + 2b)}. \tag{86}$$

Этот результат можно получить из общих формул (84) для координат центра жесткости, что будет сделано в дальнейшем. Относительно оси стержня касательные напряжения изгиба (точнее, касательные усилия) создают момент

$$M_0 = M_{\tau и} = -Qe.$$

Так как внешние силы, приложенные к стержню, сводятся к силе Q, то полный крутящий момент в сечении (относительно оси стержня) должен обращаться в нуль. Следовательно, в сечении должны образоваться касательные усилия, дающие крутящий момент, равный M_0, но противоположно направленный. Он возникает за счет крутильной деформации стержня, вызываемой моментом

$$M_к = Qe.$$

Если осевое стеснение в заделке отсутствует, то крутящий момент $M_к$ вызывает касательные напряжения чистого кручения, распределенные линейно по толщине стенки (рис. 10.18).

При несовпадении центра тяжести и центра жесткости сечения поперечная нагрузка, приложенная в центре тяжести (рис. 10.17), вызывает не только

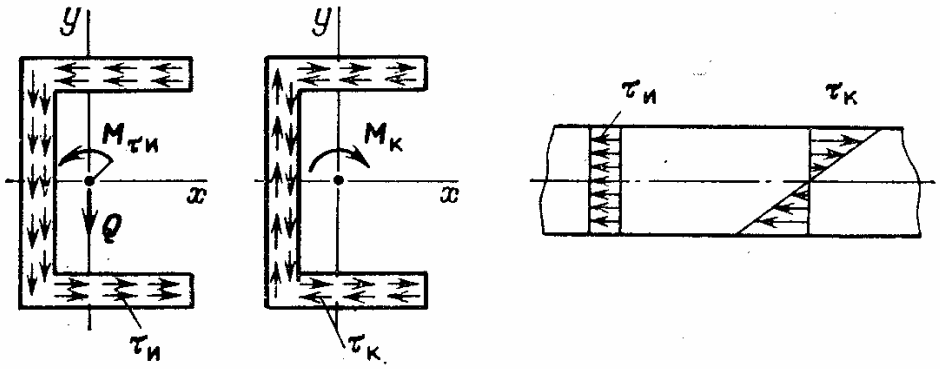


Рис. 10.18. Касательные напряжения изгиба $\tau_и$ и чистового кручения $\tau_к$ в поперечном сечении стержня

изгиб, но и кручение стержня. Величина крутящего момента равна моменту силы относительно центра жесткости сечения.

Оценим величины касательных напряжений изгиба и кручения для стержня швеллерного профиля (рис. 10.18). Касательное напряжение чистого кручения по формуле (4)

$$\tau_к = \frac{M_к \delta}{J_к} = \frac{Qe\delta}{\frac{1}{3}(h + 2b)\delta^3} = \frac{3Qe}{\delta^2 (h + 2b)}$$

Наибольшее касательное напряжение изгиба

$$\tau_{и\,max} = \frac{3Q(h+4b)}{2\delta h(h+6b)}.$$

При $h = b$

$$\frac{\tau_к}{\tau_{и\,max}} = \frac{32}{45}\frac{h}{\delta}.$$

Для тонких профилей ($h \gg \delta$) касательные напряжения кручения, вызванные поперечной силой Q (см. рис. 10.18), значительно превосходят касательные напряжения изгиба.

Угол поворота концевого сечения

$$\theta(l) = \frac{M_к l}{GJ_к} = \frac{3Qel}{G(h+2b)\delta^3}.$$

При малых δ угол поворота возрастает, так как e не зависит от δ.

Уравнения изгибно-крутильных деформаций тонкостенного стержня. При деформации изгиба сечение стержня получает поступательное смещение вдоль осей x и y (см. рис. 10.14). Деформация кручения приводит к повороту на угол θ вокруг оси, проходящей через центры жесткости сечения. Связь упругих перемещений (u, v) центров тяжести (точек оси стержня) и центров жесткости (u_1, v_1) выражается следующими простыми соотношениями:

$$u = u_1 + e_y\theta, \qquad v = v_1 - e_x\theta,$$

где e_x, e_y — координаты центра жесткости.

Поступательное движение профиля характеризуется упругими перемещениями центра жесткости; остальные точки сечения получают дополнительные смещения в результате поворота.

Параметры изгибной деформации (соотношения (67))

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2v_1}{dz^2}, \qquad \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{d^2u_1}{dz^2} \tag{87}$$

выражаются через вторые производные компоненты смещения центра жесткости. С помощью соотношений (67) находим

$$B_x\frac{d^2v_1}{dz^2} = -M_x, \qquad B_y\frac{d^2u_1}{dz^2} = M_y. \tag{88}$$

Учитывая условия равновесия элемента стержня (см. рис. 10.15)

$$\frac{dQ_x}{dz} = -q_x, \qquad \frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \qquad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \qquad \frac{dM_y}{dz} = -Q_x,$$

получаем уравнения изгибных перемещений

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(B_x\frac{d^2v_1}{dz^2}\right) = q_x, \qquad \frac{d^2}{dz^2}\left(B_y\frac{d^2u_1}{dz^2}\right) = q_y. \tag{89}$$

Зависимости (89) полностью совпадают с обычными уравнениями

изгиба стержня (см. разд. 34), но относятся к смещениям центра жесткости.

Перейдем к рассмотрению крутильных деформаций. Крутящие моменты относительно оси центров жесткости (оси $z_к$, см. рис. 10.14) дают касательные напряжения (точнее, касательные усилия) чистого кручения

$$M_к^{(1)} = C\frac{d\theta}{dz}$$

и стесненного кручения

$$M_к^{(2)} = -B_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3}.$$

Момент касательных усилий поперечного изгиба относительно оси центров жесткости равен нулю.

Из условия равновесия имеем

$$C\frac{d\theta}{dz} - B_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3} = M_к, \tag{90}$$

где $M_к$ — крутящий момент относительно оси $z_к$:

$$M_к = M_z + e_y Q_x - e_x Q_y, \tag{91}$$

M_z — момент внешних сил относительно оси z.

Дифференцируя равенство (90) по z и учитывая зависимость (91), находим

$$\frac{d}{dz}\left(B_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3}\right) - \frac{d}{dz}\left(C\frac{d\theta}{dz}\right) = m_z + e_y q_x - e_x q_y, \tag{92}$$

где, как и раньше, q_x и q_y — распределенные нагрузки на единицу длины оси стержня (оси z), m_z — распределенный (на единицу длины) момент относительно оси z.

Обозначая распределенный момент относительно оси $z_к$ в виде

$$m_к = m_z + e_y q_x - e_x q_y, \tag{93}$$

получим

$$\frac{d}{dz}\left(B_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3}\right) - \frac{d}{dz}\left(C\frac{d\theta}{dz}\right) = m_к. \tag{94}$$

Уравнение для угла закрутки θ при действии изгибающих и крутящих нагрузок совпадает с уравнением (40) для стесненного кручения.

Уравнения (89) и (94) описывают изгибные и крутильные деформации тонкостенного стержня. Краевые условия для уравнения (94) аналогичны краевым условиям уравнения (40) и были разобраны ранее (соотношения (48)—(54)).

Поскольку теперь среди внешних нагрузок рассматриваются и нормальные усилия на торцах стержня, то следует указать краевое

усилие при действии внешнего бимомента. Если в сечении $z = l$ известна величина бимомента, то (см. уравнение (71))

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(l) = -\frac{M_B}{B_\omega}. \tag{95}$$

Для стержня с постоянным модулем упругости

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(l) = -\frac{M_B}{EJ_\omega}.$$

Замечание. Для упругих перемещений u_1, v_1 и θ уравнения (89) и (94) оказались независимыми, но связь между изгибной и крутильной деформациями проникает обычно через краевые условия. Такая связь не возникает, если центры тяжести и жесткости сечений совпадают.

Пример. *Крутильные деформации тонкостенного стержня при действии продольных сил.*

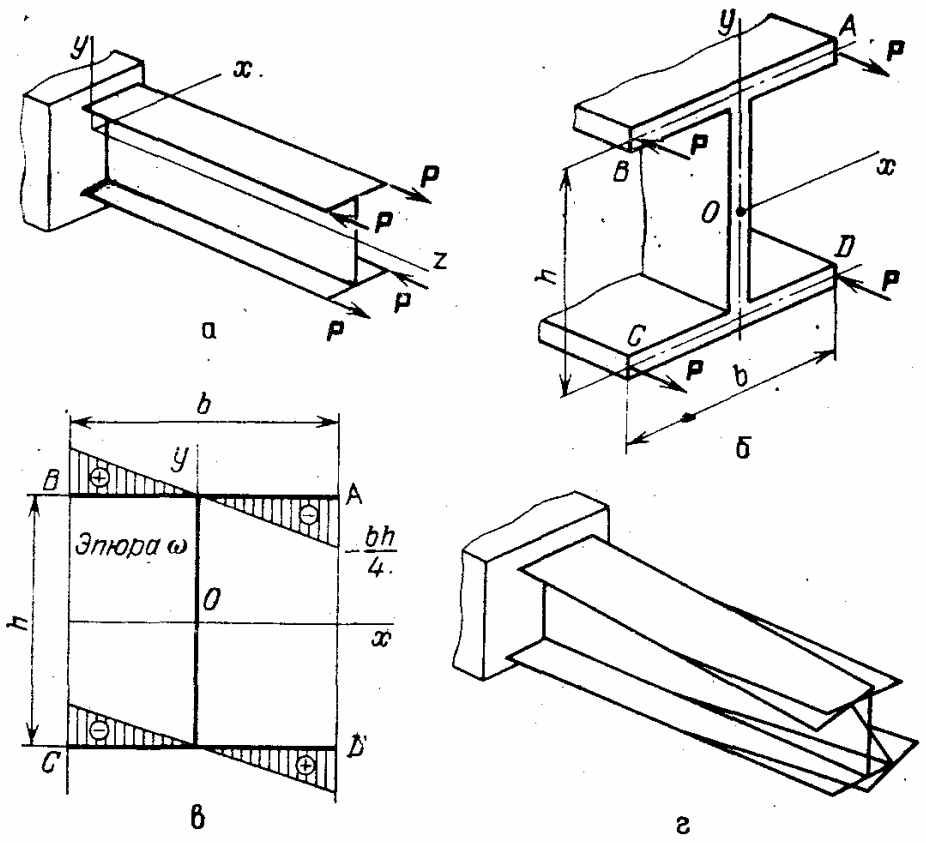


Рис. 10.19. Действие продольных самоуравновешенных усилий на тонкостенный стержень: *а* — расчетная схема; *б* — действие осевых сил на торец стержня; *в* — определение главной секториальной площади; *г* — картина деформаций

Пусть на торец стержня двутаврового сечения действуют четыре силы P, образующие самоуравновешенную систему сил.

Краевые условия при $z = 0$ имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta}{dz}(0) = 0,$$

а при $z = l$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(l) = -\frac{M_B}{EJ_\omega},$$

где $M_B = \int\limits_F \sigma\omega\, dF$ — бимомент внешних осевых сил.

Так как касательные усилия на торце $z = l$ отсутствуют, то по условиям (52)

$$GJ_к \frac{d\theta}{dz}(l) - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}(l) = 0.$$

Перейдем к определению секториальных характеристик. На рис. 10.19, *в* показано определение главной секториальной площади ω для двутаврового сечения. Центр жесткости (полюс секториальной площади) совпадает с центром тяжести, так как сечение обладает двумя осями симметрии. Принимая начало отсчета площади в точке A_0, получаем для точки A значение ω_A, равное удвоенной площади треугольника OA_0A:

$$\omega_A = -\frac{bh}{4}.$$

Знак минус появился потому, что радиус-вектор движется вдоль отрезка A_0A по часовой стрелке (более подробно определение секториальных характеристик сечения рассматривается ниже).

Секториальный момент инерции

$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF$$

можно вычислить по правилу Верещагина, умножая эпюру ω «саму на себя»:

$$J_\omega = 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{bh}{4}\frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{bh}{4}\delta = \frac{1}{24} b^3h^2\delta.$$

Значение бимомента в сечении $z = l$ по равенству (70) будет таким:

$$M_B(l) = \omega_A P - \omega_B P + \omega_C P - \omega_D P = -Pbh.$$

С помощью решения (46), учитывая равенства $\theta(0) = 0$ и $\frac{d\theta}{dz}(0) = 0$, находим

$$\theta(z) = \theta''(0)\frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta z - 1) + \theta'''(0)\frac{1}{\beta^3}(\operatorname{sh}\beta z - \beta z),$$

$$\theta'(z) = \theta''(0)\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta z + \theta'''(0)\frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta z - 1),$$

$$\theta''(z) = \theta''(0)\operatorname{ch}\beta z + \theta'''(0)\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta z,$$

$$\theta'''(z) = \theta''(0)\,\beta \operatorname{sh}\beta z + \theta'''(0)\operatorname{ch}\beta z.$$

Из краевых условий при $z = l$ получаем

$$\theta''(0)\operatorname{ch}\beta l + \theta'''(0)\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta l = -\frac{M_B(l)}{EJ_\omega},$$

$$\beta^2\left[\theta''(0)\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta l + \theta'''(0)\frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta l - 1)\right] - [\theta''(0)\,\beta\operatorname{sh}\beta l + \theta'''(0)\operatorname{ch}\beta l] = 0.$$

Из последнего условия следует

$$\theta'''(0) = 0,$$

и тогда

$$\theta''(0) = -\frac{M_B(l)}{EJ_\omega}\frac{1}{\operatorname{ch}\beta l}.$$

Нормальные напряжения находим из формулы (69):

$$\sigma = -E\theta''(z)\omega$$

или

$$\sigma = \frac{M_B}{J_\omega}\frac{\operatorname{ch}\beta z}{\operatorname{ch}\beta l}\omega = -\frac{Pbh}{J_\omega}\frac{\operatorname{ch}\beta z}{\operatorname{ch}\beta l}\omega.$$

Учитывая значение J_ω, находим

$$\sigma = -\frac{24P}{b^2h\delta}\frac{\operatorname{ch}\beta z}{\operatorname{ch}\beta l}\omega.$$

Напряжения изгиба в точке A при $z = l$ равны

$$\sigma_A = \frac{24P}{b^2h\delta}\frac{bh}{4} = \frac{6P}{b\delta}.$$

Этот результат может быть получен, если считать, что момент Pb действует на верхнюю полку:

$$\sigma_A = \frac{6Pb}{b^2\delta} = \frac{6P}{b\delta}.$$

Картина деформаций представлена на рис. 10.19, *г*. Каждая из полок двутаврового сечения испытывает деформацию изгиба.

Замечание. В корневом сечении $z = 0$ нормальные напряжения

$$\sigma(0) = \sigma(l)\frac{1}{\operatorname{ch}\beta l}.$$

Происходит «затухание» напряжений по мере удаления от сечения $z = l$, что вполне естественно, так как внешняя нагрузка самоуравновешенная.

Скорость затухания зависит от величины

$$\beta l = \sqrt{\frac{GJ_к l^2}{EJ_\omega}}.$$

Жесткость стержня на кручение

$$GJ_к = G\frac{1}{3}\delta^3(h + 2b),$$

и тогда

$$\beta l = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}\frac{1}{3}\frac{24\delta^3(h+2b)l^2}{b^3h^2\delta}} = \frac{2\delta l}{bh}\sqrt{\frac{1}{1+\mu}\frac{h+2b}{b}}.$$

При $h = b$

$$\beta l = \frac{2\delta l}{b^2}\sqrt{\frac{3}{1+\mu}}.$$

При малой толщине δ затухание невелико, и принцип Сен-Венана о быстром затухании действия самоуравновешенной нагрузки в тонкостенных стержнях нарушается.

Определение секториальных упруго-геометрических характеристик сечения и координат центра жесткости. Ранее было установлено, что главная секториальная площадь должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_F E\omega\, dF = 0, \tag{96}$$

$$\int_F Ex\omega\, dF = 0, \tag{97}$$

$$\int_F Ey\omega\, dF = 0, \tag{98}$$

где x, y — координаты элемента площади dF относительно приведенных главных осей сечения; E — модуль упругости материала стержня;

$$\omega = \int_0^s p(s_1)\, ds_1, \tag{99}$$

ω — секториальная площадь, соответствующая дуге s (удвоенная площадь сектора A_0AO_1). Секториальная площадь представляет криволинейный интеграл, и при его вычислении следует учитывать направление обхода (рис. 10.20). В правой системе координат приращение $d\omega$ положительно, если радиус-вектор r получает дополнительный поворот против часовой стрелки (по направлению положительного крутящего момента). Если начало отсчета секториальной площади переносится из точки A_0 в точку A_*, то новая секториальная площадь, соответствующая точке A, равна

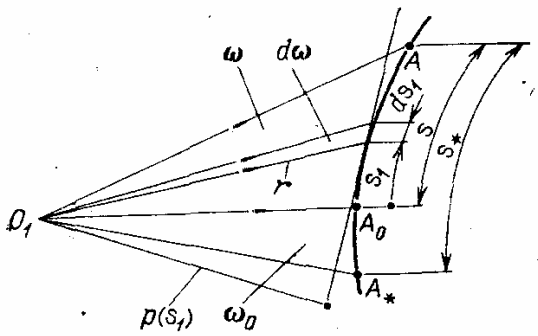


Рис. 10.20. Зависимость величины секториальной площади от изменения начала отсчета

$$\omega_* = \omega + \omega_0, \tag{100}$$

где ω_0 — секториальная площадь (соответствующая точке A_0) при начале отсчета в точке A_*. При изменении начала отсчета секториальной площади ее значение изменяется на постоянную величину. Для выполнения условия (96) можно выбрать произвольную точку средней линии профиля в качестве начала отсчета секториальной площади.

Подставляя соотношение

$$\omega = \omega_* - \omega_0$$

в равенство (96), находим

$$\int_F E\omega\, dF = \int_F E(\omega_* - \omega_0)\, dF = 0,$$

или

$$\omega_0 = \frac{\int_F E\omega_*\, dF}{\int_F E\, dF}. \qquad (101)$$

Значение ω_0 определяет положение точки A_0 — начала отсчета главной секториальной площади. Выражение для ω при произвольном начале отсчета имеет вид

$$\omega = \omega_* - \frac{\int_F E\omega_* dF}{\int_F E\, dF}. \qquad (102)$$

Формула (102) справедлива при любом полюсе секториальной площади.

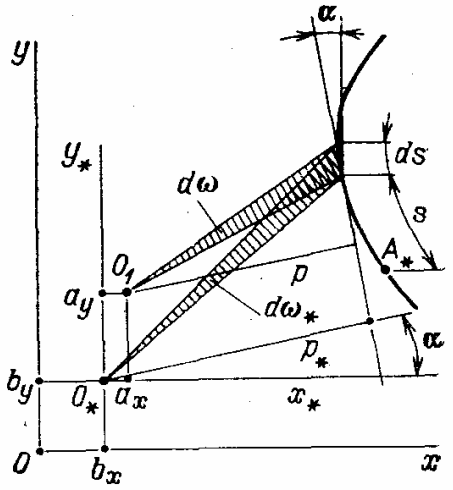


Рис. 10.21. Определение координат центра жесткости (точки O_1) в системе координат, оси которой соответственно параллельны главным осям

Определение координат центра жесткости. Пусть имеется система координат x_*, y_* (рис. 10.21), оси которой соответственно параллельны главным осям сечения x, y ($x_* \parallel x$, $y_* \parallel y$), и для точки O_*, рассматриваемой как полюс, определена секториальная площадь ω_* при начале отсчета в точке A_*. Найдем связь между секториальной площадью ω, имеющей полюс в центре жесткости (точке O_1), и величиной ω_*. Начало отсчета (точка A_*) остается неизменным.

Будем иметь

$$d\omega_* = p_* ds, \qquad d\omega = p ds. \qquad (103)$$

Если α — угол между касательной к средней линии профиля и осью y, то (см. рис. 10.21)

$$p_* = p + a_x \cos\alpha + a_y \sin\alpha, \qquad (104)$$

где a_x, a_y — координаты центра жесткости в системе координат x_*, y_*. Так как

$$\cos\alpha = \frac{dy_*}{ds} = \frac{dy}{ds}, \qquad \sin\alpha = -\frac{dx_*}{ds} = -\frac{dx}{ds},$$

то из соотношений (103) находим

$$d\omega = \left(p_* - a_x \frac{dy}{ds} + a_y \frac{dx}{ds}\right) ds = d\omega_* - a_x\, dy + a_y\, dx.$$

Интегрируя это выражение вдоль дуги s, получим

$$\omega = \omega_* - a_x y + a_y x + C, \tag{105}$$

где x, y — координаты точки средней линии профиля (в главной системе координат), для которой определяется секториальная площадь; C — постоянная интегрирования. В силу условий (97) и (98)

$$\begin{aligned} \int_F Ex\omega\, dF &= \int_F Ex\,(\omega_* - a_x y + a_y x + C)\, dF = 0, \\ \int_F Ey\omega\, dF &= \int_F Ey\,(\omega_* - a_x y + a_y x + C)\, dF = 0. \end{aligned} \tag{106}$$

Так как оси x, y являются главными, то, ссылаясь на равенства (63), получим из соотношений (106)

$$a_x = \frac{1}{B_x}\int_F Ey\omega_*\, dF, \quad a_y = -\frac{1}{B_y}\int_F Ex\omega_*\, dF. \tag{107}$$

Для стержня с постоянными параметрами упругости

$$a_x = \frac{1}{J_x}\int_F y\omega_*\, dF, \tag{108}$$

$$a_y = -\frac{1}{J_y}\int_F x\omega_*\, dF, \tag{109}$$

где J_x, J_y — моменты инерции сечения относительно главных осей. Координаты центра жесткости относительно главных осей равны

$$e_x = a_x + b_x, \quad e_y = a_y + b_y, \tag{110}$$

где b_x, b_y — координаты произвольного полюса O_*.

Отметим, что формулы для координат центра жесткости справедливы при любом выборе начала отсчета секториальной площади.

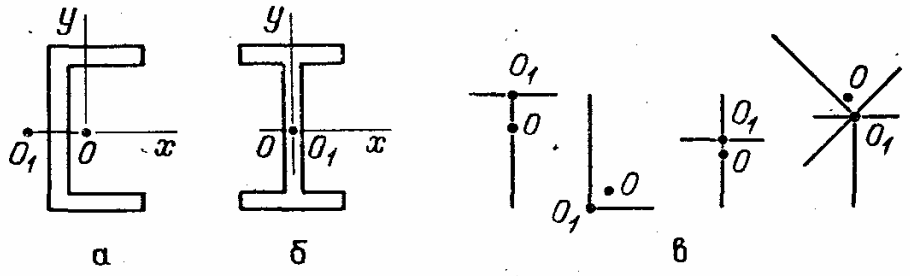


Рис. 10.22. Расположение центра жесткости O_1 и центра тяжести O некоторых профилей

Общие свойства расположения центра жесткости. Равенства (97) и (98), определяющие положение центра жесткости, позволяют указать некоторые общие правила его нахождения.

1. Если сечение стержня имеет ось симметрии, то центр жесткости так же, как и центр тяжести, лежит на этой оси (рис. 10.22, *а*).

Напомним, что для таких сечений ось симметрии является одной из главных осей. Считая ось x совпадающей с осью симметрии, заметим, что равенство (97) будет удовлетворено, так как значения ω в двух симметрично расположенных точках средней линии одинаковы по величине, но противоположны по знаку.

Предполагается, что модуль упругости E постоянен или удовлетворяет, как и элементы площади, условиям симметрии.

2. Если сечение имеет две оси симметрии, то центр жесткости так же, как и центр тяжести, лежит на пересечении указанных осей (рис. 10.22, *б*).

3. Если сечение имеет радиальную точку, то центр жесткости совпадает с ней (рис. 10.22, *в*). Радиальной точкой сечения назовем точку, по отношению к которой средние линии частей сечения имеют радиальное направление. Очевидно, все средние линии должны быть прямыми.

В связи с этим для любой точки средней линии главная секториальная площадь равна $\omega = 0$, так как ее полюс находится в точке O_1. Сечения, обладающие радиальной точкой, не имеют депланации при кручении; в тонкостенных стержнях с такими сечениями (типа тавра, уголка) стесненное кручение не возникает. Отметим, что при $\omega = 0$ условия (96)—(98) выполняются тождественно.

Примеры определения координат центра жесткости. 1. Рассмотрим сечение швеллерного типа (рис. 10.23) и выберем начало местной системы координат x_*, y_* в центре тяжести стенки профиля. Центр тяжести всего сечения отстоит от средней линии стенки

$$b_x = -\frac{b^2}{h+2b}.$$

Начало отсчета секториальной площади примем в точке O_*. Вдоль линии BA радиус-вектор вращается по часовой стрелке и потому $\omega_* < 0$. В точке A секториальная площадь равна удвоенной площади треугольника $O_*\,BA$:

$$\omega_{*A} = -\frac{bh}{2}.$$

Момент инерции сечения равен

$$J_x = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{b\delta h^2}{2}.$$

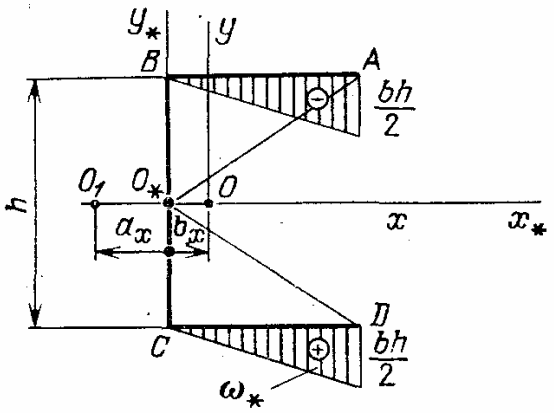


Рис. 10.23. Определение центра жесткости сечения швеллерного типа

Положение центра жесткости (координату a_x) находим по формуле (108). Предварительно вычисляем

$$S_{\omega x} = \int_F y\omega_*\,\partial F = -2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{bh}{2}\,b\delta\,\frac{h}{2} = -\frac{b^2h^2\delta}{4}.$$

Значения y: для верхней полки $y = h/2$, для нижней $y = -h/2$. Далее находим

$$a_x = -\frac{b^2h^2\delta}{4J_x} = -\frac{3b^2}{h+6b}.$$

Расстояние между центром жесткости и центром тяжести равно

$$e_x = a_x + b_x = -\frac{3b^2}{h+6b} - \frac{b^2}{h+2b} = -\frac{4b^2(h+3b)}{(h+6b)(h+2b)}.$$

Этот результат был получен ранее (формула (86)) путем непосредственного определения момента касательных напряжений изгиба.

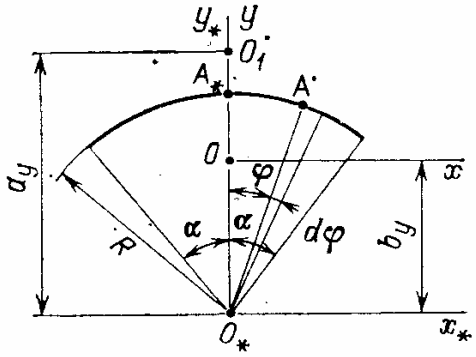


Рис. 10.24. Определение центра жесткости сечения стержня в виде дуги окружности

2. Определить центр жесткости сечения стержня в виде дуги окружности радиуса R. Площадь сечения $F = 2R\alpha\delta$ (рис. 10.24). Центральный угол 2α, толщина δ.

Выберем начало местной системы координат в центре окружности. Центр тяжести сечения отстоит на расстояние

$$b_y = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Начало отсчета секториальной площади примём на оси y_* (точка A_*). Секториальная площадь в точке A (удвоенная площадь сектора O_*A_*A) равна

$$\omega_* = -R^2\varphi.$$

Знак минус связан с поворотом радиуса-вектора по часовой стрелке. Главная секториальная площадь должна удовлетворять условию

$$\int_F x\omega\, dF = \delta\int_{-\alpha}^{\alpha} R\sin\varphi\left(a_y R\sin\varphi - R^2\varphi\right)R\, d\varphi = 0,$$

что дает значение

$$a_y = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\cdot\varphi\, d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\varphi\, d\varphi} = 2\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha}R.$$

При $\alpha = \pi$ (сечение в виде кольца с разрезом)

$$a_y = 2R.$$

При малых α, считая

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \ldots, \quad \cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ldots,$$

получаем

$$a_y = \frac{\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 - \alpha + \frac{\alpha^3}{2}}{\alpha - \alpha + \frac{8}{12}\alpha^3}\cdot 2R = R,$$

т. е. центр жесткости приближается к центру тяжести.

Расчет секториальных характеристик сечений. Для определения напряжений и деформаций в тонкостенных стержнях, кроме обычных геометрических характеристик (координат точек, моментов инерции), требуются значения секториальной площади и ее моментов. Секториальная площадь, соответствующая точке средней линии профиля, может рассматриваться как обобщенная координата точки наряду с другими ее координатами (x, y и т. д.). Определение секториальных характеристик для сечений стержней с постоянным модулем упругости покажем на примерах.

Пример 1. Определить главную секториальную площадь и ее моменты для сечения швеллерного типа. Толщина профиля δ (рис. 10.25). Ранее было определено расстояние от центра жесткости O_1 до стенки — величина a_x (рис. 10.23):

$$a_x = \frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Полюс главной секториальной площади находится в точке O_1, начало отсчета (нулевая точка секториальной площади) лежит на оси x (точка A_0).

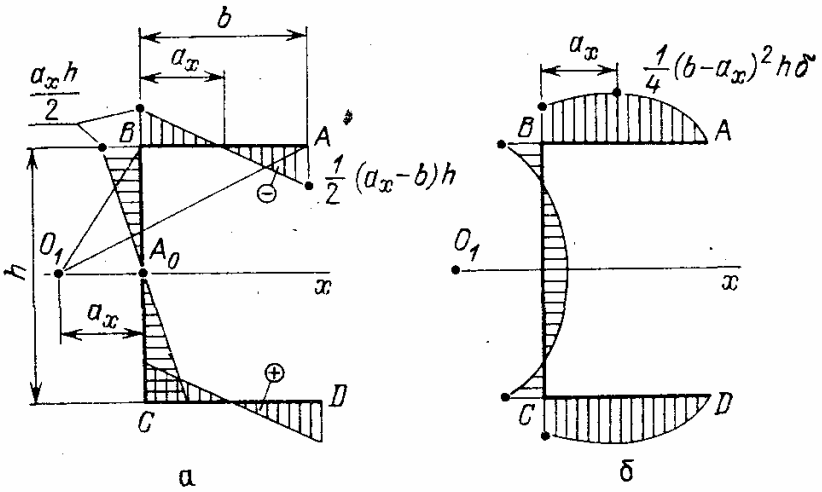


Рис. 10.25. Эпюры главной секториальной площади и секториального момента отсеченной части

Секториальная площадь в точке B равна удвоенной площади треугольника O_1A_0B:

$$\omega_B = \frac{1}{2} a_x h.$$

Значение $\omega_B > 0$, так как радиус-вектор точки средней линии, исходящий из центра жесткости, на пути A_0B поворачивается против часовой стрелки. На участке BA поворот радиуса-вектора получается по часовой стрелке; приращение секториальной площади, равное удвоенной площади треугольника O_1BA, оказывается отрицательным:

$$\omega_A = \frac{1}{2} a_x h - \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} (a_x - b) h.$$

Значение $\omega = 0$ на верхней полке соответствует расстоянию a_x от точки B. Отметим, что распределение ω характеризует распределение нормальных напряжений стесненного кручения.

Рассмотрим теперь секториальный статический момент отсеченной части:

$$S_\omega = \int_F \omega \, dF,$$

воспроизводящий распределение касательных напряжений стесненного кручения.

Величина S_ω представляет площадь эпюры ω, если начинать обход с точки A. Наибольшая величина S_ω получается после прохождения дуги $b - a_x$, так как на этом участке знак ω не изменяется:

$$S_{\omega\max} = -\frac{1}{4}(b - a_x)^2 h\delta.$$

В точке B значение S_ω представляет разность площадей треугольников с основаниями $b - a_x$ и a_x:

$$S_{\omega B} = -\frac{1}{4}(b - a_x)^2 h\delta + \frac{1}{4} a_x^2 h\delta.$$

Эпюра S_ω показана на рис. 10.25, *б*.

Определим секториальный момент инерции:

$$J_\omega = \int_F \omega^2 \, dF.$$

Для его аналитического определения удобно воспользоваться правилом Верещагина, умножая эпюру ω «на себя». Будем иметь

$$J_\omega = 2\left\{\frac{1}{2}\frac{a_x h}{2}\frac{h}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{a_x h}{2}\delta + \frac{1}{2}\frac{a_x h}{2}a_x\cdot\frac{2}{3}\frac{a_x h}{2}\delta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a_x - b)\,h\,(b - a_x)\cdot\frac{2}{3}\frac{(a_x - b)\,h\delta}{2}\right\} = \frac{a_x^2 h^3\delta}{12} + \frac{a_x^3 h^2\delta}{6} + \frac{(b - a_x)^3 h^2\delta}{6}.$$

Замечание. В современных расчетах геометрические характеристики сечений определяют путем численного интегрирования на ЭВМ. Для стандартных прокатных профилей секториальные характеристики указываются в справочниках.

39. Полупространственные модели стержня

Вводные замечания. В обычной теории стержней нормальные напряжения направлены вдоль оси стержня; нормальные напряжения, действующие «в плоскости сечения», т. е. перпендикулярно оси стержня, считаются отсутствующими (гипотеза о ненадавливании волокон стержня).

В некоторых случаях, например при неравномерном нагреве стержней с массивным поперечным сечением, пренебрегать указанными напряжениями нельзя.

Основные уравнения. Нормальные напряжения в поперечном сечении. Рассмотрим сначала стержень постоянного сечения, загруженный по торцам моментами и осевым усилием (рис. 10.26). Температурное поле по длине стержня не изменяется. В этих условиях можно считать напряжения и, следовательно, деформации постоянными по длине стержня.

Из уравнений совместности деформаций (см. разд. 11) после приравнивания нулю производных по z находим

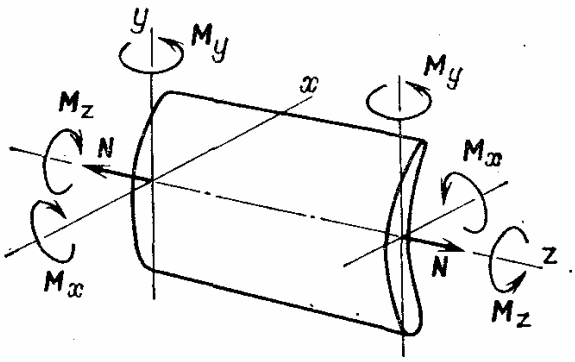


Рис. 10.26. Стержень с постоянными напряжениями по длине

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{111}$$

При постоянных по длине стержня напряжениях и деформациях осевая деформация ε_z распределяется по поперечному сечению по линейному закону относительно координат x и y:

$$\varepsilon_z = C_0 + C_1 x + C_2 y. \tag{112}$$

Соотношение (112) удовлетворяет условиям (111). В соответствии с принципом независимости действия сил кручение стержня можно рассматривать в пределах упругих деформаций отдельно, и в дальнейшем будем считать $M_z = 0$. При действии изгибающих моментов и осевой силы линейное распределение ε_z эквивалентно гипотезе плоских сечений.

В соответствии с гипотезой плоских сечений (см. разд. 29)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + \frac{d\varphi_x}{dz} y - \frac{d\varphi_y}{dz} x, \tag{113}$$

где параметры деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$, $d\varphi_y/dz$ в рассматриваемом случае — постоянные величины.

На основании обобщенного закона Гука имеем

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T. \tag{114}$$

Используя соотношение (113), находим

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right) - E\alpha T + \mu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{115}$$

Условия равновесия отсеченной части стержня

$$\int_F \sigma\, dF = N, \quad \int_F \sigma y\, dF = M_x, \quad \int_F \sigma x\, dF = -M_y \tag{116}$$

приводят к системе трех уравнений относительно параметров деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$ и $d\varphi_y/dz$.

Для главных осей сечения x, y, удовлетворяющих условиям

$$\int_F Ex\,dF = 0, \quad \int_F Ey\,dF = 0, \quad \int_F Exy\,dF = 0, \tag{117}$$

указанные уравнения существенно упрощаются.

После нахождения параметров деформации из равенства (115) получаем

$$\sigma_z = \sigma_и + \sigma_{тем} + \sigma_{доп}, \tag{118}$$

где изгибные напряжения $\sigma_и$ и температурные напряжения $\sigma_{тем}$ определяются прежними формулами (разд. 29), а дополнительные напряжения

$$\sigma_{доп} = -E\left(\frac{\int_F \mu(\sigma_x+\sigma_y)\,dF}{A} + \frac{y}{B_x}\int_F \mu(\sigma_x+\sigma_y)\,y\,dF + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{B_y}\int_F \mu(\sigma_x+\sigma_y)\,dF - \frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\right). \tag{119}$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня зависят от напряжений σ_x и σ_y, действующих «в плоскости поперечного сечения».

Напряжения в плоскости поперечного сечения. На рис. 10.27 показан элемент стержня, выделенный двумя поперечными сечениями на расстоянии dz друг от друга.

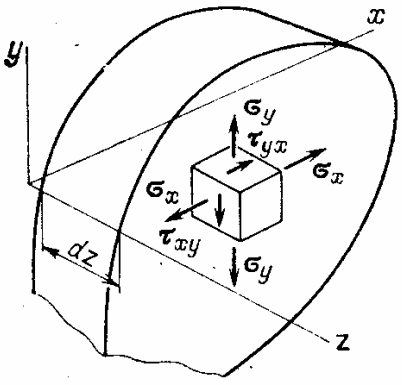


Рис. 10.27. Напряжения в плоскости поперечного сечения стержня

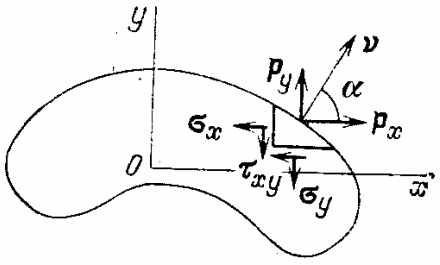


Рис. 10.28. Краевые условия для функции напряжений

Напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} будем для краткости называть напряжениями в плоскости поперечного сечения (точнее, напряжениями, векторы которых лежат в указанной плоскости). Так как напряжения не зависят от z и составляющие массовых сил отсут-

ствуют, то первые два уравнения равновесия будут удовлетворены, если положить

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \tag{120}$$

где $F = F(x, y)$ — функция напряжений.

Третье уравнение равновесия будет удовлетворено, так как напряжение σ_z постоянно по длине, а касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} отсутствуют (кручение стержня не рассматривается). Из соотношений упругости следует, что

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] + \alpha T - \mu\frac{\sigma_z}{E}, \tag{121}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \alpha T - \mu\frac{\sigma_z}{E}, \tag{122}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = -\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \tag{123}$$

Рассмотрим теперь уравнения совместности деформаций (см. разд. 11). Из первого уравнения и зависимостей (121)—(123) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1+\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = -\nabla^2(\alpha T) + \nabla^2\left(\mu\frac{\sigma_z}{E}\right), \tag{124}$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Все остальные уравнения совместности деформаций будут выполняться. Уравнение (124) представляет уравнение плоской задачи с дополнительным членом, зависящим от напряжения σ_z.

Краевые условия для функции напряжений вытекают из условий равновесия элемента, примыкающего к контуру стержня (рис. 10.28):

$$\sigma_x\cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) = p_x, \\ \sigma_y\cos(\nu, y) + \tau_{xy}\cos(\nu, x) = p_y, \tag{125}$$

где ν — вектор нормали к контуру; p_x, p_y — распределенная нагрузка на поверхности (в мегапаскалях); $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$ — косинусы углов между направлением ν и осями x и y. Нагрузки p_x и p_y должны быть постоянными по длине и самоуравновешенными. Ис-

пользуя зависимости (120), получаем краевые условия (в точках контура) для функции напряжений

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos(\nu, x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu, y) &= p_x,\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos(\nu, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu, x) &= p_y.\end{aligned} \tag{126}$$

Расчет стержней по полупространственной теории. Напряжения в стержнях описываются связанной системой уравнений (118) и (124) (в уравнение (118) входят $\mu(\sigma_x+\sigma_y)$, в уравнение (124) — величина $\mu\sigma_z/E$).

Для случая постоянного коэффициента μ уравнение плоской задачи (124) может быть решено независимо от уравнения (118). В большинстве практических задач допущение $\mu = \text{const}$ не вызывает существенной погрешности.

При постоянном μ из соотношения (118) получаем

$$\mu\nabla^2\left(\frac{\sigma_z}{E}\right) = \mu\left[-\nabla^2(\alpha T) + \mu\nabla^2\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{127}$$

Простой вид равенства (127) связан с тем, что формулы (118) содержат линейные члены относительно x и y, которые после двукратного дефференцирования исчезают. Внося значение (127) в уравнение (124), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) -\\ &\quad - \frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right] = -\frac{1}{1-\mu}\nabla^2(\alpha T).\end{aligned} \tag{128}$$

Наконец, при постоянном модуле упругости E из уравнения (128) находим

$$\nabla^4 F = -\frac{1}{1-\mu}\nabla^2(\alpha T), \tag{129}$$

где

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

— бигармонический оператор.

Уравнения (128) или (129) являются уравнениями плоской задачи теории упругости (задачи о плоской деформации) для области, представляющей собой поперечное сечение стержня.

После решения плоской задачи становятся известными значения σ_x и σ_y, которые подставляются затем в равенство (119). Получен-

ные результаты распространяются на приближенный расчет стержней переменного сечения при наличии поперечных нагрузок. Уравнения (118) и (128) используются для каждого сечения независимо от других, как это принято в обычной теории стержней.

Касательные напряжения изгиба определяются из уравнений равновесия.

Замечания. 1. Из приведенного решения следует, что напряжения в плоскости сечения связаны главным образом с действием неравномерного нагрева. Если коэффициент Пуассона постоянный и распределенные усилия на боковой поверхности отсутствуют, то в равномерно нагретом стержне $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ (однородное уравнение (128) при однородных краевых условиях имеет только нулевое решение).

2. Возникновение указанных напряжений при изменении коэффициента Пуассона в точках поперечного сечения не имеет практического значения ввиду их малости. Сказанное подтверждает используемую в обычной теории стержней гипотезу об одноосном напряженном состоянии, за исключением случаев неравномерного нагрева сечения стержня и (или) значительной (самоуравновешенной) поперечной нагрузки.

ГЛАВА 11

КОЛЬЦА

40. Изгиб колец

Вводные замечания. В технике часто используются кольца как силовые элементы конструкций (рис. 11.1). Они служат для подкрепления оболочек (силовые кольца, шпангоуты), особенно при передаче сосредоточенных усилий, и нередко представляют самостоятельные конструктивные элементы.

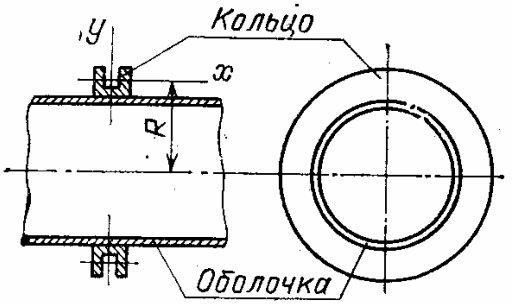


Рис. 11.1. Кольца как элементы конструкции

Рассмотрим замкнутые круговые кольца, у которых одна из главных осей поперечного сечения лежит в плоскости кольца. Будем считать, что нагрузки совпадают с главной осью и действуют в плоскости кольца и что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кольца.

Основные уравнения. Задача о замкнутом кольце под действием произвольной нагрузки (в плоскости кольца) является статически неопределимой задачей.

Разрезав кольцо в произвольном месте (рис. 11.2), получим статически определимую систему, в которой действуют три неизвестных силовых фактора: нормальное усилие X_1, перерезывающее усилие X_2 и изгибающий момент X_3.

Замкнутое кольцо является три раза статически неопределимой системой.

При определении перемещений будем использовать интеграл Мора

$$\delta = \int_l \frac{M_p M_1}{EJ_x}\,ds + \int_l \frac{N_p N_1}{EF}\,ds + \int_l \frac{KQ_pQ_1}{GF}\,ds, \qquad (1)$$

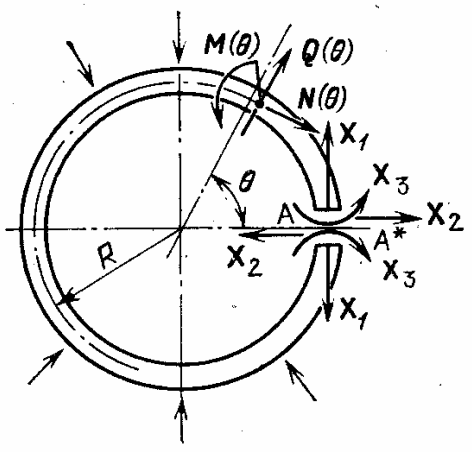


Рис. 11.2. Основная система при расчете колец

где M_p, N_p, Q_p — изгибающий момент, перерезывающая и нормальная силы от внешних нагрузок; M_1, N_1, Q_1 — то же от единичных силовых факторов; EJ_x, EF, GF — жесткости на изгиб, растяжение и сдвиг; K — коэффициент, зависящий от формы сечения.

Анализ показывает, что влиянием перерезывающих и нормальных сил для колец в большинстве случаев можно пренебречь.

В качестве основной системы принимаем кольцо, «разрезанное» в сечении A (рис. 11.2).

Составим канонические уравнения метода сил, считая относительные смещения точек A и A^* равными нулю:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \quad (2)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0, \quad (3)$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (2) выражает отсутствие относительного смещения разреза (в основной системе) в направлении силы X_1, уравнение (3) обращает в нуль взаимное смещение разреза в направлении силы X_2, наконец, уравнение (4) свидетельствует об отсутствии взаимного поворота разреза.

Для определения коэффициентов канонических уравнений (2)—(4) построим эпюры изгибающих моментов (рис. 11.3). Используя

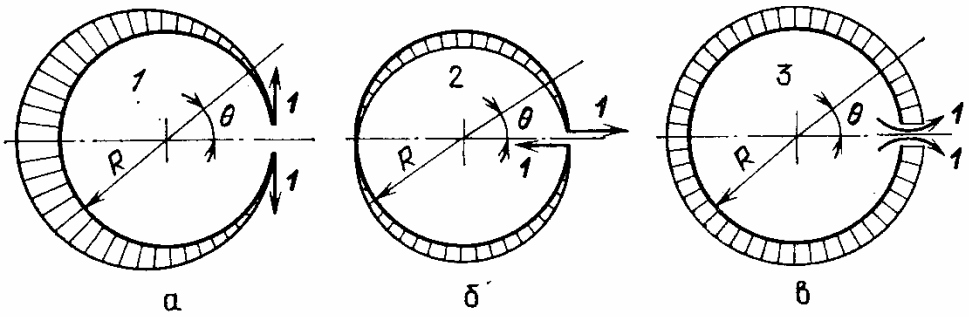


Рис. 11.3. Эпюры изгибающих моментов от единичных силовых факторов

свойства произведения симметричных и кососимметричных эпюр, находим

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Из уравнения (3) находим

$$X_2 = -\Delta_{2p}/\delta_{22}. \quad (5)$$

Уравнения (2) и (4) принимают вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \quad \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

и приводят к следующим значениям неизвестных силовых факторов:

$$X_1 = \frac{\Delta_{3p}\delta_{13} - \Delta_{1p}\delta_{33}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}, \quad X_2 = \frac{\Delta_{1p}\delta_{31} - \Delta_{3p}\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}. \quad (6)$$

Перейдем к вычислению коэффициентов влияния. Изгибающий момент в сечении под углом θ в эпюре M_1 (рис. 11.3, *а*)

$$M_{11}(\theta) = 1 \cdot R(1 - \cos\theta).$$

Изгибающие моменты будем считать положительными, если они уменьшают кривизну стержня (положительное направление $M(\theta)$ показано на рис. 11.2).

Изгибающие моменты в эпюрах *2* и *3* от единичных силовых факторов (рис. 11.3, *а*, *б*) равны

$$M_{12}(\theta) = 1 \cdot R \sin\theta, \quad M_{13}(\theta) = 1.$$

Далее вычисляем

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{11}^2 R\, d\theta = \frac{R^3}{EJ_x}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi R^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{11}M_{13} R\, d\theta = \frac{R^2}{EJ_x}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, d\theta = \frac{2\pi R^2}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{12}^2 R\, d\theta = \frac{R^3}{EJ_x}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi R^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{13}^2 R\, d\theta = \frac{R}{EJ_x}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi R}{EJ_x}.$$

Перемещения от внешних нагрузок составляют

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p M_{11} R\, d\theta = \frac{R^2}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p (1-\cos\theta)\, d\theta,$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p M_{12} R\, d\theta = \frac{R^2}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p \sin\theta d\theta,$$

$$\Delta_{13} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p M_{13} R\, d\theta = \frac{R}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p d\theta,$$

где $M_p(\theta)$ — изгибающий момент в сечении под углом θ в разрезанном кольце от внешних нагрузок.

Подставляя вычисленные значения в формулы (6), найдем после несложных преобразований

$$X_1 = \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\cos\theta\, d\theta, \tag{7}$$

$$X_2 = -\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{8}$$

$$X_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\, d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\cos\theta\, d\theta. \tag{9}$$

Изгибающий момент в сечении θ в замкнутом кольце

$$M(\theta) = M_p(\theta) + X_1 R(1-\cos\theta) + X_2 R\sin\theta + X_3. \tag{10}$$

Учитывая равенства (7) — (9), получим основную формулу

$$M(\theta) = M_p(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\,d\theta - \frac{\cos\theta}{\pi}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\cos\theta\,d\theta - \frac{\sin\theta}{\pi}\int_0^{2\pi} M_p(\theta)\sin\theta\,d\theta. \quad (11)$$

Изгибающий момент в сечении замкнутого кольца равен изгибающему моменту в разрезанном кольце за вычетом трех первых членов разложения этого момента в ряд Фурье. При вычислении интегралов можно пользоваться приближенными численными методами.

В равенстве (11) угол θ отсчитывается от сечения разреза, которое можно выбрать произвольным. Если внешние нагрузки имеют ось симметрии или ось асимметрии, то разрез целесообразно проводить по этим осям.

Для нагрузки, симметричной относительно линии разреза,

$$M(\theta) = M_p(\theta) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\theta)\,d\theta - \frac{2\cos\theta}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\theta)\cos\theta\,d\theta. \quad (12)$$

Для нагрузки, кососимметричной относительно линии разреза,

$$M(\theta) = M_p(\theta) - \frac{2\sin\theta}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\theta)\sin\theta\,d\theta. \quad (13)$$

Замечание. При раскрытии статической неопределимости кольца учитывались только изгибающие моменты. В некоторых случаях, например при действии на кольцо большого числа одинаковых радиальных сил, существенное значение приобретают нормальные усилия, и их следует учесть в равенстве (1). Это понятно, потому что при равномерном давлении на кольцо изгибающие моменты в нем отсутствуют и вся деформация происходит за счет усилий N.

Пример 1. Определить изгибающие моменты в кольце под действием сосредоточенных сил (рис. 11.4, *а*). Проведем разрез по оси симметрии и распределим нагрузку поровну по краям разреза (рис. 11.4, *б*).

Изгибающий момент в сечении под углом θ

$$M_p(\theta) = -\frac{1}{2}PR\sin\theta.$$

Применяя формулу (12), находим

$$\int_0^{\pi} M_p(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}PR\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = -PR,$$

$$\int_0^{\pi} M_p(\theta)\cos\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}PR\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0,$$

и окончательно

$$M(\theta) = PR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\theta\right).$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$.

$$M(\theta) = \frac{1}{\pi} PR = 0{,}318PR, \qquad M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) PR = -0{,}182PR.$$

Распределение изгибающих моментов показано на рис. 11.4, *в*.

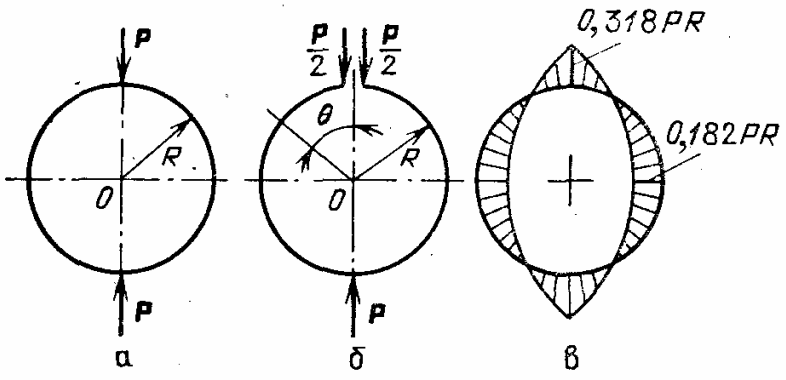


Рис. 11.4. Кольцо под действием сосредоточенных сил

Пример 2. Определить изгибающие моменты в кольце, загруженном двумя сосредоточенными моментами M (рис. 11.5, *а*). Проведем разрез по оси

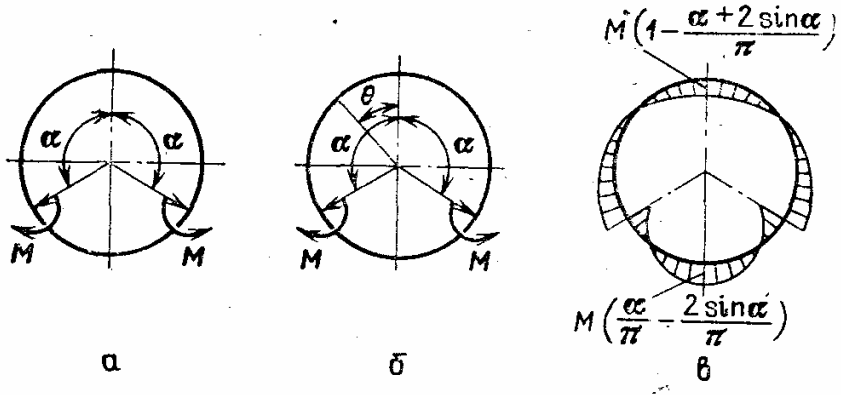


Рис. 11.5. Кольцо под действием сосредоточенных моментов

симметрии (рис. 11.5, *б*). Изгибающий момент в основной системе в сечении под углом θ

$$M_\varphi(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha; \\ -M, & \alpha < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Определяем

$$\int_0^\pi M_p(\theta)\,d\theta = -\int_\alpha^\pi M\,d\theta = -M(\pi - \alpha),$$

$$\int_0^\pi M_\varphi(\theta)\cos\theta\,d\theta = -M\int_\alpha^\pi \cos\theta\,d\theta = M\sin\alpha.$$

Далее по формуле (12) находим

$$M(\theta) = M_p(\theta) + M\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - \frac{2\cos\theta}{\pi} M \sin\alpha.$$

При $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$

$$M(\theta) = M\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - \frac{2\cos\theta}{\pi}\sin\alpha.$$

При $\alpha < \theta \leqslant \pi$

$$M(\theta) = -M\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2\cos\theta}{\pi}\sin\alpha\right).$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 11.5, *в*.

41. Осесимметричная деформация колец

Во многих конструкциях встречаются кольца, работающие при осесимметричном нагружении (рис. 11.6, *а*). Пусть на кольцо (рис. 11.6, *б*) действуют осевые и равномерно распределенные радиальные нагрузки: q_1, q_2, q_r.

Центр тяжести поперечного сечения кольца расположен на окружности радиусом r_0; ось x направлена в радиальном направлении. Рассмотрим равновесие половины кольца (рис. 11.7).

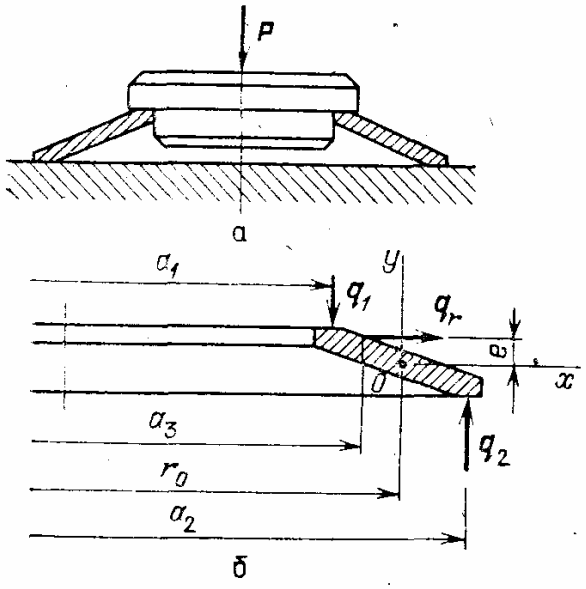


Рис. 11.6. *а* — осесимметричная деформация колец; *б* — нагрузки, приложенные к кольцу

Осевое усилие из условия равновесия равно

$$N = q_r a_3,$$

где a_3 — радиус окружности,

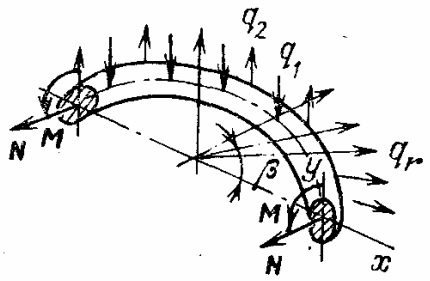


Рис. 11.7. Определение силовых факторов в сечении кольца

по которой равномерно распределены усилия q_r [сила/длина] (рис. 11.6, *б*).

Изгибающие моменты относительно оси x составляют

$$M = \int_0^{\pi/2} a_2 \sin\beta \cdot q_2 a_2 \, d\beta - \int_0^{\pi/2} a_1 \sin\beta \cdot q_1 a_1 \, d\beta - eq_r \int_0^{\pi/2} \cos\beta \cdot a_3 \, d\beta, \qquad (14)$$

где e — эксцентриситет приложения радиального усилия q_r. Пер-

вые два слагаемых правой части уравнения (14) в пояснениях не нуждаются; последнее слагаемое получается в результате проектирования момента, распределенного на дуге $a_3 d\beta$, на ось x. После интегрирования находим:

$$M = a_2^2 q_2 - a_1^2 q_1 - a_3 e q_r. \tag{15}$$

Осесимметричное нагружение приводит к появлению в поперечном сечении кольца осевого усилия и изгибающего момента.

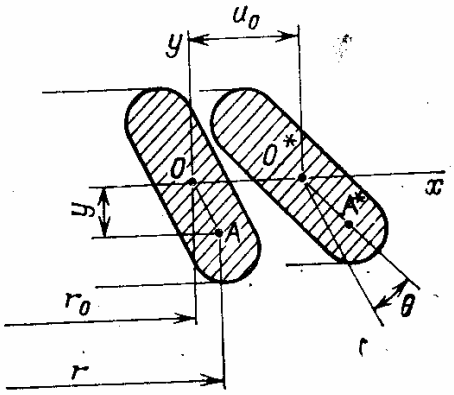


Рис. 11.8. Сечение кольца после деформации

Рассмотрим теперь деформации кольца. В приближенном решении будем пренебрегать деформацией сечения в своей плоскости, считая, что кольцо состоит из жестких шайб, связанных кольцевыми упругими нитями. В результате деформации центр тяжести кольца смещается на u_0, а сечение поворачивается на угол θ (рис. 11.8). Смещение точки A в радиальном направлении

$$u = u_0 - y\theta. \tag{16}$$

Деформация в кольцевом направлении

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} = \frac{u_0}{r} - y\frac{\theta}{r}, \tag{17}$$

где r — радиус окружности, проходящей через точку A. Размеры сечения кольца будем считать малыми по сравнению с радиусом окружности центров тяжести

$$r = r_0, \tag{18}$$

и тогда

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r_0} - y\frac{\theta}{r_0}. \tag{19}$$

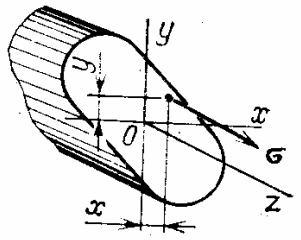


Рис. 11.9. Напряжения в поперечном сечении кольца

Предполагая напряженное состояние одноосным, получим в пределах упругих деформаций окружное напряжение (рис. 11.9)

$$\sigma = E(\varepsilon_\theta - \alpha T) = E\left(\frac{u_0}{r_0} - y\frac{\theta}{r_0} - \alpha T\right), \tag{20}$$

где αT — температурная деформация (α — коэффициент линейного расширения, T — температура).

Из условия равновесия следует, что

$$\int_F \sigma\, dF = N, \tag{21}$$

$$\int_F \sigma y\, dF = -M. \tag{22}$$

Подставляя в уравнения (21) и (22) величину σ из соотношения (20), получим при $E = \text{const}$

$$\frac{u_0}{r_0} E \int_F dF - E \int_F \alpha T \, dF = N, \tag{23}$$

$$\frac{\theta}{r_0} E \int_F y^2 dF + E \int_F y \alpha T \, dF = M, \tag{24}$$

так как

$$\int_F y \, dF = 0 \tag{25}$$

(ось x проходит через центр тяжести сечения).

Из уравнений (23) и (24) находим

$$\frac{u_0}{r_0} = \frac{N}{EF} + \frac{1}{F} \int_F \alpha T \, dF, \tag{26}$$

$$\frac{\theta}{r_0} = \frac{M}{EJ_x} - \frac{1}{J_x} \int_F y \alpha T \, dF. \tag{27}$$

Подставляя эти значения в равенство (20), получаем формулу для напряжений в кольце

$$\sigma = \frac{N}{F} - y \frac{M}{J_x} + E \left(\frac{1}{F} \int_F \alpha T \, dF + y \frac{\int y \alpha T \, dF}{J_x} - \alpha T \right). \tag{28}$$

Первая группа членов представляет напряжение в кольце от внешних сил, вторая — температурные напряжения.

Пример 1. Определить напряжение в элементах кольцевой пружины при действии осевой нагрузки (рис. 11.10). Распределенные усилия q_1, q_2 и осевая сила P связаны соотношением

$$P = 2\pi a_1 q_1 = 2\pi a_2 q_2. \tag{29}$$

Изгибающий момент в сечении кольца находим по формуле (15):

$$M = \frac{P}{2\pi} (a_2 - a_1). \tag{30}$$

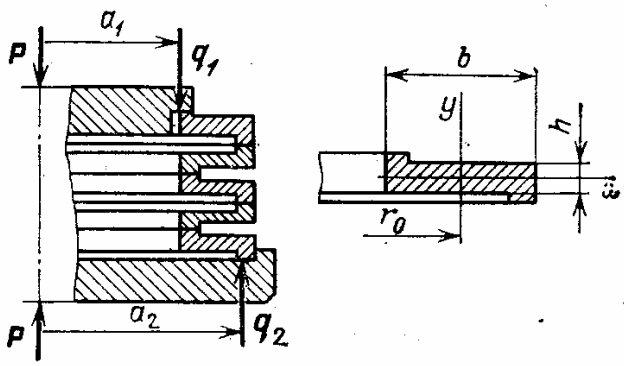


Рис. 11.10. Кольцевая пружина

Напряжения в элементах кольцевой пружины будут такими:

$$\sigma = -y \frac{P(a_2 - a_1)}{2\pi \cdot J_x} = -y \frac{6P(a_2 - a_1)}{\pi b h^3}.$$

Наибольшие напряжения при $y = \pm h/2$:

$$\sigma_{\max} = \frac{3P(a_2 - a_1)}{\pi b h^2}. \tag{31}$$

Растягивающие напряжения действуют при $y = -h/2$, сжимающие — при $y = +h/2$. Осадка кольца пружины

$$\delta_1 = \theta(a_2 - a_1).$$

Угол поворота кольца

$$\theta = \frac{Mr_0}{EJ_x} = \frac{6P(a_2 - a_1)r_0}{\pi E b h^3}.$$

Осадка всей пружины

$$\delta = z\delta_1 = z\frac{6P(a_2 - a_1)^2 r_0}{\pi E b h^3}. \qquad (32)$$

Для расчетного анализа и выбора размеров удобно использовать связь между осадкой пружины и максимальными напряжениями (формулы (31) и (32)):

$$\delta = 2z\sigma_{max}\frac{(a_2 - a_1)r_0}{h}. \qquad (33)$$

Для увеличения осадки пружины (при одинаковом уровне напряжений) надо увеличивать число колец z, уменьшить толщину кольца h.

Замечание. При сильном уменьшении толщины кольца h ($h < 0{,}2(a_2 - a_1)$) приближенное решение может оказаться не справедливым, так как предположение о жестком поперечном сечении кольца будет приводить к погрешностям. В таких случаях кольца следует рассчитывать по теории пластинок.

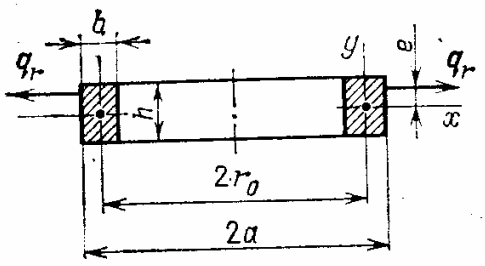


Рис. 11.11. Кольцо под действием радиальной нагрузки

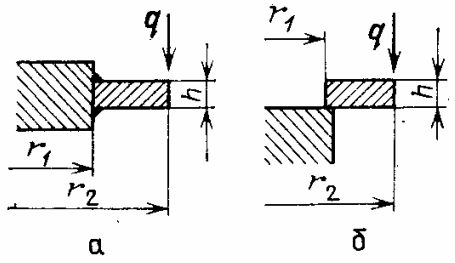


Рис. 11.12. Различные случаи закрепления кольца

Пример 2. Определить напряжения и перемещения в кольце прямоугольного сечения под действием радиальной нагрузки (рис. 11.11).

Силовые факторы в поперечном сечении кольца равны

$$N = aq_r, \quad M = -aeq_r.$$

Напряжения в кольце находим по формуле (28):

$$\sigma = \frac{aq_r}{F} + y\frac{aeq_r}{J_x} = \frac{aq_r}{bh} + y\frac{12aeq_r}{bh^3}. \qquad (34)$$

Радиальное смещение центра тяжести сечения кольца

$$u_0 = \frac{Nr_0}{EF} = \frac{aq_r r_0}{Ehb}.$$

Угол поворота поперечного сечения

$$\theta = -\frac{12aeq_r}{Ebh^3}.$$

Замечание о пределах применимости приближенного решения. Рассмотрим два различных случая закрепления кольца (рис. 11.12). В первом случае (рис. 11.12, *а*) кольцо приварено к массивной детали. Применение приближенного решения неоправдано — сечение кольца должно деформироваться. В этом случае окружными (кольцевыми) напряжениями можно пренебречь и рассматривать кольцо как ряд независимо изгибающихся стерженьков единичной толщины с высотой сечения h. Во втором случае (11.12, *б*) кольцо получает угол поворота; основные напряжения — окружные. В общем случае для расчета осесимметричной деформации колец используется теория круглых пластин.

ГЛАВА 12

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Динамические явления играют важнейшую роль в современной технике. Колебания элементов конструкций часто являются причиной разрушений и катастроф. При проектировании технической системы необходимо знать ее частотные характеристики и избегать динамического усиления внешних возбуждений. Основы теории колебаний излагаются в курсе теоретической механики. Однако колебания упругих систем, особенно систем с распределенными параметрами, имеют ряд особенностей, с которыми необходимо познакомиться.

42. Изгибные и продольные колебания стержней

Колебания груза, закрепленного на стержне (балке). Такая динамическая схема встречается при расчете фундаментных балок и стержней, крепящих тяжелые агрегаты (дизели, турбины и т. п.), и в ряде других случаев. Будем считать массу стержня малой по отношению к массе груза.

Рассмотрим сначала свободные колебания балки с грузом (рис. 12.1), вызванные случайным первоначальным отклонением.

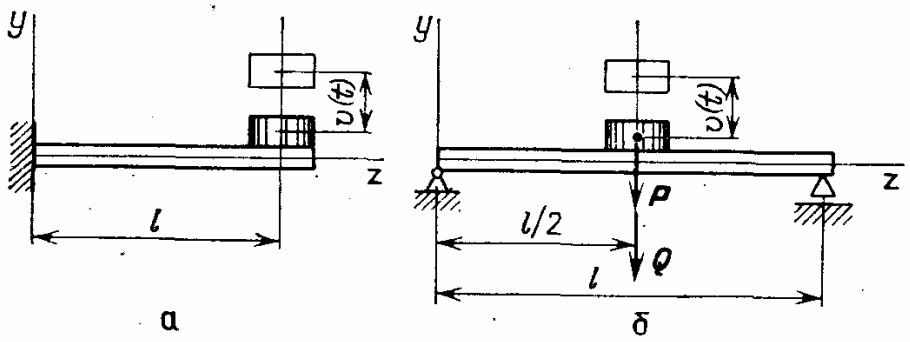


Рис. 12.1. Свободные колебания груза, закрепленного на стержне

В отклоненном положении, которое характеризуется смещением $v(t)$, зависящим от времени t, на груз действуют сила тяжести Q и сила упругости

$$F = \frac{1}{\delta_{11}} v(t), \tag{1}$$

где δ_{11} — прогиб балки в месте приложения груза (массы) от единичной силы.

Уравнение движения груза имеет вид

$$m \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\delta_{11}} v(t) - Q, \tag{2}$$

где $m = Q/g$ — масса груза.

Обозначая

$$p^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}, \tag{3}$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + p^2 v(t) = -\frac{Q}{m}. \tag{4}$$

Общий интеграл этого уравнения можно представить так:

$$v(t) = v(0)\cos pt + \frac{dv}{dt}(0)\frac{1}{p}\sin pt + v_{ст}(1 - \cos pt), \tag{5}$$

где $v_{ст} = -Q\delta_{11}$ — прогиб балки под действием силы веса; $v(0)$, $\frac{dv}{dt}(0)$ — начальное отклонение и скорость (при $t = 0$).

Пусть в начальный момент времени груз получил отклонение

$$v(0) = v_{ст} + v_0. \tag{6}$$

Тогда из соотношения (5), считая начальную скорость равной нулю, получим

$$v(t) = v_{ст} + v_0 \cos pt. \tag{7}$$

После начального отклонения система начинает совершать колебания *с круговой частотой* p, *амплитудой* v *относительно положения* статического равновесия (прогиба $v_{ст}$). В дальнейшем постоянные во времени силы не будут рассматриваться, следует только считать, что система совершает колебания относительно положения равновесия.

Замечание. Для дифференциального уравнения колебаний

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} - p^2 v(t) = f(t) \tag{8}$$

нормальными фундаментальными функциями (разд. 31) являются следующие:

$$v_1(t) = \cos pt, \qquad v_2(t) = \frac{1}{p}\sin pt, \tag{9}$$

и общее решение уравнения (8) примет вид

$$v(t) = v(0)\cos pt + \frac{dv}{dt}(0)\frac{1}{p}\sin pt + \frac{1}{p}\int_0^t \sin p(t - t_1) f(t_1) dt_1. \tag{10}$$

При $f(t) = -Q/m$ получаем решение (5).

Собственные колебания груза. Как известно, колебания условно разделяют на *свободные*, при которых внешние возбуждающие силы отсутствуют, и *вынужденные*, происходящие под действием переменных по времени внешних нагрузках. Силы трения в материале (внутреннее трение), в узлах сочленений (конструкционное демпфирование) и другие виды трения считаются всегда присутствующими. В силу этого свободные колебания — всегда затухающие.

Силы демпфирования обычно невелики и не сказываются на частоте и форме колебаний системы.

При анализе частот и форм колебаний рассматриваются свободные колебания без учета сил демпфирования. Такие колебания называются собственными. В расчетную модель собственных колебаний входят лишь силы инерции и силы упругости. Уравнение собственных колебаний груза (рис. 12.1) имеет вид

$$m\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{1}{\delta_{11}}v(t)=0. \tag{11}$$

Частное решение этого уравнения можно принять в виде

$$v(t)=v\cos pt, \tag{12}$$

где v — амплитуда колебания, p — круговая частота. Внося равенство (12) в уравнение (11), получаем

$$p=\frac{1}{\sqrt{\delta_{11}m}}. \tag{13}$$

Частота колебаний измеряется в герцах:

$$f=\frac{p}{2\pi}. \tag{14}$$

Период колебаний равен

$$T=\frac{2\pi}{p}=\frac{1}{f}. \tag{15}$$

Частота колебаний в соответствии с равенством (13) тем меньше, чем больше масса груза и упругая податливость системы.

Отметим важную для дальнейшего статическую аналогию упругих колебаний. Решение (12) приводит к тому, что уравнение (11) превращается в уравнение для амплитудных прогибов

$$-p^2mv+\frac{1}{\delta_{11}}v=0. \tag{16}$$

Его можно было написать сразу, если считать, что усилие, с которым колеблющаяся масса действует на балку, равно

$$F_{\text{и}}=p^2mv \tag{17}$$

и направлено в сторону прогиба.

Условие равновесия дает

$$p^2mv-\frac{1}{\delta_{11}}v=0,$$

т. е. уравнение (16).

Замечание. Величина v в решении (12) при собственных колебаниях остается неопределенной; она равна величине произвольного начального отклонения. Но частота колебаний не зависит от амплитуды (свойство изохронности малых колебаний). В нелинейных системах проявляется зависимость частоты колебаний от величины первоначального отклонения.

Вынужденные колебания груза. Пусть на сосредоточенную массу действует внешняя возбуждающая сила $P(t)$ (рис. 12.2):

$$P(t) = P\cos\omega t, \tag{18}$$

где ω — круговая частота возбуждающей силы.

Например, если масса представляет турбину с частотой вращения ротора n (об/мин), то при наличии неуравновешенности ротора возникнет возбуждающая сила с частотой

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi n_1, \tag{19}$$

где n_1 — число оборотов в секунду.

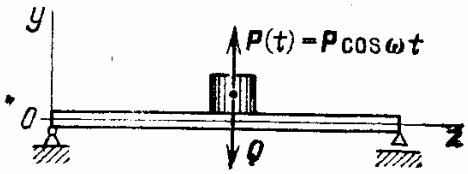


Рис. 12.2. Вынужденные колебания груза, закрепленного на стержне

Уравнение движения груза будет таким:

$$m\frac{d^2v(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\delta_{11}}v(t) + P\cos\omega t. \tag{20}$$

В системе возникнут собственные колебания, связанные с начальными условиями движения, которые вскоре затухают вследствие неизбежных сил трения. Вынужденные колебания соответствуют частному решению неоднородного уравнения (20), которое можно искать в виде

$$v(t) = v\cos\omega t. \tag{21}$$

Внося решение (21) в равенство (20), получаем

$$v = \frac{P\delta_{11}}{1-\omega^2/p^2} = \frac{v_0}{1-\omega^2/p^2}, \tag{22}$$

где $p = 1/\sqrt{\delta_{11}m}$ — круговая частота собственных колебаний, $v_0 = P\delta_{11}$ — отклонение системы под действием амплитудного значения возбуждающей силы при ее статическом приложении. Отношение

$$k_д = \left|\frac{v}{v_0}\right| = \frac{1}{|1-\omega^2/p^2|} \tag{23}$$

называется *коэффициентом динамического усиления.*

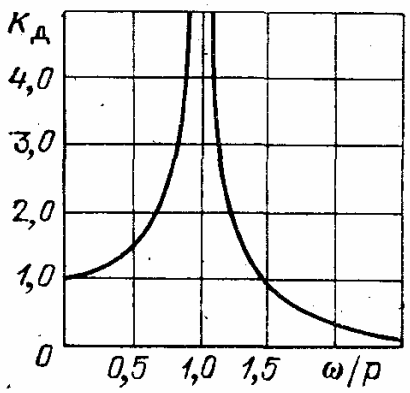


Рис. 12.3. Зависимость коэффициента динамического усиления от частоты возбуждающей силы

При совпадении частоты возбуждающей силы и частоты собственных колебаний наступает резонанс: прогиб балки $v \to \infty$, коэффициент динамического усиления $k_д \to \infty$. В действительных условиях амплитуда колебаний остается конечной, так как в системе неизбежно присутствуют силы трения, однако резонансные колебания могут представлять серьезную опасность для конструкции.

На рис. 12.3 показана зависимость коэффициента динамического усиления от частоты. Обычно рекомендуется исключать из зоны рабочих режимов частоту возбуждения $0{,}7p < \omega < 1{,}3p$.

Отметим, что очень высокие частоты колебаний не опасны для конструкции с низкой собственной частотой ($k_д \to 0$ при $\omega \to \infty$).

Замечание. Если на конструкцию действует возбуждающая сила с частотой ω, то конструкция испытывает стационарные колебания с этой же частотой. Вынужденные колебания конструкции происходят с частотой возбуждающей силы.

Собственные колебания стержня с несколькими сосредоточенными массами. Рассмотрим сначала колебания балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 12.4). Воспользуемся статической аналогией и будем считать, что в отклоненном положении на массы действуют усилия

$$F_1 = p^2 m_1 v_1, \quad F_2 = p^2 m_2 v_2,$$

где v_1, v_2 — амплитудные отклонения точек

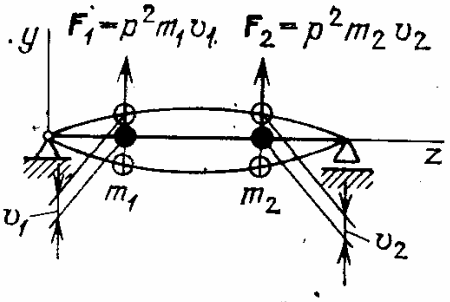


Рис. 12.4. Колебание упругой системы с двумя сосредоточенными массами

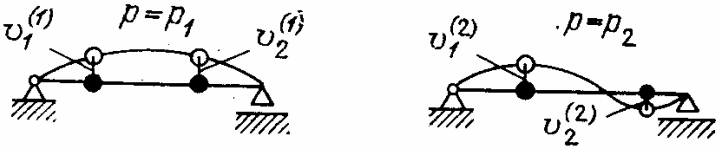


Рис. 12.5. Формы колебаний, соответствующие двум частотам колебаний двухмассовой системы

закрепления масс. Прогибы стержня под действием усилий F_1 и F_2 (рис. 12.5) равны

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 = \delta_{11}p^2m_1v_1 + \delta_{12}p^2m_2v_2, \\ v_2 &= \delta_{12}F_1 + \delta_{22}F_2 = \delta_{12}p^2m_1v_1 + \delta_{22}p^2m_2v_2, \end{aligned} \tag{24}$$

где δ_{ij} — коэффициенты влияния (прогиб в сечении i от единичной силы в сечении j; они определяются с помощью интеграла Мора).

Напомним, что коэффициенты влияния удовлетворяют условиям взаимности

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{25}$$

Равенства (24) приводят к системе однородных уравнений относительно v_1 и v_2:

$$\begin{aligned} (p^2\delta_{11}m_1 - 1)v_1 + p^2\delta_{12}m_2v_2 = 0, \\ p^2\delta_{12}m_1v_1 + (p^2\delta_{22}m_2 - 1)v_2 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Эту же систему можно получить другим путем, считая, что на стержень действуют силы инерции масс

$$F_1 = -m_1\frac{\partial^2 v_1(t)}{\partial t^2}, \quad F_2 = -m_2\frac{\partial^2 v_2(t)}{\partial t^2}.$$

Предполагая далее

$$v_1(t) = v_1 \cos pt, \quad v_2(t) = v_2 \cos pt,$$

получаем соотношения (24).

Однородная система уравнений (26) будет иметь отличное от нуля решение в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} p^2\delta_{11}m_1 - 1 & p^2\delta_{12}m_2 \\ p^2\delta_{12}m_1 & p^2\delta_{22}m_2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Из условия (27) получаем характеристическое уравнение для определения частот колебаний

$$p^4 m_1 m_2 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) - p^2 (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0. \tag{28}$$

Из этого уравнения относительно p находим два значения круговой частоты:

$$p_1^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 - \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}, \tag{29}$$

$$p_2^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 + \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \tag{30}$$

Низшей частоте p_1 соответствует первая форма колебания, когда обе массы двигаются в одну сторону; частоте p_2 отвечает движение грузов в разные стороны (вторая форма колебаний, рис. 12.5).

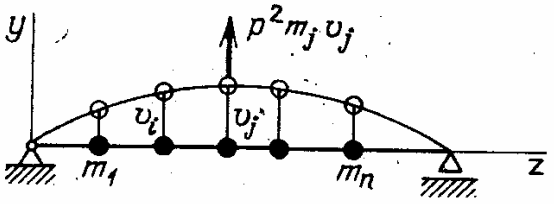


Рис. 12.6. Колебание многомассовой системы

Если определитель системы уравнений равен нулю, то соотношение между прогибами v_1 и v_2 при данной частоте можно получить из любого (одного) уравнения системы (26). Например, из первого уравнения находим

$$\frac{v_1^{(1)}}{v_2^{(1)}} = -\frac{p_1^2\delta_{12}m_2}{p_1^2\delta_{11}m_1 - 1}, \quad \frac{v_1^{(2)}}{v_2^{(2)}} = -\frac{p_2^2\delta_{12}m_2}{p_2^2\delta_{11}m_1 - 1}. \tag{31}$$

Величина отклонений при данной частоте колебаний остается неопределенной, но соотношение амплитудных прогибов масс — форма колебаний — строго определено равенствами (31).

Рассмотрим теперь колебания упругой системы с n сосредоточенными массами (рис. 12.6).

Амплитудный прогиб i-й массы

$$v_i = p^2\delta_{i1}m_1v_1 + p^2\delta_{i2}m_2v_2 + \ldots + p^2\delta_{ij}m_jv_j + \ldots + p^2\delta_{in}m_nv_n. \tag{32}$$

Составляя выражения прогиба для всех масс ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), придем к системе однородных уравнений, которую представим в

матричной форме:

$$(p^2[\delta_{ij}m_j] - [E])\{v\} = 0, \tag{33}$$

где

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

— единичная матрица порядка n, $\{v\}^{\mathrm{T}} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — вектор амплитудных прогибов.

Частотное уравнение получается после приравнивания нулю определителя системы:

$$|p^2[\delta_{ij}m_j] - [E]| = 0. \tag{34}$$

Уравнение (34) дает значения n собственных частот колебаний $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$, и каждой частоте соответствует своя форма колебаний. Если в определителе уравнения (34) сохранить только члены, стоящие на главной диагонали, то получается приближенная зависимость для первой частоты

$$\frac{1}{p_1^2} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_{(i)}^2}, \tag{35}$$

где $p_{(i)}^2 = 1/(\delta_{ii}m_i)$ — частота колебания системы (балки) при наличии только одной массы m_i. Формула (35) дает обычно хорошее приближение для первой частоты, меньшее действительного значения. Отметим, что $p_1 < p_{(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержней. Рассмотрим теперь непрерывное распределение массы; пусть

$$m = \rho F \tag{36}$$

— масса, приходящаяся на единицу длины стержня (ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения стержня).

При изгибных колебаниях на единицу длины стержня действует распределенная нагрузка q:

$$q = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{37}$$

Уравнение изгибных колебаний можно получить из основного уравнения изгиба стержней (см. разд. 31)

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = q_y(z), \tag{38}$$

где q_y — интенсивность распределенной нагрузки (рис. 12.7). При-

менительно к колебаниям величина q_y определяется равенством (37). Прогиб оси стержня $v(z, t)$ зависит теперь не только от z, но и от времени t, и потому в уравнение (38) должны входить частные производные

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ_x(z)\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right) = -\rho F\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}. \tag{39}$$

При анализе собственных колебаний предположим

$$v(z, t) = v(z)\cos pt, \tag{40}$$

где p — круговая частота колебаний, $v(z)$ — амплитудное значение прогиба при колебаниях. С помощью соотношения (40) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2 v(z)}{dz^2}\right) - p^2\rho F(z)\,v(z) = 0. \tag{41}$$

Этот результат можно было сразу получить из статической аналогии, положив

$$q = p^2\rho F v. \tag{42}$$

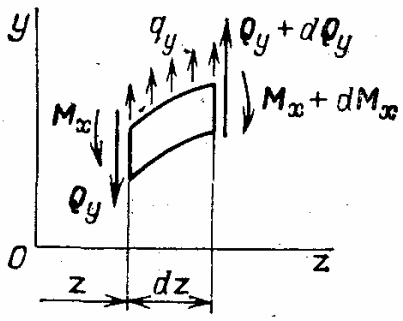


Рис. 12.7. К выводу уравнения колебаний стержня

Изгибные колебания стержней постоянного сечения. Для стержней постоянного сечения при колебании в главной плоскости yOz (рис. 12.8) уравнение изгибных колебаний (41) будет таким:

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} - p^2\frac{\rho F}{EJ_x}v(z) = 0. \tag{43}$$

Рассмотрим в качестве примера балку, закрепленную по концам на двух шарнирных опорах (см. рис. 12.8).

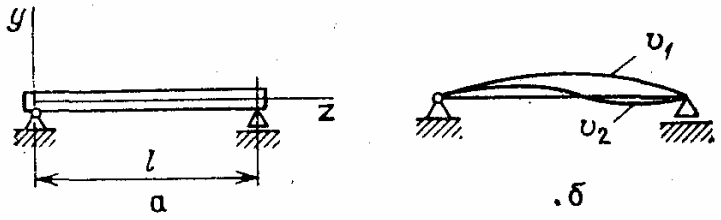


Рис. 12.8. Колебания стержня постоянного сечения: *а* — расчетная схема; *б* — две первые формы колебаний

Краевые условия для амплитудного прогиба таковы:

$$v(0) = v(l) = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2}(0) = \frac{d^2 v}{dz^2}(l) = 0, \tag{44}$$

т. е. прогибы и изгибающие моменты на концах балки отсутствуют.

Уравнению (43) и условиям (44) соответствует функция

$$v(z) = v \sin\left(k \frac{\pi}{l} z\right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{45}$$

Внося выражение (45) в уравнение (43), находим

$$p^2 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{EJ_x}{\rho F}.$$

Каждому значению k соответствует определенная частота колебаний

$$p_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{46}$$

Наименьшая круговая частота колебаний получается при $k = 1$:

$$p_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{47}$$

Первая частота колебаний (в герцах) равна

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{48}$$

Из формул (45) и (46) вытекают выводы, справедливые и при других условиях закрепления стержня. Система с непрерывным распределением масс имеет бесчисленное количество частот и форм колебаний. Каждой собственной частоте p_k соответствует своя форма колебаний v_k. Спектр собственных частот упругой системы — дискретный, как это следует из равенства (46). Разберем общее решение уравнения (43), которое запишем в виде

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} - \lambda^4 v(z) = 0, \quad \lambda^4 = p^2 \frac{\rho F}{EJ_x}. \tag{49}$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что функции

$$v_1 = \cos \lambda z, \quad v_2 = \sin \lambda z, \quad v_3 = \operatorname{ch} \lambda z, \quad v_4 = \operatorname{sh} \lambda z$$

являются частными решениями уравнения (49). Из них можно составить нормальные фундаментальные функции (функции Крылова)

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \lambda z + \cos \lambda z), \quad V_2(z) = \frac{1}{2\lambda}(\operatorname{sh} \lambda z + \sin \lambda z), \\ V_3(z) &= \frac{1}{2\lambda^2}(\operatorname{ch} \lambda z - \cos \lambda z), \quad V_4(z) = \frac{1}{2\lambda^3}(\operatorname{sh} \lambda z - \sin \lambda z), \end{aligned} \tag{50}$$

удовлетворяющие условию

$$\frac{d^j V_i}{dz^j}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq i - 1, \\ 1, & j = i - 1. \end{cases} \tag{51}$$

Например,

$$V_1(0)=1,\quad \frac{dV_1}{dz}(0)=0,\quad \frac{d^2V_1}{dz^2}(0)=0,\quad \frac{d^3V_1}{dz^3}(0)=0;$$

$$V_2(0)=0,\quad \frac{dV_2}{dz}(0)=1,\quad \frac{d^2V_2}{dz^2}(0)=0,\quad \frac{d^3V_2}{dz^3}(0)=0.$$

Общее решение уравнения (49) будет таким:

$$v(z)=v(0)V_1(z)+\frac{dv}{dz}(0)V_2(z)+\frac{d^2v}{dz^2}(0)V_3(z)+\frac{d^3v}{dz^3}(0)V_4(z). \quad (52)$$

Начальные параметры $v(0)$, $v'(0)$, ... определяются из краевых условий. Для определения частоты получается определитель второго порядка; два из четырех краевых факторов известны заранее.

Изгибные колебания балки переменного сечения. Решение с помощью интегральных уравнений. Уравнение изгибных колебаний запишем в виде

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right)=p^2\rho F(z)v(z). \quad (53)$$

Из соотношений (29) и (30) разд. 31 следует

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right)=-Q_y(z), \quad (54)$$

$$EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}=-M_x(z), \quad (55)$$

где $Q_y(z)$, $M_x(z)$ — амплитудные значения перерезывающей силы и изгибающего момента при колебаниях балки (рис. 12.9).

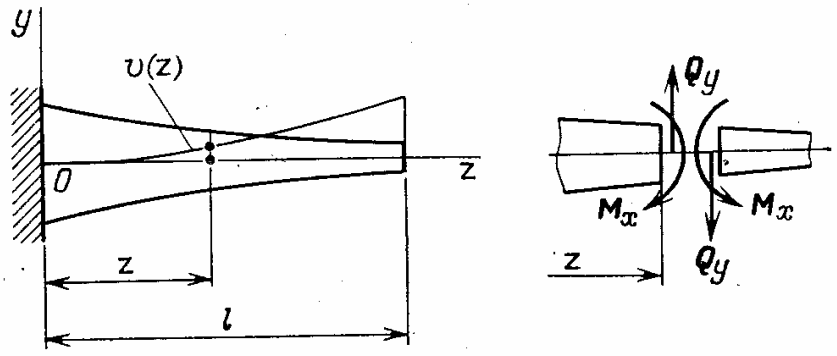


Рис. 12.9. Изгибные колебания стержней переменного сечения

Уравнение (53) может быть приведено к форме интегрального уравнения, что дает ряд преимуществ для приближенного решения. Проинтегрируем уравнение (53) в пределах от z до l. Учтем, что

перерезывающая сила при $z = l$ отсутствует. Получим

$$-\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = p^2\int_z^l \rho F(z_1)\,v(z_1)\,dz_1. \tag{56}$$

Повторим операцию с учетом условия $M_x(l) = 0$:

$$EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2} = p^2\int_z^l\int_{z_1}^l \rho F(z_2)\,v(z_2)\,dz_2\,dz_1.$$

Теперь, перенося $EJ_x(z)$ в правую часть равенства и дважды интегрируя от 0 до z, с учетом условий

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0 \tag{57}$$

получаем интегральное уравнение колебаний консольного стержня

$$v(z) = p^2\int_0^z\int_0^{z_1}\frac{1}{EJ_x(z_2)}\int_{z_2}^l\int_{z_3}^l \rho F(z_4)\,v(z_4)\,dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1. \tag{58}$$

Это — однородное краевое интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению и соответствующим краевым условиям. Оно называется интегральным потому, что неизвестная функция входит под знак интеграла (в дифференциальном уравнении неизвестная функция подчиняется операциям дифференцирования). В кратком виде уравнение (58) записывается так:

$$v = p^2Kv, \tag{59}$$

где Kv — интегральный оператор, входящий в правую часть уравнения (58).

Легко видеть, что если $v(z)$ является решением уравнения, то функция $Cv(z)$, где C — произвольное число, также представляет его решение (амплитудные прогибы при собственных колебаниях задаются с точностью до множителя).

Уравнение (59) имеет решение $v \equiv 0$, которое называется тривиальным, но при некоторых значениях $p^2 = p_1^2, p_2^2, \ldots$ оно имеет отличные от нуля решения. Каждому значению $p_1^2, p_2^2, \ldots$, которые называются *собственными значениями* уравнения (оператора), соответствуют решения $v_1, v_2, \ldots$ — формы колебаний стержня (собственные функции).

Для отыскания первой собственной частоты применяется *метод последовательных приближений*. Задаемся произвольно первым приближением для формы колебаний, например

$$v_{(1)} = (z/l)^2. \tag{60}$$

Следующее приближение находим из уравнения (59) по схеме

$$v_{(2)} = p_{(1)}^2 Kv_{(1)}. \tag{61}$$

Если бы $v_{(1)}$ было точным решением, то функции $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$ совпадали бы во всех сечениях. Найдем величину $p_{(1)}$ из условия, что значения $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$ совпадают на конце стержня, где прогибы наибольшие.

Из условия $v_{(2)}(l) = v_{(1)}(l) = 1$ получаем

$$p^2_{(1)} = \frac{1}{Kv_{(1)}|_{z=l}} = \frac{1}{\int_0^l \int_0^{z_1} \frac{1}{EJ_x} \int_{z_2}^l \int_{z_3}^l \rho F \frac{z_4^2}{l^2} dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1}. \qquad (62)$$

Обычно уже первое приближение дает погрешность не более 2—5%.

Можно показать, что процесс последовательных приближений всегда сходится к первой собственной частоте. Получение таким способом последующих частот и форм колебаний требует проведения процесса ортогонализации.

Решение с помощью матричного уравнения. Примем в качестве основных переменных следующие функции (см. разд. 31):

$$Y_1(z) = v(z), \quad Y_2(z) = \frac{dv(z)}{dz}, \quad Y_3(z) = M_x(z), \quad Y_4(z) = Q_y(z) \qquad (63)$$

и представим уравнение (53) в виде системы четырех уравнений первого порядка, учитывая, конечно, соотношения (54) и (55):

$$Y_1'(z) = Y_2(z), \quad Y_2'(z) = -\frac{1}{EJ_x(z)} Y_3(z), \qquad (64)$$

$$Y_3'(z) = Y_4(z), \quad Y_4'(z) = -p^2 \rho F(z) Y_1(z),$$

где штрих, как и раньше, означает дифференцирование по z.

В матричной форме уравнения будут такими:

$$\{Y\}' = [A]\{Y\}, \qquad (65)$$

где вектор состояния

$$\{Y\}^T = \{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4\} = \{v,\ v',\ M_x,\ Q_y\}; \qquad (66)$$

матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p^2\rho F & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (67)$$

Расчет частот и форм колебаний покажем на примере колебаний консольного стержня. Задаемся сначала некоторым значением частоты p; тогда все элементы матрицы A становятся известными.

Учитывая условия (57), найдем два частных решения ($\{\Phi_3(z)\}$ и $\{\Phi_4(z)\}$) уравнения (65) при начальных условиях

$$\Phi_3(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_4(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \qquad (68)$$

Интегрирование уравнения (65) проводим одним из численных методов, например методом Рунге — Кутта. Общее решение уравнения (65) можно представить в виде

$$\{Y(z)\} = \begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Vmatrix} = C_3\{\Phi_3(z)\} + C_4\{\Phi_4(z)\} = C_3 \begin{Vmatrix} \Phi_{31} \\ \Phi_{32} \\ \Phi_{33} \\ \Phi_{34} \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} \Phi_{41} \\ \Phi_{42} \\ \Phi_{43} \\ \Phi_{44} \end{Vmatrix}, \quad (69)$$

поскольку краевые условия при $z = 0$ удовлетворены выбором начальных условий (68).

Так как в концевом сечении $Y_3(l)$ и $Y_4(l)$ обращаются в нуль, то

$$\begin{aligned} Y_3(l) &= C_3\Phi_{33}(l;\ p^2) + C_4\Phi_{43}(l;\ p^2) = 0, \\ Y_4(l) &= C_4\Phi_{34}(l;\ p^2) + C_4\Phi_{44}(l;\ p^2) = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

В записи уравнений (70) подчеркивается зависимость от p^2, так как эта величина входит в матрицу $[A]$. Из условия существования решения (70) получим

$$F(p^2) = \begin{vmatrix} \Phi_{33}(l;\ p^2) & \Phi_{43}(l;\ p^2) \\ \Phi_{34}(l;\ p^2) & \Phi_{44}(l;\ p^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (71)$$

Так как выбранное заранее значение p^2 не удовлетворяет условию (71), то расчет проводят заново и находят значения $p_1^2, p_2^2, \ldots$ — корни уравнения (71). Это и будут частоты колебаний стержня.

Применение вариационного метода для определения частот и форм изгибных колебаний стержня. Ранее было получено вариационное уравнение изгиба стержня в виде (разд. 36)

$$\delta\Pi = 0, \quad (72)$$

где

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz - \int_0^l q_y v\,dz. \quad (73)$$

Возможная работа внешних сил при вариации прогиба равна

$$\delta W = \int_0^l q_y \delta v\,dz.$$

Для задачи о колебаниях стержня

$$q_y = p^2\rho F v,$$

вариация возможной работы

$$\delta W = p^2\int_0^l \rho F v\delta v\,dz.$$

Возможная работа внешних сил

$$W = \frac{p^2}{2}\int_0^l \rho F v^2\, dz. \tag{74}$$

По физическому смыслу величина W представляет амплитудное значение кинетической энергии при колебаниях стержня. Полная потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz - \frac{1}{2}p^2\int_0^l \rho F v^2\, dz. \tag{75}$$

Величина П равна разности между потенциальной энергией деформации и ее кинетической энергией. Наиболее простое решение по методу Рэлея — Ритца получается для одного параметра, когда предполагается

$$v = c_1 f_1(z), \tag{76}$$

где $f_1(z)$ — заранее выбранная функция из числа допустимых.

Например, для консольного стержня можно принять

$$f_1(z) = z^2/l^2. \tag{77}$$

Более точные результаты, но несколько более сложные вычисления получаются, если принять $f_1(z)$ пропорциональной прогибу консольного стержня постоянной толщины при действии равномерной статической нагрузки:

$$f_1(z) = \frac{z^2}{l^2} - \frac{2}{3}\frac{z^3}{l^3} + \frac{1}{6}\frac{z^4}{l^4}. \tag{78}$$

В этом случае выполняются не только необходимые (кинематические) условия при $z = 0$:

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 0,$$

но и (силовые) краевые условия при $z = l$:

$$f_1''(l) = 0, \quad f_1'''(l) = 0.$$

В соответствии с методом Рэлея — Ритца частота колебаний находится из уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{\partial}{\partial c_1}\frac{1}{2}\left\{c_1^2\int_0^l EJ_x(f_1'')^2\, dz - c_1^2p^2\int_0^l \rho F f_1^2\, dz\right\} = 0, \tag{79}$$

отсюда

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ_x(f_1'')^2\, dz}{\int_0^l \rho F f_1^2\, dz}. \tag{80}$$

Метод Рэлея — Ритца всегда дает несколько завышенное значение частоты колебаний, так как он накладывает дополнительные связи на систему. Наиболее точное решение по формуле (80) дает функция, обеспечивающая минимум p. Формулу (80) часто называют *формулой Рэлея*. Высокую точность расчета дает использование нескольких параметров при аппроксимации прогиба функцией

$$v = \sum_{j=1} c_j f_j(z). \tag{81}$$

Полная потенциальная энергия деформации равна

$$\Pi = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l EJ_x\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j''(z)\right)^2 dz - p^2\int_0^l \rho F\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j(z)\right)^2 dz\right\}. \tag{82}$$

Из вариационного уравнения

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial c_1}\delta c_1 + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial c_n}\delta c_n = 0$$

следует

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{83}$$

что и образует систему n линейных однородных уравнений для определения $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Частная производная полной потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_i} = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j''(z) f_i''(z)\right)dz - \\ - p^2\int_0^l \rho F\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j(z)\right) f_i(z)\,dz, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В матричной форме имеем

$$([\alpha_{ij}] - p^2[\beta_{ij}])\{c\} = 0, \tag{84}$$

где элементы матрицы для i-й строки и j-го столбца равны

$$\alpha_{ij} = \int_0^l EJ_x f_i'' f_j''\,dz, \quad \beta_{ij} = \int_0^l \rho F f_i f_j\,dz, \\ \{c\}^T = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}. \tag{85}$$

Из условия равенства нулю определителя системы:

$$F(p^2) = |[\alpha_{ij}] - p^2[\beta_{ij}]| = 0 \tag{86}$$

находим значения частоты $p_1^2, p_2^2, \ldots$

Например, при двух членах ряда (81) уравнение (86) будет таким:

$$F(p^2) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - p^2\beta_{11} & \alpha_{12} - p^2\beta_{12} \\ \alpha_{21} - p^2\beta_{21} & \alpha_{22} - p^2\beta_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{87}$$

Отметим, что коэффициенты α_{ij} и β_{ij} обладают свойством симметрии:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}; \quad \beta_{ij} = \beta_{ji},$$

что вытекает из равенств (85).

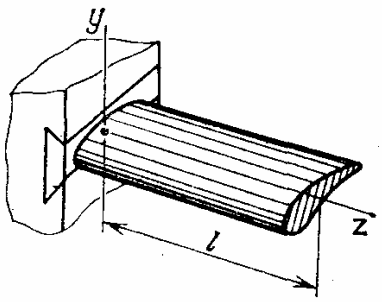


Рис. 12.10. Определение частоты изгибных колебаний лопатки компрессора

Динамическая модель лопатки осевого компрессора при изгибных колебаниях. Резонансные колебания лопаток являются одной из главных причин разрушения компрессоров. Динамическая модель лопатки должна обеспечить отсутствие резонанса при колебаниях по первой форме на максимальных оборотах. Сначала требуется найти частоту изгибных колебаний лопатки. Лопатка осевого компрессора жестко закрепляется в ободе диска замком типа «ласточкин хвост» (рис. 12.10).

В качестве динамической модели принимаем консольный стержень переменного сечения. Для построения приближенной модели сечение лопатки можно считать постоянным. Для определения первой частоты изгибных колебаний будем использовать метод интегральных уравнений.

По формуле (61) вычислим

$$p_{(1)}^2 = \frac{1}{Kv_{(1)}|_l} = \frac{1}{\dfrac{\rho F}{EJ_x}\dfrac{1}{l^2}\displaystyle\int_0^l\int_0^{z_1}\int_{z_2}^l\int_{z_3}^l z_4^2\, dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1}, \tag{88}$$

что соответствует первому приближению

$$v_{(1)} = z^2/l^2.$$

Последовательно находим

$$Kv_{(1)} = \frac{\rho F}{EJ_x}\frac{1}{l^2}\int_0^z\int_0^{z_1}\int_{z_2}^l\int_{z_3}^l z_4^2\, dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1 =$$

$$= \frac{\rho F}{EJ_x}\frac{1}{l^2}\int_0^z\int_0^{z_1}\left(\frac{1}{4}l^4 - \frac{1}{3}l^3 z_2 + \frac{1}{12}z_2^4\right) dz_2\, dz_1,$$

или

$$Kv_{(1)} = \frac{\rho F}{EJ_x}\frac{1}{l^2}\left(\frac{1}{8}l^4 z^2 - \frac{1}{18}l^3 z^3 + \frac{z^6}{360}\right).$$

Значение $Kv_{(1)}$ при $z = l$ составляет

$$Kv_{(1)}|_l = \frac{13}{180}\frac{\rho F}{EJ_x}l^4.$$

Первое приближение для круговой частоты изгибных колебаний равно

$$p_1^2 = \frac{180}{13}\frac{EJ_x}{\rho F}\frac{1}{l^4} = 13{,}85\frac{EJ_x}{\rho F}\frac{1}{l^4}, \quad p_1 = 3{,}72\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}.$$

Для дальнейшего уточнения вычисляем

$$v_{(2)} = p_{(1)}^2 Kv_{(1)} = \frac{1}{Kv_{(1)}|_l}Kv_{(1)} = \frac{180}{13}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \frac{1}{18}\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \frac{1}{360}\left(\frac{z}{l}\right)^6\right]$$

и второе приближение

$$p_{(2)}^2 = \frac{1}{Kv_{(2)}|_l} = 12{,}32\frac{EJ_x}{\rho F}\frac{1}{l^4}, \quad p_{(2)} = 3{,}51\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}.$$

Для третьего приближения

$$p_{(3)} = 3{,}5199\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}},$$

что совпадает с точным решением.

Величину $Kv_{(2)}$ удобнее вычислить численным интегрированием, разбив длину лопатки на 10—20 участков.

Применим теперь для определения частоты изгибных колебаний формулу Рэлея при

$$f_1(z) = z^2/l^2.$$

Тогда

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ_x\left(\frac{2}{l^2}\right)^2 dz}{\int_0^l \rho F\frac{z^4}{l^4}dz} = 20\frac{EJ_x}{\rho F}\frac{1}{l^4}, \quad p = 4{,}47\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}.$$

Результат первого приближения получился довольно грубым. В рассматриваемом примере (стержень постоянного сечения) точное значение получается с помощью решения (52):

$$p = 3{,}52\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}.$$

Результат расчета по формуле Рэлея можно улучшить, определяя $f_1(z)$ по формуле (78), что дает

$$p = 3{,}530\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}.$$

После определения собственной частоты колебания лопатки по первой форме перейдем к определению резонансной частоты вращения для лопатки компрессора. Частота возбуждающих сил $f_{\text{возб}}$ в компрессорах, турбинах и других турбомашинах оказывается кратной числу оборотов:

$$f_{\text{возб}} = kn_1, \qquad (89)$$

где n_1 — число оборотов ротора в секунду; k — целое (положительное) число, характеризующее кратность возбуждения (гармоника). Если перед лопаткой имеются три стойки опоры, то опасное возбуждение может иметь третью кратность ($k = 3$). В общем случае в машинах имеются все гармоники возбуждения ($k = 1, 2, 3, \ldots$), так как неравномерность газового потока, температуры и т. п. представляется рядом Фурье с достаточно большим числом членов. Условие резонанса для изгибных колебаний лопаток состоит в следующем:

$$f = kn_1, \qquad (90)$$

где f — частота изгибных колебаний лопатки (в герцах).

Динамическую модель лопатки часто представляют в виде диаграммы возбуждения (рис. 12.11). На рис. 12.11 штриховой полосой обозначены частоты колебаний лопаток в колесе. Они имеют разброс 5—10% в результате технологических отклонений геометрии сечения лопаток (частоты лежат в пределах $330 < f < 360$ Гц). Максимальная частота вращения ротора компрессора равна 8000 об/мин. Из диаграммы видно, что при максимальной частоте резонанс отсутствует, что и составляло условие проектирования. Резонансы возможны на меньших частотах; уровень переменных напряжений при резонансных режимах проверяется экспериментально с помощью тензометрирования.

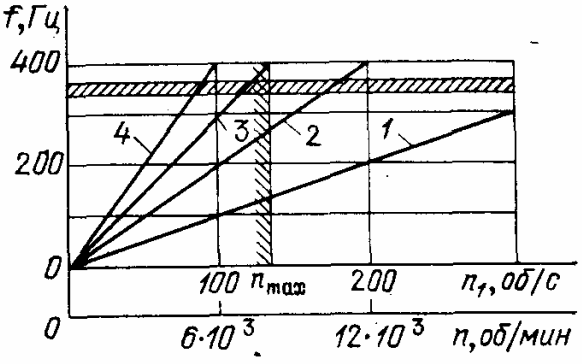


Рис. 12.11. Диаграмма возбуждения для определения резонансной частоты вращения для лопатки компрессора (*1, 2, 3, 4* — гармоники возбуждения)

Продольные колебания стержня. В некоторых случаях в стержнях возникают продольные колебания, при которых сечения стержня, оставаясь плоскими, перемещаются вдоль оси стержня (передача ультразвукового возбуждения, удар по торцу стержня и др.). Дифференциальное уравнение продольных колебаний получается из уравнений движения элемента стержня (рис. 12.12):

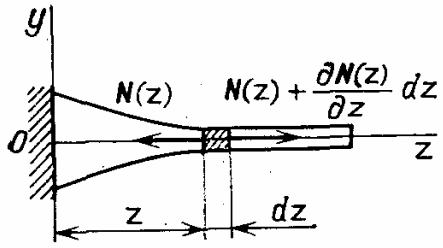


Рис. 12.12. К выводу уравнения продольных колебаний стержня

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\, dz = \frac{\partial N}{\partial z}\, dz, \qquad (91)$$

где $\rho F\, dz$ — масса элемента (ρ — плотность, F — площадь поперечного сечения); $N(z)$ — усилие в сечении стержня; w — перемещение точек оси стержня. Для упругих колебаний

$$N(z) = \sigma F = \varepsilon EF = EF \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (92)$$

Из соотношения (91) получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(EF \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (93)$$

Это и есть уравнение продольных колебаний стержня.

Для определения частот и форм собственных колебаний считаем

$$w = w(z)\cos pt, \tag{94}$$

где p — круговая частота продольных колебаний. Тогда для амплитудных смещений получаем следующее уравнение (соотношение (93) подставляется в уравнение (94)):

$$\frac{d}{dz}\left(EF\frac{dw}{dz}\right) + p^2\rho F w(z) = 0. \tag{95}$$

Для стержня постоянного сечения (рис. 12.13)

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda^2 w(z) = 0, \tag{96}$$

где

$$\lambda^2 = p^2\frac{\rho}{E}. \tag{97}$$

Решения уравнения (96) с помощью нормальных фундаментальных функций записывается так:

$$w(z) = w(0)\cos\lambda z + \frac{1}{\lambda}\frac{dw}{dz}(0)\sin\lambda z. \tag{98}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

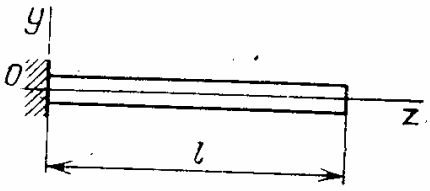


Рис. 12.13. Продольные колебания стержня постоянного сечения

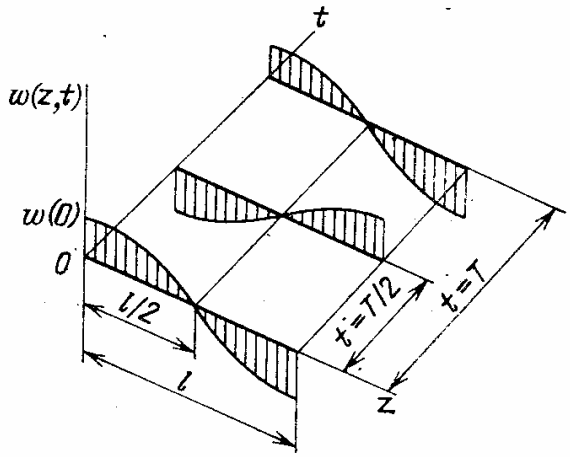


Рис. 12.14. Смещение сечения стержня как функция расстояния и времени

Пример. Рассмотрим колебания стержня постоянного сечения, свободного от закрепления. Так как усилия в сечениях $z = 0$ и $z = l$ отсутствуют, то краевые условия таковы:

$$\frac{dw}{dz}(0) = \frac{dw}{dz}(l) = 0. \tag{99}$$

Из решения (98) и условий (99) получаем

$$w(z) = w(0)\cos\lambda z, \quad \frac{dw}{dz}(l) = -\lambda w(0)\sin\lambda l = 0, \tag{100}$$

откуда следует, что

$$\lambda l = k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Частота продольных колебаний с учетом соотношения (97) равна

$$p = k\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{101}$$

На основании соотношений (94) и (100) при $k = 1$ имеем

$$w(z, t) = w(0)\cos\left(\frac{\pi}{l}z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \tag{102}$$

где $T = 2\pi/p = 1/f$ — период колебаний (время полного колебания).

На рис. 12.14 даны значения $w(z, t)$ в различные моменты времени. В момент времени $t = 0$ смещение при $z = 0$ равно $w(0)$. Через промежуток времени $t = T/2$ это перемещение достигнет конца $z = l$. Можно считать «скорость распространения деформации» равной

$$V = \frac{2l}{T} = \frac{2pl}{2\pi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Величина

$$\sqrt{E/\rho} = a \tag{103}$$

представляет скорость распространения звука (упругих колебаний). Она определяется характеристиками материала: модулем упругости E и плотностью ρ. Для многих конструкционных материалов (стали, титана, алюминия) она практически одинакова и составляет $a \approx 5000$ м/с.

Продольные колебания стержней переменного сечения (рис. 12.15). Перейдем к интегральным уравнениям, для чего проинтегрируем сначала уравнение (95) от 0 до z. Получим

$$EF(z)\frac{dw}{dz} = -p^2\int_0^z \rho F(z_1)\, w(z_1)\, dz_1 + N(0), \tag{104}$$

где

$$N(0) = \rho EF(0)\frac{dw}{dz}(0) \tag{105}$$

— величина амплитудного усилия при $z = 0$. Разделив обе части уравнения (104) на $EF(z)$ и снова интегрируя от 0 до z, находим

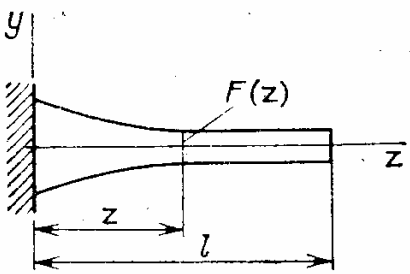


Рис. 12.15. Продольные колебания консольного стержня

$$w(z) = -p^2\int_0^z \frac{1}{EF(z_1)}\int_0^{z_1} \rho F(z_2)\, w(z_2)\, dz_2\, dz_1 + w(0) + N(0)\int_0^z \frac{dz_1}{EF(z_1)}. \tag{106}$$

Это и есть интегральное уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения. Начальные параметры $w(0)$ и $N(0)$ определяются из краевых условий.

Рассмотрим колебания консольного стержня. Краевые условия будут такими:

$$w(0) = 0, \quad N(l) = EF(l)\frac{dw}{dz}(l) = 0.$$

Из соотношения (104) и условия для $N(l)$ находим

$$N(0) = p^2 \int_0^l \rho F(z_1)\, w(z_1)\, dz_1,$$

и уравнение (106) можно представить в виде однородного краевого интегрального уравнения

$$w = p^2 K w, \tag{107}$$

где интегральный оператор равен

$$Kw = \int_0^z \frac{dz_1}{EF(z_1)} \int_0^l \rho F(z_1)\, w(z_1)\, dz_1 - \int_0^z \frac{1}{EF(z_1)} \int_0^{z_1} \rho F(z_2)\, w(z_2)\, dz_2\, dz_1. \tag{108}$$

Уравнение (107) решается методом последовательных приближений по схеме

$$w_{(i+1)} = p^2 K w_{(i)},$$

где $w_{(i)}$, $w_{(i+1)}$ — исходное и последующее приближения. Из условия

$$w_{(i+1)}(l) = w_{(i)}(l)$$

находим

$$p^2_{(i)} = \frac{w_{(i)}(l)}{Kw_{(i)}(l)}. \tag{109}$$

Простая приближенная формула для низшей частоты продольных колебаний получается, если принять

$$w_{(1)}(z) = 2\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}. \tag{110}$$

Функция $w_{(1)}(z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$w_{(1)}(0) = 0, \quad \frac{dw_{(1)}}{dz}(l) = 0.$$

Переходя к безразмерной переменной $\xi = z/l$, получим из формулы (109) при постоянных E и ρ

$$p^2_{(1)} = \frac{E}{l^2\rho} \frac{1}{\int_0^1 \frac{d\xi_1}{F(\xi_1)} \int_0^1 F(\xi_1)\, w_{(1)}(\xi_1)\, d\xi_1 - \int_0^1 \frac{1}{F(\xi_1)} \int_0^{\xi_1} F(\xi_2)\, w_{(1)}(\xi_2)\, d\xi_2\, d\xi_1}.$$

Для стержня постоянного сечения

$$p^2_{(1)} = \frac{E}{l^2\rho} \frac{1}{\int_0^1 (2\xi_1 - \xi_1^2)\, d\xi_1 - \int_0^1 \int_0^{\xi_1} (2\xi_2 - \xi_2^2)\, d\xi_2\, d\xi_1} = \frac{12}{5}\frac{E}{l^2\rho}$$

или

$$p_{(1)} = \sqrt{2{,}4}\,\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1{,}56\,\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Точное решение дает

$$p = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1{,}57\,\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Погрешность приближенной формулы невелика.

Замечание. Применение исходного приближения, удовлетворяющего краевым условиям в методе интегральных уравнений, совсем необязательно. При программировании на ЭВМ в качестве исходной функции можно принять любое выражение, например $w_{(1)} = 1$, так как уже следующее приближение $w_{(2)}$ будет удовлетворять всем краевым условиям.

43. Критические частоты вращения и крутильные колебания валов

Валы (роторы) являются одним из наиболее распространенных элементов машин. При расчете вал рассматривается как стержень. Такая модель пригодна для большинства валов. Исключение могут составить тонкостенные полые валы (роторы), для которых оказываются существенными оболочечные эффекты, и очень короткие валы, где следует учитывать пространственное напряженное состояние.

При построении динамических моделей валов следует учитывать критические частоты вращения и возможность крутильных колебаний.

Понятие о критической частоте вращения. Рассмотрим вращение двухопорного вала с диском посредине (рис. 12.16). Для того чтобы выяснить, является ли вращение вала с прямолинейной осью устойчивым, дадим ему некоторое отклонение v. Центр тяжести диска будет двигаться по окружности радиусом v, и возникнет центробежная сила

$$C = \omega^2 m v, \qquad (111)$$

где ω — частота вращения вала (рад/с), m — масса диска. Отклонение вала приведет к появлению силы упругости, стремящейся вернуть вал в недеформированное состояние:

$$F = \frac{1}{\delta_{11}} v, \qquad (112)$$

где δ_{11} — прогиб сечения вала от единичной силы в том же сечении.

Для вала постоянного сечения (см. разд. 42)

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}, \qquad (113)$$

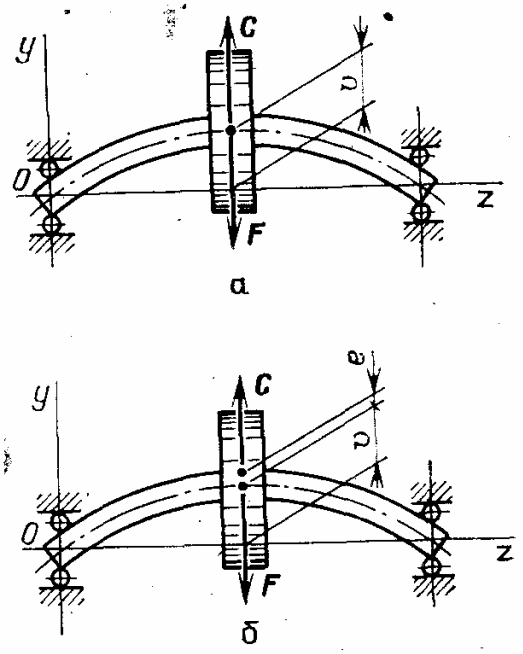


Рис. 12.16. Критическая частота вращения двухопорного вала с диском посредине: *а* — идеально уравновешенный диск; *б* — диск с начальным эксцентриситетом

где J — момент инерции поперечного сечения (индекс x опускается, так как сечение вала предполагается круглым). Пренебрегая весом диска, можно заключить, что при $C < F$ вращение вала будет устойчивым, так как после отклонения вал вернется в первоначальное положение. В момент равновесия, когда $C = F$, прогибы вала могут неограниченно возрастать: в любом отклоненном положении центро-

бежные силы и восстанавливающие силы упругости равны. Частота вращения вала, при которой наступает равенство центробежных сил и сил упругости при отклоненном положении вала, называется *критической*. Приравнивая значения C и F, находим

$$\omega_к^2 mv = \frac{1}{\delta_{11}} v, \tag{114}$$

или

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}}. \tag{115}$$

Критическая частота вращения (в оборотах в минуту) равна

$$n_к = \frac{60}{2\pi} \omega_к = \frac{30}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}}. \tag{116}$$

Можно представить, что при критической частоте вращения вал совершенно теряет жесткость на изгиб — даже малая внешняя сила может вызвать опасные прогибы.

Замечание. Из равенства (115) и формулы (14) получается, что критическая частота вращения вала равна круговой частоте собственных изгибных колебаний. Этот вывод справедлив и в более общих случаях (вал с распределенными массами и т. п.), если детали, закрепленные на валу, рассматриваются как точечные массы, т. е. когда пренебрегают инерцией поворота.

Учет начального эксцентриситета центра тяжести диска. В практических задачах центр тяжести диска имеет некоторый эксцентриситет (смещение) e по отношению к оси вращения (геометрической оси вала). Для быстроходных машин обязательно применяется предварительная балансировка роторов с целью уменьшения $\omega_к$. Точность балансировки характеризуется величиной неустранимого (остаточного) дисбаланса

$$D = Ge, \tag{117}$$

где G — масса диска, и составляет обычно от 2—10 г·см (для роторов с $G = 5$—10 кг) до 100—1000 г·см (при массе ротора 100—500 кг). Следует учесть, что в рабочих условиях вследствие нагрева, остаточных деформаций дисбаланс возрастает.

При наличии эксцентриситета e центробежная сила (см. рис. 12.16) будет равна

$$C = \omega^2 m (v + e). \tag{118}$$

Сила упругости определяется, как и раньше, равенством (112). Наличие эксцентриситета делает возможным состояние устойчивого статического равновесия, когда $C = F$:

$$\omega^2 m (v + e) = \frac{1}{\delta_{11}} v. \tag{119}$$

Из равенства (119) находим

$$v = \frac{e\omega^2 m}{1/\delta_{11} - \omega^2 m} = \frac{e}{\omega_к^2/\omega^2 - 1}. \qquad (120)$$

Зависимость абсолютной величины прогиба вала от частоты вращения показана на рис. 12.17.

При наличии эксцентриситета e прогиб вала возникает при любой частоте вращения вала ω, так как на вал действует неуравновешенная центробежная сила. Если $\omega < \omega_к$, то прогиб направлен в сторону эксцентриситета. Когда ω достигает критической частоты вращения ($\omega \to \omega_к$), то прогиб $v \to \infty$. Анализ поведения вала при наличии начального эксцентриситета подтверждает сделанный ранее вывод об опасности критического режима вращения.

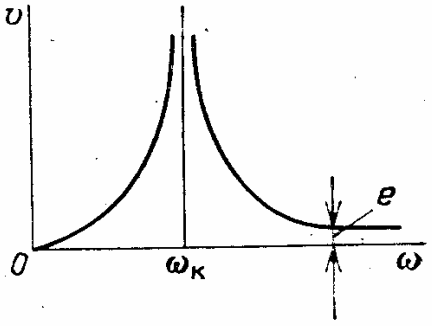


Рис. 12.17. Зависимость прогиба вала от частоты вращения

В реальных динамических системах при наличии значительного демпфирования в опорах, тщательной и надежной балансировки удается работать на критических режимах, но опасная ситуация сохраняется.

При $\omega > \omega_к$ (закритический режим) $v < 0$, что означает противоположность направлений v и e. В закритической области центр тяжести диска расположен ближе к оси вращения, чем точка крепления диска к валу. При очень большой частоте вращения $v = -e$, т. е. центр тяжести диска оказывается на оси вращения. Такое явление называется самоустановлением диска в закритической области.

Замечание. Проведенный анализ основывался на формуле (120), выражающей условие равновесия. Однако вопрос об устойчивости положения равновесия не обсуждался. Из физических соображений ясно, что равновесие вала будет $\omega < \omega_к$ устойчивым (при отклонении силы упругости больше центробежных сил). Анализ показывает, что в закритической области движение ротора оказывается неустойчивым. Для создания устойчивости движения и успокоения колебаний требуется введение дополнительного демпфирования (упругодемпфирующих опор и др.). Во всех случаях желательно работать с жесткими роторами.

Работа с гибкими роторами ($\omega_{max} > \omega_к$) возможна, но требует применения специальных опор или других средств демпфирования.

Учет упругости опор. В действительных условиях опоры роторов (подшипники, узлы крепления) не являются абсолютно жесткими. На рис. 12.18 приведена схема ротора на упругих опорах. Податливость (одинаковых) опор характеризуется коэффициентом податливости δ_0 (см/кг). Смещение в опоре

$$v_0 = \delta_0 R, \qquad (121)$$

где R — реакция в опоре. Центр тяжести диска (начальный эксцентриситет отсутствует) двигается по окружности радиусом v, центры

опбр — по окружности радиусом v_0. Центробежная сила диска

$$C = \omega_к^2 m v. \tag{122}$$

Сила упругости вала

$$F = \frac{1}{\delta_{11}}(v - v_0). \tag{123}$$

Так как

$$R = \frac{1}{2} C,$$

то из равенства $C = F$ следует, что

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\delta_0}{\delta_{11}}}} = \omega_{кж} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\delta_0}{\delta_{11}}}}, \tag{124}$$

где $\omega_{кж} = 1/\sqrt{\delta_{11} m}$ — критическая частота вращения ротора на жестких опорах.

Из формулы (124) вытекает, что поправка, связанная с учетом податливости опор, зависит от податливости вала. Чем более жестким является вал, тем важнее для него учет податливости опор.

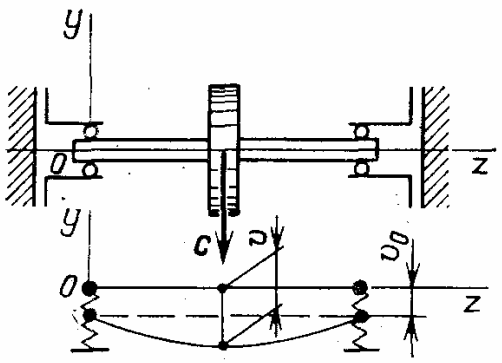


Рис. 12.18. Расчетная схема вала на упругих опорах

Силы, действующие на вращающийся диск при прогибах вала. В предыдущем изложении диски представлялись точечными массами. Рассмотрим теперь силы, приложенные к диску, при вращении относительно оси z (рис. 12.19). Ось диска (ось z_1) составляет угол φ с направлением оси вращения; v — прогиб вала в месте крепления диска и одновременно смещение центра тяжести диска (точки O_1). На элемент массы диска dm в точке A действует центробежная сила

$$dC = \omega^2 r dm, \tag{125}$$

где r — расстояние от точки A до оси вращения. Центробежная сила dC может быть разложена на две составляющие dC_y и dC_x (см. рис. 12.19). Усилия dC_x вследствие симметрии образуют взаимно уравновешенную систему сил и для дальнейшего не существенны. Сила

$$dC_y = \omega^2 (y_1 \cos\varphi + v)\, dm. \tag{126}$$

Величина $y_1 \cos\varphi + v = AA_1$ представляет проекцию радиуса r на ось y (см. рис. 12.19).

Приведем центробежные силы элементов диска к равнодействующим силе и моменту, приложенным в центре тяжести диска. Тогда

$$C = C_y = \int_V dC_y = \omega^2 \int_V (v + y_1 \cos\varphi)\, \rho\, dV, \tag{127}$$

где интеграл распространяется на весь объем диска V; $\rho dV = dm$ — масса элемента диска. Так как величины v (смещение центра тяжести) и φ (угол поворота плоскости диска) одинаковы для всех точек диска, то

$$C = \omega^2 v \int_V \rho\, dV + \omega^2 \cos\varphi \int_V y_1 \rho\, dV. \tag{128}$$

Интеграл

$$\int_V y_1 \rho\, dV = \int_V y_1\, dm = 0$$

как статический момент относительно прямой, проходящей через

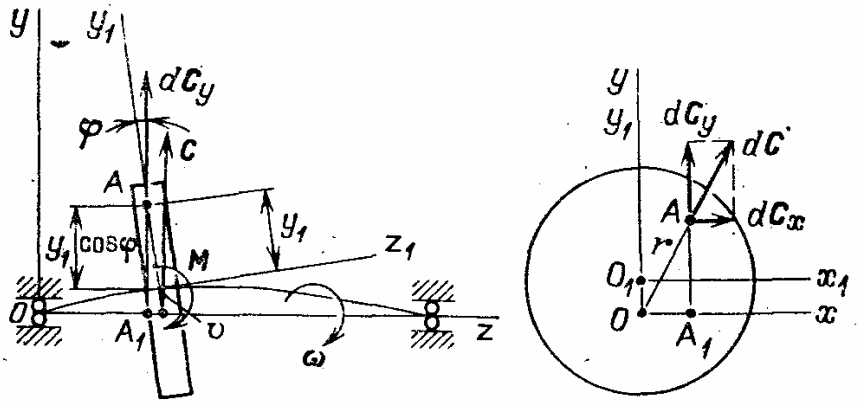


Рис. 12.19. Силы, действующие на вращающийся диск

центр тяжести диска. Из равенства (128) получаем важный результат:

$$C = \omega^2 v m. \tag{129}$$

Равнодействующая центробежных сил такова, как если бы вся масса диска была сосредоточена в его центре тяжести. Но центробежные силы создают момент

$$M = \omega^2 \int_V (v + y_1 \cos\varphi)\, y_1 \sin\varphi \rho\, dV,$$

или

$$M = \omega^2 v \sin\varphi \int_V y_1 \rho\, dV + \omega^2 \cos\varphi \sin\varphi \int_V y_1^2 \rho\, dV. \tag{130}$$

Первый интеграл в правой части равенства (130) обращается в нуль, как статический момент, и тогда

$$M = \omega^2 \cos\varphi \sin\varphi\, J_m, \tag{131}$$

где $J_m = \int_V y_1^2 \rho\, dV$ — осевой момент инерции массы диска. Для

тонких дисков

$$J_m = \frac{1}{2} J_{pm}, \tag{132}$$

где J_{pm} — полярный момент инерции массы диска. Например, для диска постоянной толщины b и радиусом R (рис. 12.20)

$$J_{pm} = b \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r \, dr = \frac{1}{2} \rho b \pi R^4 = \frac{1}{2} mR^2, \tag{133}$$

где $m = \rho \pi R^2 b$ — масса диска.

Так как рассматриваются малые прогибы вала, то следует принять

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1.$$

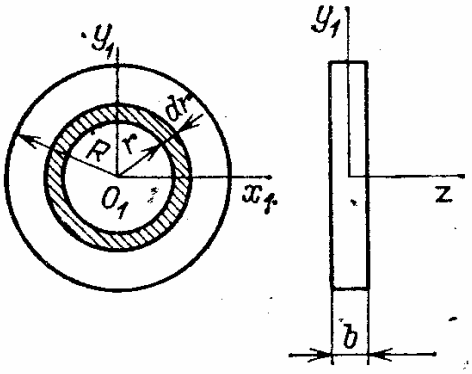


Рис. 12.20. Определение полярного момента инерции массы диска

Угол поворота плоскости диска

$$\varphi = \frac{dv(z)}{dz}, \tag{134}$$

где $v(z)$ — прогиб вала. Из равенства (131) получаем важную формулу

$$M = \omega^2 J_m \frac{dv}{dz}. \tag{135}$$

Если при прогибах вала плоскость диска отклоняется от первоначального положения, то на диск действует момент, препятствующий повороту плоскости диска. Такой момент называется *гироскопическим*, так как впервые был изучен в связи с движением гироскопов (простейший пример гироскопа — «волчок»; гироскопы — важнейшие приборы для управления самолетами и ракетами). Гироскопический момент пропорционален углу поворота плоскости диска.

Замечание. Рассматриваемое движение вала и диска (диск неподвижен относительно плоскости, содержащей изогнутую ось вала) называется прямой синхронной прецессией. Возможны и другие, более сложные движения вала, напоминающие движения гибкого валика в изогнутой и вращающейся трубчатой обойме. Такого рода движения (несинхронные прецессии) на практике встречаются очень редко и в дальнейшем не рассматриваются.

Критическая частота вращения вала с дисками. Будем пренебрегать массой вала по сравнению с массами дисков. На рис. 12.21 даны конструктивная и расчетная схемы (динамическая модель) ротора газовой турбины. Рассмотрим движение ротора при наличии прогиба вала. При вращении вала в изогнутом состоянии диск действует на вал с усилием и моментом соответственно

$$C = \omega^2 m v, \quad M = \omega^2 J_m \varphi. \tag{136}$$

Для определения деформации вала рассмотрим единичные силы и

момент (рис. 12.21, *б*), приложенные в точке крепления диска. Обозначим δ_{11} прогиб от единичной силы (первого силового фактора) в направлении силы, δ_{22} угол поворота от единичного момента (второго силового фактора) в направлении действия единичного

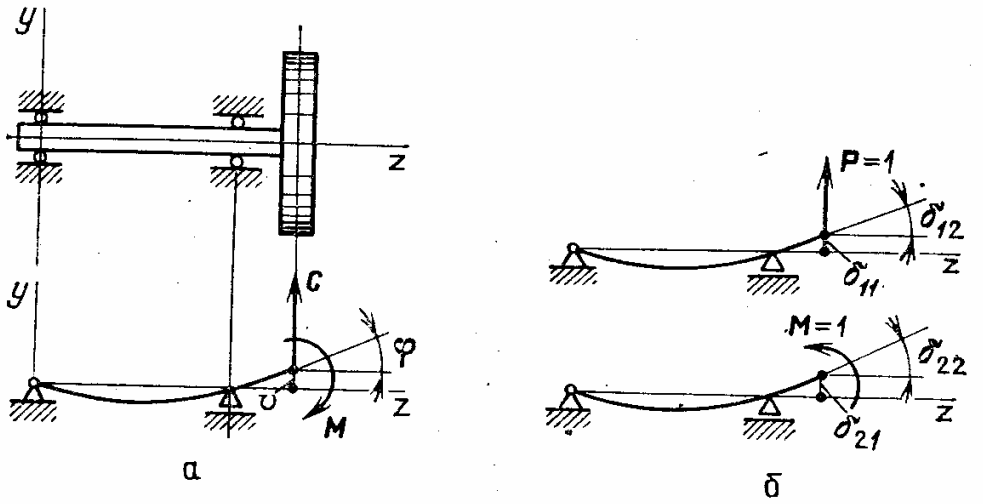


Рис. 12.21. Критическая частота вращения вала с диском ротора газовой турбины

момента, δ_{12} угол поворота от единичной силы в направлении второго силового фактора, δ_{21} — прогиб от единичного момента в направлении первого силового фактора. По условиям взаимности получим

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Прогиб вала и угол поворота в месте крепления диска равны

$$v = \delta_{11}C - \delta_{21}M, \tag{137}$$

$$\varphi = \delta_{12}C - \delta_{22}M. \tag{138}$$

Знак минус в этих равенствах согласован с разным направлением M и M_1. Учитывая зависимости (136), получаем систему однородных уравнений относительно v и φ

$$v(\omega^2\delta_{11}(m - 1) - \varphi\omega^2\delta_{21}J_m = 0,$$
$$v\omega^2\delta_{12}m - \varphi(\omega^2\delta_{22}J_m + 1) = 0.$$

Отличные от нуля значения v и φ получаются в том случае, когда детерминант системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \omega^2\delta_{11}m - 1 & \omega^2\delta_{21}J_m \\ \omega^2\delta_{12}m & \omega^2\delta_{22}J_m + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)mJ_m + \omega^2(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m) - 1 = 0. \tag{139}$$

Из последнего уравнения получаем величину критической частоты

вращения

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m)^2 + mJ_m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (140)$$

Как будет показано в дальнейшем, для всех упругих систем

$$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 > 0, \quad (141)$$

и потому формула содержит только одно действительное значение критической частоты вращения (знак минус в формуле (140) должен быть отброшен). При $J_m = 0$ из формулы (140) получаем известный результат

$$\omega_к = 1/\sqrt{\delta_{11}m}.$$

Гироскопический момент дисков повышает критические частоты вращения, так как препятствует повороту плоскости диска. Разберем предельный случай $J_m \to \infty$. Разделив в равенстве (139) все члены на J_m и сохраняя те, которые не содержат в знаменателе J_m, найдем

$$\omega_к^2 = \frac{1}{(\delta_{11} - \delta_{12}^2/\delta_{22})m} = \frac{1}{\delta_{11}^* m}, \quad (142)$$

здесь $\delta_{11}^* = \delta_{11} - \delta_{12}^2/\delta_{22}$ — прогиб от единичной силы при отсутствии поворота сечения, где закреплен диск. Получим этот результат другим путем, считая заранее, что поворот диска отсутствует (рис. 12.22). При смещении диска на величину v возникают сила C и реактивный момент $M_э$.

Из условия $\varphi \neq 0$ (уравнение (138)) находим

$$M_э = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} C.$$

Прогиб вала в месте крепления диска равен

$$v = \delta_{11}C - \delta_{21}M_э = \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}}\right)C = \frac{1}{\delta_{22}}(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)C. \quad (143)$$

Из физических соображений ясно, что прогиб v должен быть направлен в сторону действия силы (объясните, почему!), что и доказывает условие (141). Соотношения (143) и (136) приводят к равенству (142).

При $J_m \to \infty$ плоскость сечения диска при деформации вала не поворачивается. Влияние гироскопического момента диска сказывается сильно, если диск закреплен вблизи от опоры. Если вал имеет опоры в концевых сечениях и несет несколько дисков, влияние гироскопического момента обычно оказывается небольшим. Если пренебречь влиянием гироскопического эффекта дисков, то, как

указывалось, критическая частота вращения совпадает с круговой частотой собственных изгибных колебаний балок. Следовательно, для расчета могут быть использованы формулы разд. 42.

Критическая частота вращения вала переменного сечения с непрерывно распределенными массами. Роторы осевых компрессоров, паровых турбин часто могут быть представлены динамической моделью в виде стержня переменного сечения с непрерывным распределением масс. Будем пренебрегать гироскопическим эффектом дисков, ограничиваясь нижней оценкой критической частоты вращения. Отдельные диски также могут быть заменены в пределах участка распределенной массой. В изогнутом положении на вал действует распределенная нагрузка (рис. 12.23)

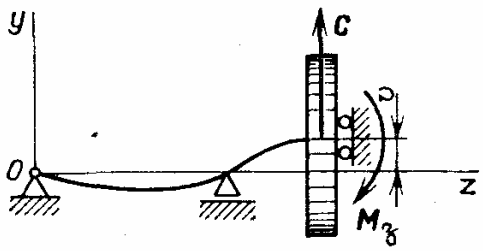


Рис. 12.22. Схема деформации вала при защемленном конце ротора (плоскость диска не имеет возможности поворота)

$$q(z)=\omega^2 m(z)v(z), \qquad (144)$$

где $m(z)$ — масса, приходящаяся на единицу длины вала.

Перерезывающая сила в сечении z равна

$$Q_y = -R_1 - \int_0^z q(z_1)\,dz_1. \qquad (145)$$

Учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y,$$

находим

$$M_x(z) = -R_1 z - \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2)\,dz_2\,dz_1. \qquad (146)$$

Из условия

$$M_x(l)=0$$

следует

$$R_1 = -\frac{1}{l}\int_0^l \int_0^{z_1} q(z_1)\,dz_2\,dz_1.$$

Подставляя значение R_1 в равенство (146), получаем

$$M_x(z) = -\int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2)\,dz_2\,dz_1 + \frac{z}{l}\int_0^l \int_0^{z_1} q(z_2)\,dz_2\,dz_1. \qquad (147)$$

Выражение (147) определяет изгибающий момент в сечении стержня (рис. 12.23) при произвольной распределенной нагрузке $q(z)$. Учитывая равенство (144), можно записать

$$M_x(z) = \omega^2 \left(\frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} m(z_2)\, v(z_2)\, dz_2\, dz_1 - \int_0^z \int_0^{z_1} m(z_2)\, v(z_2)\, dz_2 dz_1 \right) = \omega^2 A_v(z), \quad (148)$$

где оператор

$$A_v(z) = \frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} m(z_2)\, v(z_2)\, dz_2\, dz_1 - \int_0^z \int_0^{z_1} m(z_2)\, v(z_2)\, dz_2\, dz_1. \quad (149)$$

Если задана величина $v(z)$, то по формуле (149) может быть вычислено значение $A_v(z)$ в каждом сечении z. Будем использовать уравнение упругой линии (разд. 31)

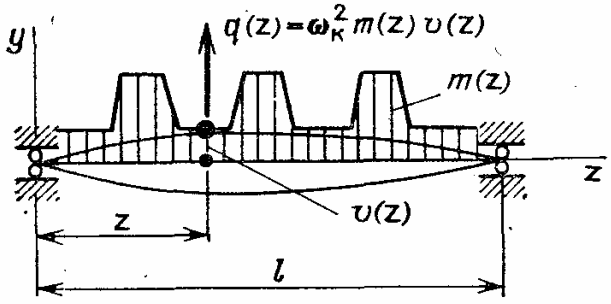


Рис. 12.23. Вал с непрерывно распределенными массами (ротор компрессора)

$$v(z) = -\int_0^z \int_0^z \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1 + v(0) + z\frac{dv(0)}{dz}. \quad (150)$$

В рассматриваемом случае $v(0)=0$, а из условия $v(l)=0$ находим значение $v'(0)$, что дает

$$v(z) = \frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1 - \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1. \quad (151)$$

Выражение (151) определяет прогиб вала при произвольном распределении изгибающего момента. Внося в равенство (151) величину $M_x(z)$, из соотношения (148) получаем интегральное уравнение для критической частоты вращения

$$v = \omega^2 K v, \quad (152)$$

где интегральный оператор равен

$$Kv = \frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} \frac{A_v(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1 - \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{A_v(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1. \quad (153)$$

Интегральное уравнение (153) может быть решено методом последовательных приближений по схеме

$$v_{(i+1)} = \omega^2_{(i)} K v_{(i)}.$$

В качестве исходного приближения принимается

$$v_{(i)} = \frac{4z(l-z)}{l^2}.$$

Частота находится из равенства прогибов

$$v_{(i+1)}(l/2) = v_{(i)}(l/2).$$

Расчет проводится точно таким же методом, как и в разд. 39.

Крутильные колебания валов. В валах поршневых машин (в двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и т. п.) часто возникают крутильные колебания, связанные с неравномерностью (по времени) вращающего момента или момента сопротивления. Крутильные колебания могут возникать и в других машинах, если крутящий момент, передаваемый валом, не является постоянным. В качестве динамической модели при крутильных колебаниях обычно используется вал с дисками. Моменты инерции масс дисков $J_1, J_2, \ldots, J_n$ рассматриваются как приведенные моменты инерции. Например, в поршневых машинах инерционные массы связаны с движением поршней, шатунов и других элементов и приводятся к дискам с эквивалентными моментами инерции. Жесткость участков валов, соединяющих диски, принимается как эквивалентная для участков с непрямой осью (коленчатые валы и др.), при шлицевых соединениях и т. п. На рис. 12.24 показаны конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и динамическая модель крутильных колебаний. Существуют более сложные модели крутильных колебаний с несколькими ветвями, что определяется конструктивными особенностями машин; остановимся на схеме «цепочной системы» (рис. 12.25).

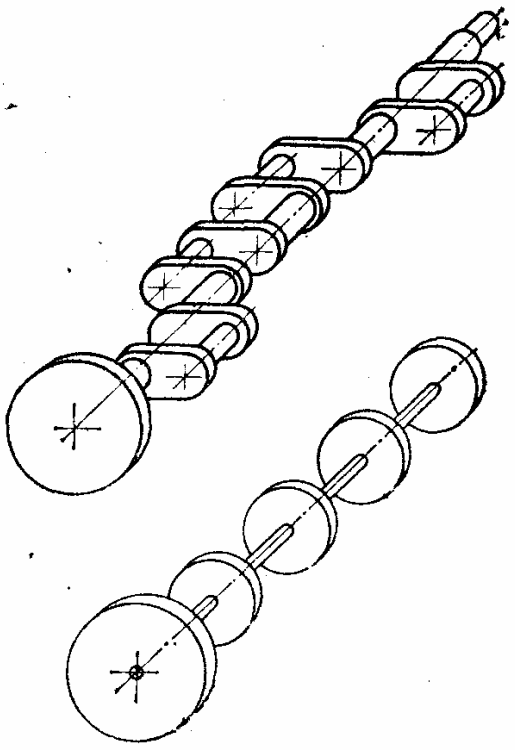


Рис. 12.24. Конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания (автомобильные и тракторные двигатели, дизели и т. п.) и динамическая модель крутильных колебаний

Выведем уравнение крутильных колебаний для системы из n дисков. Рассмотрим уравнение движения i-го диска (рис. 12.26). Обозначая угол поворота i-го диска $\theta_i(t)$, получим

$$J_i \frac{d^2\theta_i(t)}{dt^2} = M_i - M_{i-1}, \qquad (154)$$

где M_i, M_{i-1} — крутящие моменты, действующие на диск со стороны валов правого i-го и левого $(i-1)$-го участков. Угол поворота диска зависит от времени.

Если обозначить жесткость i-го участка C_i, то

$$M_i = C_i(\theta_{i+1}(t) - \theta_i(t)); \tag{155}$$

здесь θ_{i+1}, θ_i — углы поворота конечных сечений i-го участка;

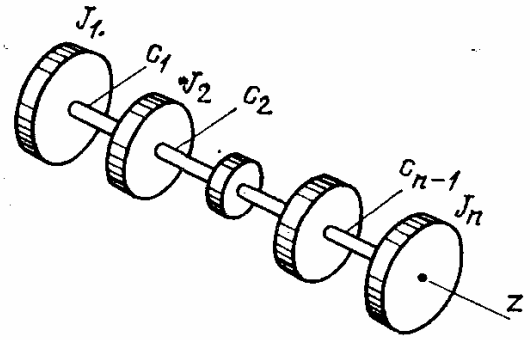


Рис. 12.25. Динамическая модель крутильных колебаний в машинах

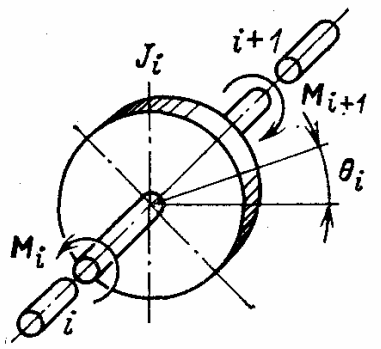


Рис. 12.26. К выводу уравнений крутильных колебаний

$\theta_{i+1} - \theta_i$ — упругий угол поворота вала на i-м участке

$$C_i = \frac{GJ_{pi}}{l_i}, \tag{156}$$

где l_i — длина участка, J_{pi} — эквивалентная жесткость вала на кручение, G — модуль сдвига.

Подобным образом получаем

$$M_{i-1} = C_{i-1}(\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)).$$

Теперь из уравнения (155) находим

$$J_i \frac{d^2\theta_i(t)}{dt^2} = C_i(\theta_{i+1}(t) - \theta_i(t)) - C_{i-1}(\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)). \tag{157}$$

Пренебрегая моментами инерции участков вала, можем считать, уравнение (157) при $i = 1, \ldots, n$ дифференциальным уравнением крутильных колебаний цепочной системы. Полагая

$$\theta_i(t) = \theta_i \cos pt, \tag{158}$$

где θ_i — амплитудное значение угла поворота, p — круговая частота крутильных колебаний, из уравнения (157) получим

$$C_{i-1}\theta_{i-1} + [p^2 J_i - (C_{i-1} + C_i)]\theta_i + C_i\theta_{i+1} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n; \; C_0 = 0, \; C_{n+1} = 0). \tag{159}$$

Это и есть уравнение амплитудных углов поворота при крутильных колебаниях цепочной системы.

Пример. Рассмотрим крутильные колебания динамической модели, состоящей из двух дисков, соединенных валом (рис. 12.27). Применяя уравнение (159) при $i = 1$ и $i = 2$, находим

$$(p^2J_1 - C_1)\theta_1 + C_1\theta_2 = 0, \quad C_1\theta_1 + (p^2J_2 - C_1)\theta_2 = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант системы:

$$\begin{vmatrix} p^2J_1 - C_1 & C_1 \\ C_1 & p^2J_2 - C_1 \end{vmatrix} = (p^2J_1 - C_1)(p^2J_2 - C_1) - C_1^2 = 0,$$

находим

$$p^4J_1J_2 - C_1p^2(J_1 + J_2) = 0.$$

Из этого уравнения получим

$$p_1 = 0, \quad p_2 = p = \sqrt{C_1\frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}} = \sqrt{C\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)}. \qquad (160)$$

Замечание. Нулевая частота характерна для любой незакрепленной системы, которая может двигаться как недеформируемое твердое тело. Поскольку «возвращающие» силы упругости отсутствуют, частота системы равна нулю.

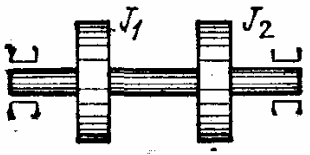


Рис. 12.27. Крутильные колебания системы из двух дисков и вала

Уравнение крутильных колебаний в матричной форме. Систему n уравнений (159) представим в матричной форме:

$$[C]\{\theta\} = 0, \qquad (161)$$

где вектор состояния $\{\Theta\}^T = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ и динамическая матрица

$$[C] = \begin{bmatrix} p^2J_1 - C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & p^2J_2 - (C_1 + C_2) & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{n-1} & p^2J_n - (C_{n-1} + C_n) \end{bmatrix}. \qquad (162)$$

Частотное уравнение получается из условия

$$\det[C] = |[C]| = 0.$$

Система с n дисками имеет n частот, среди которых одна нулевая.

44. Устойчивость стержней

Непосредственный жизненный опыт приводит к понятию об устойчивости и неустойчивости системы. На рис. 12.28 показаны три формы равновесия механической системы, из которых первая является устойчивой, вторая — безразличной и третья — неустойчивой. Равновесное положение системы считается устойчивым, если после случайного отклонения система стремится к своему первоначальному положению. Естественно, что оценка устойчивости может

зависеть от величины случайного отклонения. На рис. 12.29 приведена система, «устойчивая в малом» и «неустойчивая в большом».

В теоретической механике рассматриваются проблемы устойчивости движения и даются строгие критерии устойчивости на основе теории Пуанкаре — Ляпунова. В механике деформированного твердого тела оценка устойчивости основывается обычно на анализе статического поведения конструкции.

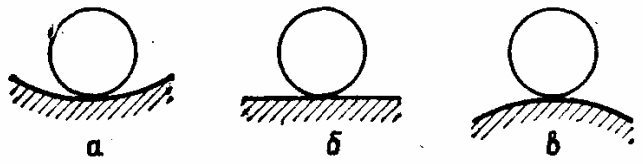


Рис. 12.28. Три формы равновесия механической системы: *а* — устойчивое; *б* — безразличное (критическое); *в* — неустойчивое.

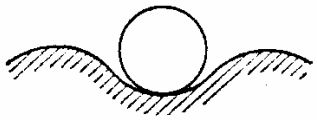


Рис. 12.29. Система, устойчивая при малых отклонениях и неустойчивая при больших

На рис. 12.30 показаны результаты простейшего эксперимента. При некотором усилии стержень (линейка) начнет изгибаться. Явление резкого увеличения прогибов стержня при сжимающем осевом усилии называется потерей устойчивости.

Для нормальной работы конструкций потеря устойчивости недопустима.

Перейдем к анализу устойчивости стержней.

Критическая нагрузка для стержня с шарнирно закрепленными концами. Формула Эйлера. Рассмотрим двухопорный стержень (рис. 12.31), сжатый осевыми силами N, и предположим, что стержень получил прогиб в плоскости yOz. Если в сечении стержня

Рис. 12.30. Потеря устойчивости стержня при сжатии

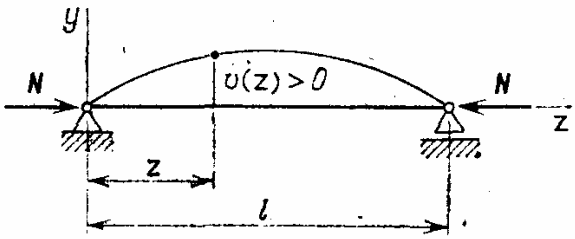


Рис. 12.31. Потеря устойчивости двухопорного стержня

возникнут изгибающие моменты, способные удержать стержень в изогнутом состоянии, то первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня окажется неустойчивой.

Уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M_x. \tag{163}$$

Изгибающий момент в сечении равен

$$M_x = Nv(z), \tag{164}$$

Из уравнений (163) и (164) получаем дифференциальное уравнение изгиба стержня

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \lambda^2 v(z) = 0, \tag{165}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{N}{EJ_x}. \tag{166}$$

Решение уравнения (165) можно записать в виде

$$v(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z, \tag{167}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $z = 0$ прогиб $v(0) = 0$, поэтому получаем $(C_1 = 0)$

$$v(z) = C_2 \sin \lambda z. \tag{168}$$

Прогиб снова обращается в нуль при $z = l$, и потому

$$C_2 \sin \lambda l = 0. \tag{169}$$

Здесь $C_2 \neq 0$, так как при $C_2 = 0$ прогиб стержня вообще отсутствует, а рассматривается изогнутое состояние стержня. При $C_2 \neq 0$

$$\sin \lambda l = 0,$$

и, следовательно,

$$\lambda l = k\pi, \tag{170}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Значение $k = 0$ не представляет интереса, так как соответствует прямолинейному состоянию стержня.

Равенства (166) и (170) приводят к формуле Эйлера

$$N_{кр} = \frac{k^2\pi^2 EJ_x}{l^2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{171}$$

Из соотношения (171) вытекает, что имеются бесчисленные значения N, при которых могут существовать изогнутые формы равновесия стержня.

Наименьшее значение осевой силы (первое критическое значение) получается при $k = 1$:

$$N = N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}. \tag{172}$$

При $N \geqslant N_{кр}$ уже возможна потеря устойчивости стержня, и поэтому значение осевой силы, найденное по формуле (172), называется *критическим*.

При рассмотрении изогнутого состояния предполагалось, что изгиб происходит в плоскости yOz. Точно такой же вывод справедлив и для изгиба в другой главной плоскости, что дает

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}. \tag{173}$$

Очевидно, выпучивание при действии усилия $N = N_{кр}$ произойдет раньше в той плоскости, где жесткость сечения меньше. Поэтому формулу для определения критической силы записывают в таком виде:

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}. \qquad (174)$$

Замечания. 1. Уравнение (165) имеет решение $v \equiv 0$, что соответствует прямолинейной форме равновесия. При $N > N_{кр}$ возможны две формы равновесия: первоначальная прямолинейная форма $v = 0$ и изогнутая форма равновесия

$$v = C \sin \pi z. \qquad (175)$$

Прямолинейная форма равновесия оказывается устойчивой при $N < N_{кр}$ и неустойчивой при $N > N_{кр}$. Изогнутая форма равновесия (174), наоборот, будет устойчивой при $N > N_{кр}$. Существование новой устойчивости форм равновесия отдельного элемента при $N > N_{кр}$ и неустойчивость прежней прямолинейной формы делают конструкцию в целом неустойчивой: при возрастании силы N может произойти выпучивание — система (стержень) внезапно перейдет к другой форме равновесия, прогибы стержня и напряжения в нем резко возрастают.

2. Более детальный анализ показывает, что при всех высоких значениях критической силы (при $k = 2, 3, 4, \ldots$) равновесие оказывается неустойчивым; практическое значение имеет только первая критическая сила, или просто критическая сила (формула (172)).

3. Существенным моментом вывода уравнения (165) явилось составление условия равновесия (164) для стержня (системы) в деформированном состоянии. В этом уже содержится отказ от линейной постановки задачи, при которой перемещения считаются настолько малыми, что деформированное и недеформированное состояния при составлении условий равновесия не различаются (принцип начальных размеров).

4. Рассматриваемая модель устойчивости стержня (уравнение (165) и рис. 12.32) является приближенной. Она позволяет найти критическое значение силы из условия существования нетривиального (ненулевого) решения

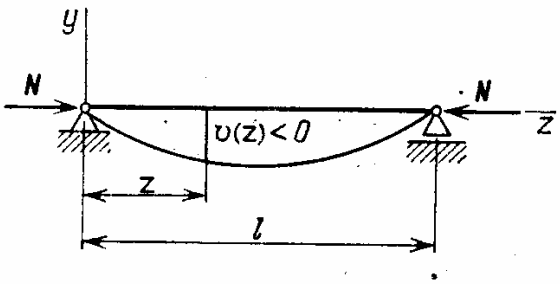


Рис. 12.32. К составлению уравнения устойчивости при отрицательном прогибе

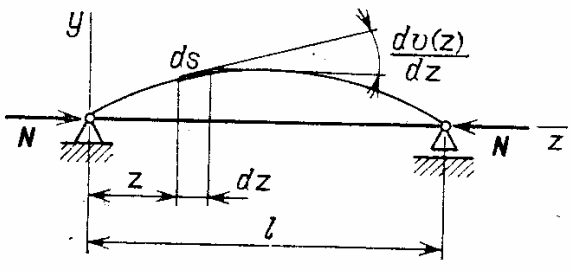


Рис. 12.33. Сближение конусов стержня при его изгибе

однородного линейного дифференциального уравнения. Это — задача о собственных значениях, которая была основной при изучении собственных колебаний (разд. 39). Величина прогибов определяется решением (168) с точностью до масштаба величины C. Модель не дает возможности описать состояние системы при $N \neq N_{кр}$.

Более точная модель основана на строгой нелинейной постановке задачи. Сделав один шаг по учету деформированного состояния — приняв во вни-

мание изгибающий момент от осевой силы, следовало бы сделать и второй шаг — уточнить краевые условия при $z = l$, так как вследствие изгиба стержня происходит смещение опоры на величину Δ (рис. 12.33).

Пренебрегая деформацией сжатия стержня, можем представить, что элемент стержня ds проектируется на ось z как отрезок dz, и в результате

$$\Delta = \int_0^l (ds - dz) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}\, dz - dz \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz. \qquad (176)$$

Краевое условие на втором конце стержня будет таким:

$$v(l - \Delta) = 0. \qquad (177)$$

Далее следует использовать точное выражение для кривизны стержня, и тогда дифференциальное уравнение изгиба становится следующим:

$$EJ_x \frac{d^2v/dz^2}{[1 + (dv/dz)^2]^{3/2}} + Nv(z) = 0. \qquad (178)$$

Уравнение (178) и краевое условие (15) позволяют получить точное решение. Не рассматривая самого решения, укажем простую зависимость, вытекающую из него;

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{N_{кр}}{N}}.$$

Например, если усилие N превысит критическое значение на 1,5%, стержень длиной 1 м получит прогиб 11 см.

Для практики важно установить усилие, при котором конструкция перестает быть работоспособной. Рассматриваемая приближенная модель позволяет это сделать.

5. Вид дифференциального уравнения (165), разумеется, не зависит от того, в какую сторону предполагался изгиб стержня. На рис. 12.32 показан стержень с отрицательными прогибами. Это вполне согласуется с решением (168), где величина C_2 может быть произвольной, в том числе отрицательной.

Изгибающий момент (см. рис. 12.32)

$$M_x = -N(-v(z)) = Nv(z),$$

что приводит к уравнению (165).

Общее дифференциальное уравнение устойчивости стержня и краевые условия. Рассмотрим более общий случай, когда на стержень действуют осевая сила N, приложенная на конце стержня, распределенная осевая нагрузка q_z (рис. 12.34) и поперечные нагрузки P. Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = \widetilde{M}_x(z) - N[v(l) - v(z)] - \int_z^l q(z_1)[v(z_1) - v(z)]\, dz_1, \qquad (179)$$

где $\widetilde{M}_x(z)$ — изгибающий момент от поперечной нагрузки.

Подставляем (179) в уравнение (163):

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = -\widetilde{M}_x(z) + N[v(l) - v(z)] + \int_z^l q_z(z_1)[v(z_1) - v(z)]\, dz_1. \qquad (180)$$

Дифференцируя это равенство по z, получаем

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right) = -\tilde{Q}_y - N\frac{dv}{dz} - \int_z^l q_z(z_1)\frac{dv(z)}{dz}dz, \qquad (181)$$

где $\tilde{Q}_y = d\tilde{M}_x/dz$ — перерезывающая сила от поперечных нагрузок.

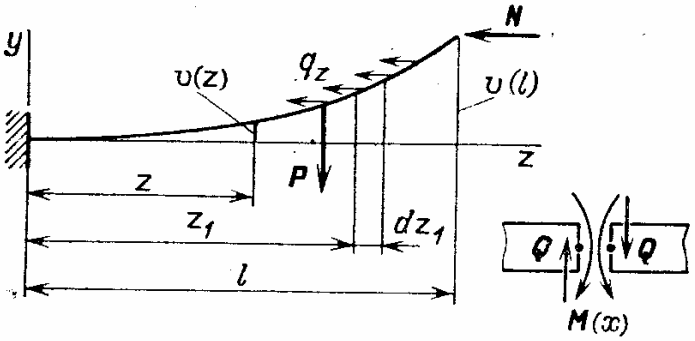


Рис. 12.34. Определение изгибающего момента в сечении стержня

Повторяя операцию дифференцирования, находим

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right) + N\frac{d^2v}{dz^2} - q_z\frac{dv(z)}{dz} = 0. \qquad (182)$$

Предполагается, что поперечная распределенная нагрузка q_y отсутствует. Уравнение (182) представляет общее дифференциальное уравнение устойчивости стержня.

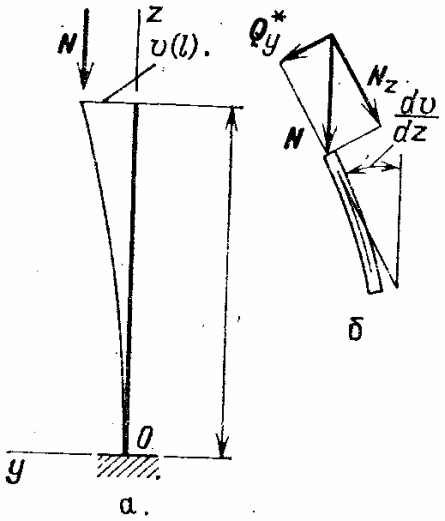


Рис. 12.35. Краевые условия в задачах устойчивости стержней: *а* — расчетная схема; *б* — условная перерезывающая сила

Рассмотрим краевые условия для уравнения устойчивости на примере консольного стержня. При $z = 0$ стержень имеет заделку, и потому

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0.$$

На конце $z = l$ изгибающий момент отсутствует:

$$\frac{d^2v}{dz^2}(l) = 0.$$

Для перерезывающей силы из уравнения (181) получаем при $z = l$

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)_{z=l} = -N\frac{dv}{dz}(l). \qquad (183)$$

Условная перерезывающая сила на конце стержня появляется за счет проекции усилия N (рис. 12.35).

Отметим, что уравнение (182) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, и для его однозначного решения

должны быть указаны четыре краевых условия (обычно по два при $z=0$ и $z=l$).

Замечания. 1. Напомним правило дифференцирования определенного интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dz}\left(\int_{A(z)}^{B(z)} F(z, z_1)\,dz_1\right) = \int_{A(z)}^{B(z)} \frac{\partial F}{\partial z}(z, z_1)\,dz_1 + \frac{dB}{dz}F(z, B) - \frac{dA}{dz}F(z, A). \quad (184)$$

Это правило легко установить, рассматривая приращение

$$dJ = \int_{A(z)+\frac{dA}{dz}dz}^{B(z)+\frac{dB}{dz}dz} F(z+dz, z_1)\,dz_1 - \int_{A(z)}^{B(z)} F(z, z_1)\,dz_1.$$

Соотношение (184) применялось при дифференцировании уравнения (180).

2. Следует обратить внимание, что при выводе краевого условия (183) направление усилия N оставалось неизменным. Если усилие N считать направленным по касательной к оси стержня («следящая» нагрузка), то решение задачи усложняется.

Решение дифференциального уравнения устойчивости для стержня постоянного сечения. Уравнение устойчивости при отсутствии распределенной осевой нагрузки q_z будет таким:

$$\frac{d^4v}{dz^4} + \lambda^2\frac{d^2v}{dz^2} = 0. \quad (185)$$

Предполагая частные решения в виде

$$v = Ce^{\mu z},$$

получим характеристическое уравнение

$$\mu^2(\mu^2+\lambda^2) = 0,$$

которое имеет четыре корня:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = i\lambda, \quad \mu_4 = -i\lambda.$$

Решение уравнения (185) можно записать так:

$$v = C_1 + C_2z + C_3\cos\lambda z + C_4\sin\lambda z. \quad (186)$$

Построим теперь решение по методу начальных параметров, основываясь на применении нормальных фундаментальных функций:

$$v(z) = v(0)V_1(z) + v'(0)V_2(z) + v''(0)V_3(z) + v'''(0)V_4(z). \quad (187)$$

Функции $V_i(z)$ являются частными решениями уравнения (185) и удовлетворяют условию

$$\frac{d^jV_i}{dz^j}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq i-1, \\ 1, & j = i-1 \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \quad (188)$$

Для нахождения нормальных фундаментальных функций воспользуемся общим решением (186). Допустим, требуется определить функцию $V_1(z)$. Полагая

$$V_1 = C_1 + C_2 z + C_3 \cos \lambda z + C_4 \sin \lambda z,$$

будем иметь при $z = 0$ в соответствии с условиями (188)

$$V_1(0) = C_1 + C_3 = 1, \quad V_1'(0) = C_2 + \lambda C_4 = 0,$$
$$V_1''(0) = -\lambda^2 C_3 = 0, \quad V_1'''(0) = -\lambda^3 C_4 = 0.$$

Из последних соотношений получаем

$$V_1(z) = 1.$$

Подобным образом находим всю систему решений:

$$V_1(z) = 1, \; V_2(z) = z, \; V_3(z) = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z), \; V_4(z) = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda z - \sin \lambda z). \tag{189}$$

С помощью равенства (187) и формулы (189) получаем следующие важные для дальнейшего соотношения:

$$\begin{aligned}
v(z) &= v(0) \cdot 1 + v'(0) z + v''(0) \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z) + v'''(0) \frac{1}{\lambda^3}(\lambda z - \sin \lambda z), \\
v'(z) &= 0 + v'(0) + v''(0) \frac{1}{\lambda} \sin \lambda z + v'''(0) \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z), \\
v''(z) &= 0 + 0 + v''(0) \cos \lambda z + v'''(0) \frac{1}{\lambda} \sin \lambda z, \\
v'''(z) &= 0 + 0 - v''(0) \lambda \sin \lambda z + v'''(0) \cos \lambda z.
\end{aligned} \tag{190}$$

Последние соотношения можно записать в матричной форме:

$$\{v(z)\} = [V]\{v(0)\}, \tag{191}$$

где столбец-решение имеет вид

$$\{v(z)\}^{\mathrm{T}} = \{v, \; v', \; v'', \; v'''\} \tag{192}$$

и столбец начальных параметров —

$$\{v(0)\}^{\mathrm{T}} = \{v(0), \; v'(0), \; v''(0), \; v'''(0)\}. \tag{193}$$

Элементы нормальной фундаментальной матрицы легко установить из уравнений (190). Решение (191) называется решением дифференциального уравнения (185) в матричной форме.

Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы. Ранее была определена критическая сила для стержня с двумя шарнирными опорами по концам (формула Эйлера). Рассмотрим на нескольких примерах другие случаи закрепления.

Пример 1. *Устойчивость консольного стержня под действием сжимающей силы.*

Краевые условия задачи таковы:

$$v(0)=0,\quad v'(0)=0,\quad v''(l)=0,\quad v'''(l)=-\frac{N}{EJ_x}v'(l)=-\lambda^2 v'(l).$$

Из решения (190) для краевых условий находим

$$v''(0)\cos\lambda l+v'''(0)\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l=0, \tag{194}$$

$$-v''(0)\lambda\sin\lambda l+v'''(0)\cos\lambda l=-\lambda^2\left(v''(0)\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l+v'''(0)\frac{1}{\lambda^2}(1-\cos\lambda l)\right). \tag{195}$$

Из уравнения (195) получаем $v'''(0)=0$, и уравнение (194) дает

$$v''(0)\cos\lambda l=0.$$

Так как $v''(0)\neq 0$, то из условия $\cos\lambda l=0$ находим $\lambda l=k\pi/2$ $(k=1,2,3,\ldots)$. Критическое значение $(k=1)$

$$N_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 EJ_x}{4l^2} \tag{196}$$

получилось в четыре раза меньшим, чем для стержня той же длины, но с шарнирными опорами. Этот результат вполне естествен, так как консольный стержень работает в тех же условиях, что и шарнирно опертый стержень двойной длины (рис. 12.36). Полученное решение дает не только величины критического усилия (196), но и форму прогиба. Из формулы (187) находим

$$v(z)=v''(0)V_3(z)=C(1-\cos\lambda z), \tag{197}$$

где C — произвольная постоянная.

Ввиду практического значения рассматриваемой задачи приведем обычное элементарное решение. Будем использовать уравнение (163):

$$EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}=-M_x(z)=N(v(l)-v(z)),$$

или

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\lambda^2 v=\lambda^2 v(l). \tag{198}$$

Общее решение этого уравнения можно представить так:

$$v(z)=C_1\cos\lambda z+C_2\sin\lambda z+v(l). \tag{199}$$

Из краевых условий при $z=0$ находим

$$v(0)=C_1+v(l)=0,\quad v'(0)=-\lambda C_2=0.$$

Таким образом, решение (199) приобретает вид

$$v(z)=v(l)(1-\cos\lambda z). \tag{200}$$

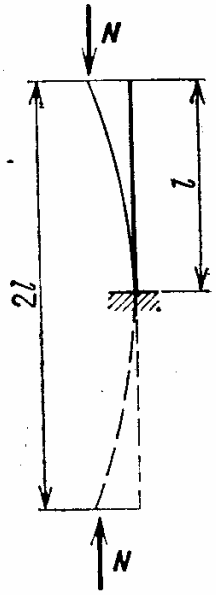


Рис. 12.36. Сравнение значений критической силы при консольном и шарнирном закреплении

В равенстве (200) $v(l)$ — неопределенный прогиб в конце стержня (см. рис. 12.35). При $z=l$ равенство (200) сохраняется, если $\cos\lambda l=0$, что приводит к формуле (196).

В рассматриваемом частном случае решение получилось простым, но менее общим, так как краевые условия использовались в неявной форме.

Пример 2. *Устойчивость стержня с двумя заделанными сечениями* (рис. 12.37). Краевые условия будут такими:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \qquad v(l) = 0, \quad v'(l) = 0.$$

Из последних краевых условий с учетом равенств (190) получаем

$$v''(0)\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda l) + v'''(0)\frac{1}{\lambda^2}\left(l - \frac{1}{\lambda}\sin \lambda l\right) = 0,$$

$$v''(0)\frac{1}{\lambda}\sin \lambda l + v'''(0)\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda l) = 0.$$

Определитель этих уравнений должен обращаться в нуль, что дает

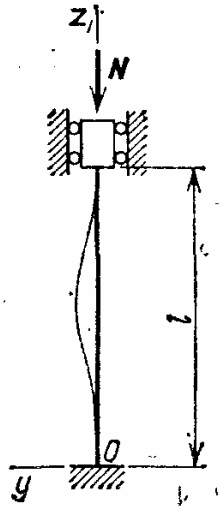


Рис. 12.37. Устойчивость стержня с двумя заделанными сечениями

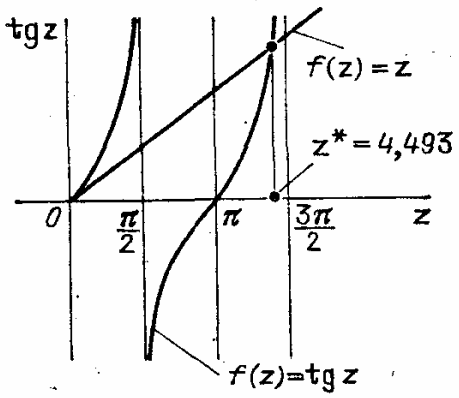


Рис. 12.38. Схема решения уравнения

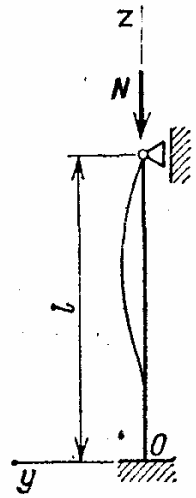


Рис. 12.39. Устойчивость стержня с одним заделанным и другим шарнирным концами

$(1 - \cos \lambda l)^2 + \sin^2 \lambda l - \lambda l \sin \lambda l = 0$, или

$$2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l = 4 \sin^2 \frac{\lambda l}{2} - 2\lambda l \sin \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2} = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$\sin \frac{\lambda l}{2} = 0, \tag{201}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} = \frac{\lambda l}{2}. \tag{202}$$

Наименьшие корни этих уравнений имеют вид

$$\frac{\lambda l}{2} = \pi, \tag{203}$$

$$\frac{\lambda l}{2} = 4{,}493 \approx \frac{\pi}{0{,}7}. \tag{204}$$

Наименьшее значение критической силы соответствует значению (203)

$$N_{кр} = 4\pi^2 E J_x / l^2. \tag{205}$$

Замечание. Схема решения уравнения $\operatorname{tg} z \approx z$ показана на рис. 12.38. Так как при малых z имеем $\operatorname{tg} z > z$, то пересечение прямой $f(z) = z$ и тан-

генсоиды получается при значении z^*, несколько меньшем $3\pi/2 = 4{,}71$. Точное значение корня $z^* = 4{,}493$.

Пример 3. *Устойчивость стержня с одним заделанным и другим шарнирным концами* (рис. 12.39).

Краевые условия имеют вид

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v''(l) = 0.$$

Из решения (190) находим

$$v''(0)\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda l) + v'''(0)\frac{1}{\lambda^2}\left(l - \frac{1}{\lambda}\sin \lambda l\right) = 0,$$

$$v''(0)\cos \lambda l + v'''(0)\frac{1}{\lambda}\sin \lambda l = 0.$$

Из равенства нулю определителя уравнения получаем

$$\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda l = \lambda l.$$

Наименьший корень этого уравнения (см. рис. 12.38) равен

$$\lambda l = 4{,}493 \approx \pi/0{,}7.$$

Критическая сила составит

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 E J_x}{(0{,}7l)^2}. \tag{206}$$

Приведенная длина стержня. Обобщенная формула Эйлера. Разобранные примеры показывают, что критическое значение сжимающего осевого усилия на стержень можно выразить по формуле

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l)^2}, \tag{207}$$

где νl — приведенная длина стержня. Коэффициенты приведения:

$\nu = 1$ — шарнирное закрепление обоих концов,

$\nu = 2$ — консольный стержень,

$\nu = 0{,}5$ — стержень с двумя заделками,

$\nu = 0{,}7$ — стержень с заделкой и шарнирной опорой.

Формула (207) называется обобщенной формулой Эйлера. Напомним, что она справедлива, если напряжения и деформации в стержне в момент потери устойчивости находятся в упругой области:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{F(\nu l)^2} \leqslant \sigma_{пц}, \tag{208}$$

где $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала. Величина

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} \tag{209}$$

называется *минимальным радиусом инерции* поперечного сечения.

Введем еще одно важное понятие — гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}. \tag{210}$$

Тогда обобщенную формулу Эйлера можно представить в простой форме:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{211}$$

Условие (208) ограничивает область применения формулы Эйлера.

Минимальное значение гибкости, ниже которой формула Эйлера перестает быть пригодной, равно

$$\lambda_{\min} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{212}$$

Например, для малоуглеродистой стали при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_т = 200$ МПа

$$\lambda_{\min} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}} \approx 99.$$

Формулу Эйлера можно применять, если $\lambda > \lambda_{\min}$.

Замечание. Критическое напряжение, конечно, является сжимающим. В задачах устойчивости по традиции, чтобы устранить знак «минус» в расчетных формулах, критические сжимающие напряжения считаются положительными.

Интегральное уравнение устойчивости стержня. Рассмотрим стержень переменного сечения под действием распределенных и сосредоточенных усилий (рис. 12.40).

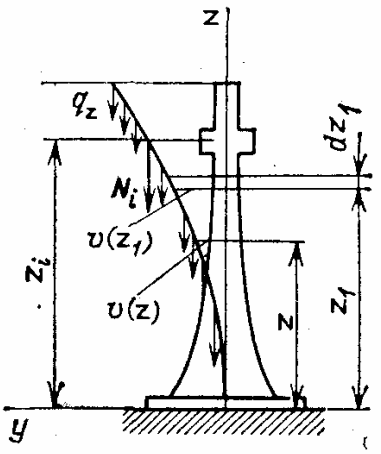


Рис. 12.40. Устойчивость стержня переменного сечения

Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = -\sum_{i=1}^{n} \left[1 - H\left(z, \tilde{z}_i\right)\right] N_i (v_i - v(z)) - \int_z^l q_z(z_1)(v(z_1) - v(z))dz_1, \tag{213}$$

где функция Хевисайда

$$H\left(z, \tilde{z}_i\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant \tilde{z}_i, \\ 1 & \text{при } z > \tilde{z}_i. \end{cases}$$

К стержню в n сечениях $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n$ приложены сжимающие усилия $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Изгибающий момент от силы N_i в сечении $z = \tilde{z}_i$ появляется при $z < \tilde{z}_i$, что и учитывается с помощью функции Хевисайда.

Интегрируя дважды в пределах от 0 до z уравнение (163) и учитывая краевые условия $v(0)=0, \frac{dv}{dz}(0)=0$, находим

$$v(z)=-\int_0^z\int_0^{z_1}\frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1. \tag{214}$$

Подставляя значение $v(z)$ в уравнение (213), получаем однородное интегральное уравнение относительно изгибающего момента $M_x(z)$:

$$M_x(z)=KM_x, \tag{215}$$

где оператор равен

$$KM_x=\sum_{i=1}^{n}\left[1-H(z,\tilde{z}_i)\right]N_i\int_z^{\tilde{z}_i}\int_0^{z_1}\frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1+$$

$$+\int_z^l q_z(z_1)\int_z^{z_1}\int_0^{z_2}\frac{M_x(z_3)}{EJ_x(z_3)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1. \tag{216}$$

Уравнение устойчивости (215) позволяет определить значения усилий N_i и распределенной нагрузки $q_z(z)$, приводящие к потере устойчивости. Будем считать, что относительные значения нагрузок известны, например, по отношению к N_1:

$$N_i=\lambda_i N_1, \qquad \int_0^l q_z(z)\,dz=\lambda_q N_1. \tag{217}$$

Тогда в критическом состоянии ($N_1=N_{кр}$) получим

$$M_x=N_{кр}KM_x, \tag{218}$$

где оператор равен

$$KM_x=\sum_{i=1}^{n}\left[1-H(z,\tilde{z}_i)\right]\lambda_i\int_z^{\tilde{z}_i}\int_0^{z_1}\frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1+$$

$$+\lambda_q\left(\int_0^l q_z(z)\,dz\right)^{-1}\int_0^l q_z(z_1)\int_z^{z_1}\int_0^{z_2}\frac{M_x(z_3)}{EJ_x(z_3)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1, \tag{219}$$

где значения λ_i и λ_q известны. Уравнение (219) пригодно и для случая, когда некоторые усилия N_j являются растягивающими. Они вводятся в уравнение со знаком минус ($\lambda_j<0$).

Уравнение (218) решается методом последовательных приближений. В первом приближении полагают

$$M_{x(1)}=1-z^2/l^2. \tag{220}$$

Приравнивая последующее и исходное приближения при $z=0$, находим

$$N_{\text{кр}(1)}=\frac{1}{KM_{x(1)}|_{z=0}} \tag{221}$$

и т. д.

Пример. Рассмотрим устойчивость консольного стержня постоянного сечения под действием усилия (см. рис. 12.35).

Оператор KM_x (уравнение (219)) для рассматриваемого случая ($\tilde{z}_1=l$, $N_1=N$, $H(z,\ l)=0$) равен

$$KM_x=\frac{1}{EJ_x}\int_z^l\int_0^{z_1}M_x(z_2)\,dz_2\,dz_1.$$

Значение $KM_{x(1)}$ при условии (220) равно

$$KM_{x(1)}=\frac{1}{EJ_x}\int_z^l\int_0^{z_1}\left(1-\frac{z_2^2}{l^2}\right)dz_2dz_1=\frac{1}{EJ_x}\int_z^l\left(z_1-\frac{1}{3}\frac{z_1^3}{l^2}\right)dz_1$$

или

$$KM_{x(1)}=\frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}(l^2-z^2)-\frac{1}{12l^2}(l^4-z^4)\right].$$

Первое приближение дает

$$N_{\text{кр}(1)}=\frac{1}{KM_{x(1)}|_{z=0}}=\frac{12}{5}\frac{EJ_x}{l^2}=2{,}40\,\frac{EJ_x}{l^2}.$$

Точное значение равно

$$N_{\text{кр}}=\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ_x}{l^2}=2{,}47\,\frac{EJ_x}{l^2}.$$

Устойчивость стержней при упругопластических деформациях. Модуль Кармана. Рассмотрим случай, когда $\sigma_{\text{кр}}\geqslant\sigma_T$ и деформация стержня происходит в пластической области.

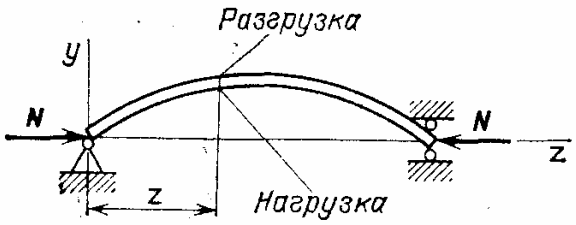


Рис. 12.41. Точки разгрузки и нагрузки при боковом прогибе стержня после предварительного сжатия

После предварительного сжатия напряжениями $\sigma=-\sigma_{\text{кр}}$ начинается изгиб стержня и на стороне растяжения (рис. 12.41) возникает разгрузка, а на стороне сжатия продолжается нагружение. Состояние материала стержня после предварительного сжатия характеризуется точкой (рис. 12.42). При изгибе получается приращение напряжений, причем в силу закона разгрузки (разд. 19)

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon&=\frac{\Delta\sigma}{E}\qquad\text{(разгрузка)},\\ \Delta\varepsilon&=\frac{\Delta\sigma}{E_{\text{к}}}\qquad\text{(нагрузка)},\end{aligned}\tag{222}$$

где E и $E_{\text{к}}$ — модуль упругости и касательный модуль.

При нагружении изгибом предварительно сжатого (или растянутого) в пластической области стержня материал стержня ведет себя как разномодульный. Уравнение изгиба стержня (см. рис. 12.41) имеет вид

$$B_x \frac{d^2v}{dz^2} = -Nv, \qquad (223)$$

где B_x — жесткость стержня на изгиб.

Для диаграммы деформирования с линейным упрочнением имеем

$$B_x = E_{кар} J_x, \qquad (224)$$

где $E_{кар}$ — модуль Кармана.

Для прямоугольного сечения стержня

$$E_{кар} = \frac{4EE_к}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_к})^2}.$$

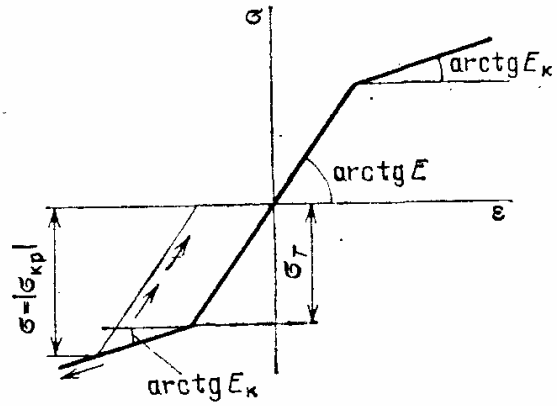


Рис. 12.42. Зависимость напряжение — деформация при анализе устойчивости сжатого стержня

Для двутаврового сечения, если пренебречь моментом инерции стенки,

$$E_{кар} = \frac{2EE_к}{E+E_к}.$$

Существенно отметить, что всегда

$$E_к < E_{кар} < E. \qquad (225)$$

Из уравнения (223) точно так же, как и для упругого стержня, получаем

$$N_{кр} = \pi^2 E_{кар} J_x / l^2, \qquad (226)$$

что меньше критического значения по формуле Эйлера.

Появление пластических деформаций снижает устойчивость конструкций, делает их более податливыми.

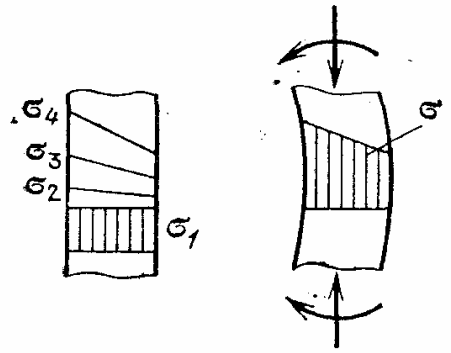


Рис. 12.43. Изгиб в условиях продолжающегося нагружения осевыми силами (распределение напряжений в разные моменты нагружения)

Устойчивость стержней в условиях продолжающегося нагружения в пластической области. Наиболее неблагоприятный случай для устойчивости — потеря устойчивости при таком возрастании нагрузки, когда, несмотря на изгиб, напряжения сжатия возрастают во всех точках сечения (рис. 12.43).

Тогда в условиях пластической области

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{E_к}\Delta\sigma. \qquad (227)$$

Для материалов с линейным упрочнением ($E_к = \text{const}$) можно считать при анализе дополнительного изгиба, что материал имеет «модуль упругости» $E_к$. Выражение для критической нагрузки будет таким:

$$N_{кр} = \pi^2 E_к J_{min}/l^2. \tag{228}$$

Эта формула, полученная Энгессером — Шенли, совпадает с формулой Эйлера, где модуль упругости E заменяется на касательный модуль $E_к$.

В другой форме

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2}. \tag{229}$$

Формулы (228) и (229) справедливы при условии

$$\sigma_{кр} \geqslant \sigma_T. \tag{230}$$

Если

$$\frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2} < \sigma_T, \tag{231}$$

то принимается $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

Таким образом, в упругопластической области

$$\sigma_{кр} = \left\{ \left. \frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2} \right| \sigma_T \right|_{max} < \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{232}$$

Значение $\sigma_{кр}$ принимается наибольшим из двух указанных формулой (232) при условии, что любое из выбранных значений меньше критического напряжения по формуле Эйлера.

Замечание. Любопытна история вывода формулы Энгессера — Шенли. Работы Эйлера по устойчивости стержней были выполнены еще в 1744 г. и долгое время не находили практического применения. К ним обратились во второй половине XIX века, когда началось возведение железных конструкций, особенно железнодорожных мостов. Тогда выяснилось, что для коротких стержней формула Эйлера дает завышенные и, следовательно, опасные для практики значения напряжений. Причина явления — работа стержня в неупругой области — была установлена русским инженером Ф. С. Ясинским. Вскоре была опубликована первая статья Энгессера (1889 г.), в которой была предложена формула (228). Эта работа подвергалась критике, так как не принималось во внимание явление разгрузки. Задача устойчивости стержня с учетом разгрузки была решена Карманом. Энгессер признал правильными критические замечания и отказался от формулы (228). В 1947 г. Шенли вновь вернулся к ней, считая ее справедливой в условиях продолжающегося нагружения.

Следует отметить, что в упругопластической области в отличие от упругой задача становится физически нелинейной и прогиб стержня не может быть неопределенной величиной, как в задачах о собственных значениях.

Формула Энгессера — Шенли справедлива как нижняя граница начала выпучивания (изгиба) стержня, но не описывает его дальнейшее поведение.

Обобщенные кривые устойчивости связывают значения критического напряжения $\sigma_{кр}$ и гибкости в упругой и упругопластической областях. Параллельно кривой $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ строится кривая деформирования (σ, ε). На рис. 12.44 дана схематизированная кривая деформирования с линейным упрочнением. При $\sigma_{кр} < \sigma_т$ $(\lambda > \lambda_{пред})$ справедлива гипербола Эйлера (зависимость между $\sigma_{кр}$ и λ гиперболического типа)

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2.$$

При напряжениях $\sigma_{кр} > \sigma_т$ используется гипербола Энгессера — Шенли

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2}.$$

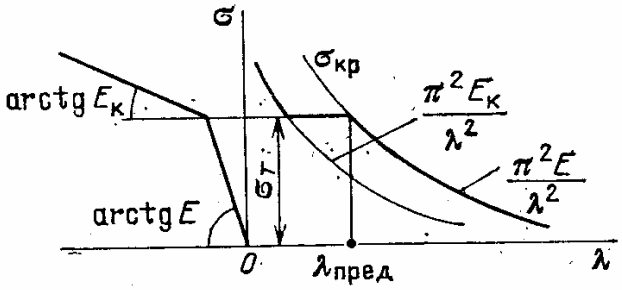


Рис. 12.44. Обобщенные кривые устойчивости

Значение $\sigma_{кр} = \sigma_т$ соответствует горизонтальному участку кривой изменения λ.

Практические расчеты на устойчивость. При действии на стержень сжимающей силы N запас устойчивости определяется следующим равенством:

$$n_у = N_{кр}/N, \qquad (233)$$

где $N_{кр}$ — усилие, вызывающее потерю устойчивости стержня (появление новой формы равновесия стержня в изогнутом состоянии).

Еще задолго до приближения N к $N_{кр}$ в стержне могут возникнуть большие прогибы в результате эксцентричного приложения усилия, наличия первоначального искривления и т. п.

Запас устойчивости обычно назначают для различных материалов в пределах $n_у = 1{,}6—5$, причем для стержней с большой гибкостью значение $n_у$ принимают бóльшим, так как для таких стержней влияние начальных отклонений сказывается сильнее.

Запас устойчивости можно представить в виде

$$n_у = \sigma_{кр}(\lambda)/\sigma, \qquad (234)$$

где $\sigma_{кр} = N_{кр}/F$, $\sigma = N/F$ — критическое напряжение и предельное напряжение на сжатие в стержне (в задачах устойчивости по традиции напряжения сжатия считаются положительными).

Значение $\sigma_{кр}(\lambda)$ определяется по зависимости типа рис. 12.44 или по экспериментальным данным. При проектировочном расчете, когда требуется выбрать тип сечения (трубчатое, коробчатое и т. п.) и его размеры или определить их в процессе расчета, используется метод последовательных приближений.

Расчетные уравнения имеют вид

$$\frac{N}{F} = \frac{\sigma_{кр}(\lambda)}{n_у}, \quad \lambda^2 = \frac{(\nu l)^2 F}{J_{min}}. \qquad (235)$$

Сначала задаются типом и размерами сечения (величинами $F_{(1)}$ и $J_{\min(1)}$) и находят

$$\sigma_{(1)} = \frac{N}{F_{(1)}}, \quad \sigma_{кр(1)} = \sigma_{кр}(\lambda_{(1)}), \quad \lambda^2_{(1)} = \frac{(\nu_l)^2 F_{(1)}}{J_{\min(1)}}.$$

Если $\sigma_{кр(1)}/\sigma_{(1)} < n_y$, то повторяют расчет, выбирая бóльшие размеры. При $\sigma_{кр(1)}/\sigma_{(1)} > n_y$ во втором приближении размеры сечения уменьшают или расчет заканчивается, если превышение невелико.

Замечание. В строительной технике распространен расчет на устойчивость с помощью «коэффициента ослабления» φ, при котором допускаемое напряжение на устойчивость равно

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-] = \varphi \frac{\sigma_T}{n},$$

где $[\sigma_-] = \sigma_T/n$ — допускаемое напряжение на сжатие.

Значения коэффициента φ в зависимости от λ рекомендуются специальными таблицами. Техника расчета приводится во всех курсах сопротивления материалов. Метод обладает принципиальным недостатком — он не дает отчетливого представления о действительном запасе устойчивости стержня, и его рассмотрение опускаем.

Напомним, что цель расчета не число, а понимание.

ГЛАВА 13

МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ

При построении моделей прочностной надежности необходимо знать условия разрушения материала конструкции. Соотношения, связывающие параметры работоспособности в момент разрушения с характеристиками материала, называются *моделями разрушения.*

Они называются моделями, так как на определенном уровне схематизируют сложный процесс разрушения, зависящий от действующих напряжений и свойств материала, характера нагружения и целого ряда других факторов. Модели разрушения различаются в зависимости от условий нагружения, в первую очередь от числа циклов нагружения, от свойств материала (пластичности или хрупкости) и, наконец, могут быть представлены в детерминированной или статистической формах. В детерминированных моделях (основной вид моделей разрушения при практическом использовании) действующие напряжения и характеристики материала имеют вполне определенные (детерминированные) значения. Обычно рассматриваются наиболее опасные расчетные случаи, когда действующие напряжения имеют максимальные значения, а характеристики материала соответствуют нижним границам технических условий.

В статистических моделях напряжения и (или) параметры материала считаются величинами случайными, представленными средними значениями и среднеквадратичными отклонениями. В дальнейшем основное внимание уделяется детерминированным моделям разрушения.

45. Модели статического и длительного разрушения

Вводные замечания. Статическое нагружение — медленное возрастание нагрузки от нуля до максимальной величины. Предполагается, что нагружение осуществляется однократно. Примерами статического нагружения могут служить нагружение металлического каркаса зданий, сосуда при гидравлическом испытании, болта при его затяжке. Практически к числу статического нагружения относят случай, когда нагружение повторяется несколько раз, однако встречается и заметное понижение прочности даже после малого числа циклов нагружений ($N < 10$).

В ряде случаев разрушение происходит в результате продолжительного действия нагрузки — длительное разрушение (см. разд. 15). Модели статического и длительного разрушения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{экв} = f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3;\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots) = \sigma_{кр}(T,\ t), \qquad (1)$$

где $\sigma_{экв}$ — эквивалентное напряжение; σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; λ_0, λ_1, ... — параметры, зависящие от механических свойств материала. Величина $\sigma_{кр}$ представляет критическое напряжение, зависящее в общем случае от температуры T и времени нагружения t. Для статической прочности принимается $\sigma_{кр} = \sigma_b$, где σ_b — предел прочности материала при растяжении; для длительной прочности $\sigma_{кр} = \sigma_{дл}$, где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности.

Если во всех точках материала конструкции

$$\sigma_{экв} < \sigma_{кр}, \qquad (2)$$

условия прочности считаются выполненными; при

$$\sigma_{экв} \geqslant \sigma_{кр} \qquad (3)$$

в опасной точке наступает разрушение. Величина $\sigma_{экв}$ в равенстве (1) назы-

вается *критерием прочности*. Эквивалентное напряжение приводит сложное напряженное состояние к эквивалентному по опасности разрушения одноосному растяжению. Прочность при одноосном растяжении считается известной по экспериментальным данным.

Модели статического разрушения пластичных материалов. У пластичных материалов разрушение связано с появлением значительной деформации сдвига. Для таких материалов, как показали экспериментальные исследования, в качестве критерия разрушения могут быть приняты интенсивность напряжений или максимальные касательные напряжения.

Критерий интенсивности напряжений. В соответствии с этим критерием

$$\sigma_{экв} = \sigma_i, \tag{4}$$

где

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} \tag{5}$$

— интенсивность напряжений. Модель статического разрушения имеет вид

$$\sigma_i = \sigma_b. \tag{6}$$

Если оси x, y, z являются главными осями напряженного состояния, то

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}. \tag{7}$$

В частном случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y} = \sigma_b \tag{8}$$

изображается в плоскости главных напряжений в виде эллипса (рис. 13.1), оси которого повернуты на 45° к осям x и y. Точка A соответствует одноосному растяжению по оси x, точка C — одноосному растяжению по оси y. Наибольшее «превышение» ординаты эллипса над прямой $\sigma_y = \sigma_b$ получается при $\sigma_x = \sigma_y/2$ и составляет $0{,}115\sigma_b$. Если точка (σ_x, σ_y), изображающая напряженное состояние, находится внутри эллипса — материал остается прочным, при выходе этой точки за границы эллиптической области происходит разрушение.

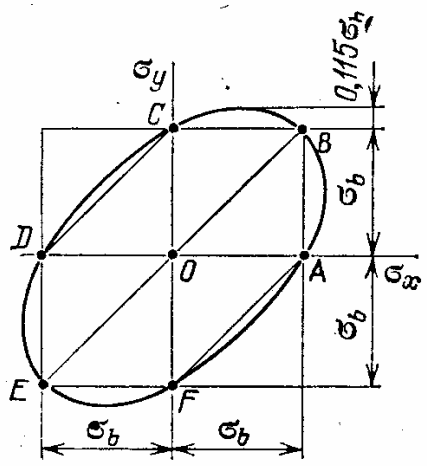


Рис. 13.1. Критерии статической прочности для пластичных материалов в плоскости главных напряжений σ_x и σ_y

Критерий интенсивности напряжений предписывает одинаковую прочность при растяжении и сжатии, так как интенсивность напряжений в обоих случаях одинакова.

Замечания. 1. Критерии прочности в курсах сопротивления материалов было принято называть теориями прочности. Такое название нельзя признать удачным, так как теоретические обоснования критериев прочности невелики. Их следует считать разумными обобщениями экспериментальных данных.

2. Критерий интенсивности напряжений был предложен Губером (1902 г.) и независимо Мизесом (1913 г.) на основании совершенно различных исходных предположений. При постоянном значении σ_i оказываются постоянными:

а) касательное напряжение в октаэдрической площадке;

б) удельная потенциальная энергия изменения формы;

в) среднее значение касательного напряжения по всем площадкам, проходящим через точку.

3. Критерий прочности для пластичных материалов часто используется как критерий появления пластических деформаций

$$\sigma_i = \sigma_T, \tag{9}$$

где σ_T — предел текучести при одноосном растяжении. Значение σ_i, так же как и максимальное значение касательного напряжения τ_{max}, отражает интенсивность сдвига в рассматриваемой точке тела.

Критерий максимальных касательных напряжений. Ответственными за разрушение признаются касательные напряжения. Разрушение наступает, если значение максимального касательного напряжения равно

$$\tau_{max} = \tau_b, \tag{10}$$

где τ_b — предел прочности материала при действии касательных напряжений. Применяя условие (10) для растяжения стержня и учитывая, что при растяжении стержня

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma,$$

получим

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_b. \tag{11}$$

Величина τ_{max} при сложном напряженном состоянии равна

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \tag{12}$$

где σ_1 и σ_3 — наибольшее (в алгебраическом смысле) и наименьшее главные напряжения. Из соотношений (11) и (12) получаем модель разрушения

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_b$$

или

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_b. \tag{13}$$

Если главные напряжения σ_x, σ_y, σ_z не упорядочены по величине, то $\sigma_{экв}$ равно наибольшей по модулю разности

$$\sigma_{экв} = \left\{\begin{matrix} |\sigma_x - \sigma_y| \\ |\sigma_y - \sigma_z| \\ |\sigma_z - \sigma_x| \end{matrix}\right\}_{max} = \sigma_b. \tag{14}$$

Рассмотрим двухосное напряженное состояние ($\sigma_z = 0$), и пусть

σ_x и σ_y — главные напряжения. Если $\sigma_x > 0$ и $\sigma_y > 0$ (первая четверть на рис. 13.1), то при $\sigma_x > \sigma_y$ имеем $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_3 = 0$, и условия (13) и (14) дают $\sigma_x = \sigma_b$ (прямую AB на рис. 13.1) при тех же условиях ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$), но при $\sigma_y > \sigma_x$ получаем $\sigma_y = \sigma_b$ (прямую CB). Если $\sigma_x < 0$, $\sigma_y > 0$ (вторая четверть), то $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_x$, и тогда по условию (13) имеем

$$\sigma_y - \sigma_x = \sigma_b. \tag{15}$$

Уравнение (15) изображается прямой DC. Подобным образом находим, что условие (13) при плоском напряженном состоянии изображается шестиугольником $ABCDEF$.

Как видно из рис. 13.1, модели разрушения для пластичных материалов по критерию интенсивности напряжений или по критерию максимальных касательных напряжений дают довольно близкие результаты.

Замечания. 1. Критерий максимальных касательных напряжений был впервые указан Треска на основании экспериментальных исследований и использован Сен-Венаном как критерий пластичности.

2. Экспериментальные данные свидетельствуют, что критерий максимальных касательных напряжений уступает по точности критерию интенсивности напряжений, однако он иногда оказывается проще для анализа предельных состояний конструкции, и его использование «идет в запас прочности».

Предельные поверхности по критериям интенсивности напряжений и максимальных касательных напряжений. Для двухосного напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) на рис. 13.1 были указаны предельные кривые по критериям интенсивности напряжений (эллипс) и максимальных касательных напряжений (шестиугольник, вписанный в эллипс). Для точек предельных кривых выполняются условия (6) или (14). При объемном напряженном состоянии критерии прочности характеризуются предельными поверхностями, в точках которых значение критерия постоянно и равно предельному значению.

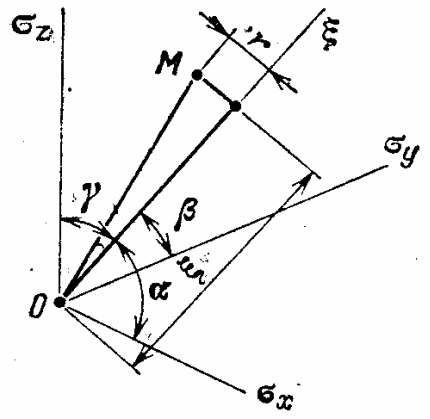


Рис. 13.2. Пространство главных напряжений. Точка $M(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ характеризует напряженное состояние в соответствующей точке материала; ξ — гидростатическая ось ($\alpha = \beta = \gamma$)

Рассмотрим сначала критерий интенсивности напряжений. Пусть σ_x, σ_y и σ_z представляют главные напряжения (рис. 13.2). В пространстве главных напряжений напряженное состояние характеризуется точкой M. Ось ξ одинаково наклонена к осям x, y и z, а ее направляющие косинусы равны

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ось ξ называется гидростатической осью, так как величина

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

пропорциональна среднему (гидростатическому) напряжению. Проведем плоскость D, содержащую точку M и перпендикулярную оси ξ; эта плоскость называется девиаторной. Расстояние r от точки M до оси ξ найдем по формуле

$$r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x) = \frac{2}{3}\sigma_i^2$$

или

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i. \tag{16}$$

Модель статического разрушения по критерию интенсивности напряжений соответствует постоянному значению

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_b \tag{17}$$

и, следовательно, изображается круговым цилиндром, ось которого совпадает с гидростатической осью (рис. 13.3). При пересечении

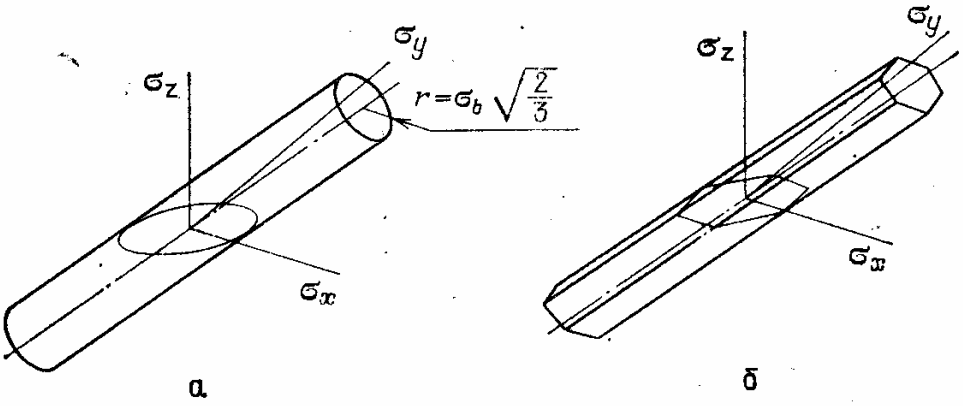


Рис. 13.3. Предельные поверхности по критерию интенсивности напряжений (*а*) и максимальных касательных напряжений (*б*)

цилиндра с плоскостью $\sigma_z = 0$ получается эллипс, изображенный на рис. 13.1*г*. Для критерия максимальных касательных напряжений предельная поверхность представляет правильную шестигранную призму, вписанную в цилиндр (см. рис. 13.3). При объемном напряженном состоянии возможен случай равномерного (гидростатического) растяжения

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma.$$

В этом случае оба критерия прогнозируют бесконечную прочность, что не соответствует физическому смыслу понятия прочности. При

объемном напряженном состоянии в тех случаях, когда все три главных напряжения растягивающие (но не обязательно одинаковые), модель статического нагружения пластичных материалов должна быть дополнена ограничением по наибольшим растягивающим напряжениям.

Замечание. Интенсивность напряжений обращается в нуль и при всестороннем равномерном сжатии. Опыты показывают, что при таком напряженном состоянии применяющиеся в технике материалы обладают практически неограниченной прочностью. В связи с этим не имеет места ограничение по наибольшим сжимающим напряжениям.

Модель статического разрушения пластичных материалов, дополненная условием отрыва. Условие отрыва состоит в ограничении значения наибольшего растягивающего напряжения:

$$\sigma_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_{\max} < S_к, \tag{18}$$

где $S_к$ — истинное сопротивление отрыву (разд. 12). В технических расчетах можно принять

$$S_к \approx \sigma_b(1 + \varepsilon_b), \tag{19}$$

где ε_b — удлинение материала при разрушении (в опытах на растяжение образцов). Предельная поверхность по критерию интенсивности напряжений, дополненная условием (18), показана на рис. 13.4. Модель статического разрушения пластических материалов выражается следующими условиями:

$$\sigma_i \geqslant \sigma_b \vee \sigma_1 \geqslant S_к, \tag{20}$$

где $\vee$ — знак логического суммирования — осуществление одного из событий или обоих вместе.

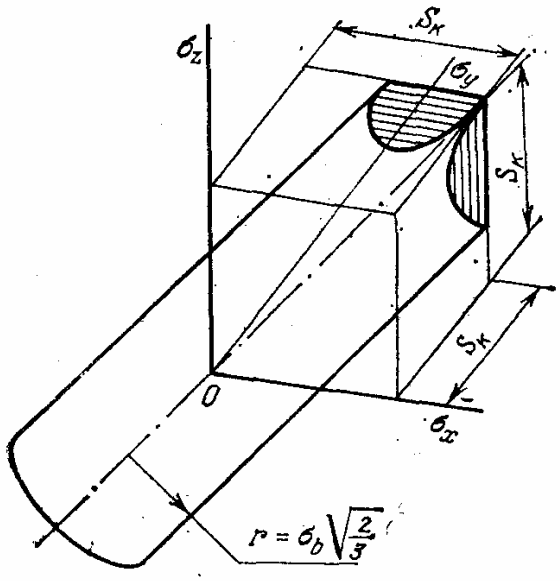


Рис. 13.4. Предельная поверхность по критерию интенсивности напряжений при ограничении растягивающих напряжений ($\sigma_1 < S_к$)

Условие статической прочности пластических материалов имеет вид

$$\sigma_i < \sigma_b \wedge \sigma_1 < S_к,$$

где $\wedge$ — знак логического умножения — одновременного осуществления событий.

Модели статического разрушения хрупких материалов. Хрупкие материалы отличаются малым удлинением при разрыве ($\delta < 3\%$) и малой ударной вязкостью ($a_n < 30$ Н/мм^2). Разрушение хрупких материалов происходит путем отрыва без значительных

следов пластических деформаций. Ответственными за хрупкие разрушения являются нормальные напряжения. Наиболее простая и часто применяемая модель статического разрушения хрупких материалов имеет следующий вид (рис. 13.5):

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_b, \tag{21}$$

где σ_1 — наибольшее растягивающее напряжение, σ_b — предел прочности материала при растяжении.

Условие (21) для плоского напряженного состояния выражается линиями C_2C_1CB и BAA_1A_2. Критерием прочности по условию (21) является наибольшее нормальное напряжение (в алгебраическом смысле)

$$\sigma_{экв} = \sigma_1. \tag{22}$$

В соответствии с условием (21) при действии сжимающих напряжений даже при одноосном сжатии разрушение невозможно. Опыты с хрупкими материалами показывают, что при сжатии они разрушаются по площадкам с максимальными касательными напряжениями при значении

$$\tau_b = \frac{1}{2}\sigma_{сж}, \tag{23}$$

где $\sigma_{сж}$ — предел прочности материала при сжатии.

Условию (23) соответствуют линии

$\sigma_x - \sigma_y = \sigma_{сж}$ (линия FA_1),

$\sigma_y - \sigma_x = \sigma_{сж}$ (линия DC_1)

и линии FE и ED.

Модель статического разрушения хрупких материалов имеет вид

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_b \vee \tau_{max} \geqslant \frac{1}{2}\sigma_{сж}. \tag{24}$$

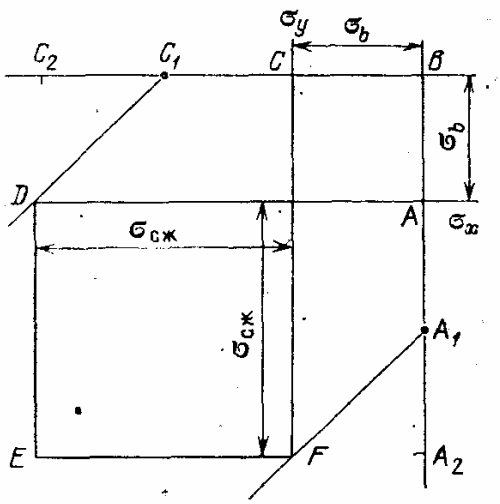


Рис. 13.5. Критерий наибольших растягивающих напряжений для хрупких материалов

На рис. 13.5 условиям (21) и (23) соответствует внешняя область для кривой DC_1CBAA_1FED.

Внутренняя область указанной кривой представляет условие прочности

$$\sigma_1 < \sigma_b \wedge \tau_{max} < \frac{1}{2}\sigma_{сж}.$$

Более общие модели статического разрушения. При построении моделей разрушения пластичных и хрупких материалов учитывались возможности разрушения путем среза или путем отрыва. Первый вид разрушения характерен для пластичных материалов, второй — для хрупких. Разделение материалов на пластичные и хрупкие по опытам на простое растяжение не является исчерпывающим. При всестороннем растяжении пластичный материал ведет себя как

хрупкий; при всестороннем сжатии хрупкий материал проявляет пластические свойства.

Более общие модели статической прочности учитывают взаимное влияние двух механизмов разрушения (среза и отрыва) и потому справедливы как для пластичных, так и для хрупких материалов.

Критерий Мора является дальнейшим развитием критерия максимальных касательных напряжений. Предполагается, что в момент разрушения в опасной площадке величина касательного напряжения зависит от величины и знака действующего в этой площадке нормального напряжения

$$\tau_* = f(\sigma_*). \tag{25}$$

В качестве опасной площадки принимается площадка с максимальными касательными напряжениями

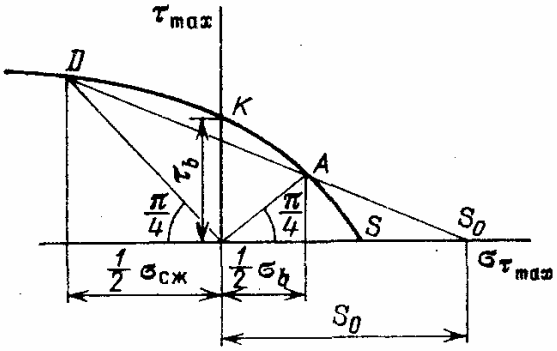


Рис. 13.6. Кривая предельных напряжений в плоскости $(\sigma_{\tau_{max}}, \tau_{max})$ по гипотезе Мора

тогда
$$\begin{aligned} \tau_* &= \tau_{max}; \\ \sigma_* &= \sigma_{\tau_{max}} \end{aligned} \tag{26}$$

— нормальное напряжение в площадке максимальных касательных напряжений.

В общем случае напряженного состояния

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \tag{27}$$

$$\sigma_{\tau_{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \tag{28}$$

где σ_1, σ_3 — наибольшее и наименьшее (в алгебраическом смысле) главные напряжения.

По гипотезе Мора прочность не зависит от промежуточного главного напряжения σ_2.

На рис. 13.6 представлена кривая предельных напряжений в плоскости $(\tau_{max}, \sigma_{\tau_{max}})$ по гипотезе Мора. Точка A соответствует одноосному растяжению, точка D — одноосному сжатию, точка K — кручению. В первом приближении предельная кривая заменяется прямой

$$\tau_{max} = a_1 \sigma_{\tau_{max}} + a_0, \tag{29}$$

где a_0, a_1 — параметры прямой.

Наиболее полная аппроксимация получается в том случае, когда прямая проводится через точки A и D. Тогда для точек A и D имеем

$$\frac{1}{2}\sigma_b = a_1 \frac{1}{2}\sigma_b + a_0, \quad \frac{1}{2}\sigma_{сж} = -a_1 \cdot \frac{1}{2}\sigma_{сж} + a_0,$$

где σ_b — предел прочности, $\sigma_{сж}$ — предел прочности при сжатии (абсолютная величина сжимающих напряжений при разрушении). Далее находим

$$a_0 = \frac{\sigma_b \sigma_{сж}}{\sigma_{сж} + \sigma_b},$$

$$a_1 = -\frac{\sigma_{сж} - \sigma_b}{\sigma_{сж} + \sigma_b}. \tag{30}$$

Уравнение (29) с учетом соотношений (27), (28) и (30) будет таким:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{\sigma_{сж} - \sigma_b}{\sigma_{сж} + \sigma_b}(\sigma_1 + \sigma_3) + 2\frac{\sigma_{сж}\sigma_b}{\sigma_{сж} + \sigma_b},$$

или, после простых преобразований,

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_3 = \sigma_b. \tag{31}$$

Предельное сопротивление отрыву S_0 (при $\tau_{max} = 0$) будет по (29) равно

$$S_0 = -\frac{a_0}{a_1} = \frac{\sigma_b \sigma_{сж}}{\sigma_{сж} - \sigma_b} = \frac{\sigma_b}{1 - \sigma_b/\sigma_{сж}}.$$

Если $\sigma_{сж}$ считается известным, то предел прочности на срез составит

$$\tau_b = a_0 = \frac{\sigma_b}{1 + \sigma_b/\sigma_{сж}}.$$

Эквивалентное напряжение (критерий Мора) в соответствии с условием (31) равно

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_3. \tag{32}$$

Если $\sigma_{сж} = \sigma_b$, то критерий Мора совпадает с критерием максимальных касательных напряжений. При $\sigma_{сж} \to \infty$ критерий Мора переходит в критерий наибольших растягивающих напряжений для хрупких материалов.

Предельную прямую можно провести через точку K (кручение, сдвиг) и A (растяжение), если известно экспериментальное значение τ_b. Тогда

$$a_0 = \tau_b,$$

$$a_1 = -(2\tau_b/\sigma_b - 1),$$

и критерий Мора будет таким:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3(\sigma_b/\tau_b - 1) = \sigma_b. \tag{33}$$

Предел прочности на сжатие и сопротивление отрыву прогнозируются

следующими величинами:

$$\sigma_{сж} = \frac{\sigma_b}{\sigma_b/\tau_b - 1}, \tag{34}$$

$$S_0 = \frac{\sigma_b}{2 - \sigma_b/\tau_b}. \tag{35}$$

Замечания. 1. При традиционном изложении теории прочности Мора (1902 г.) исходят из геометрической интерпретации с помощью кругов Мора. Предельная кривая представляется как огибающая предельных кругов Мора для различных напряженных состояний. Однако геометрическая интерпретация напряженного состояния с помощью кругов Мора не связана с механической трактовкой процесса разрушения и потому необязательна.

2. Критерий Мора принадлежит к числу двухпараметрических критериев — требуется знание двух экспериментальных характеристик материала (σ_b и $\sigma_{сж}$ или σ_b и τ_b). При задании σ_b и τ_b (см. рис. 13.6) получается более точная аппроксимация, но в более узком диапазоне напряженных состояний при $\sigma_1 > 0$.

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений по критерию Мора. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) предельная поверхность переходит в предельную линию (неправильный шестиугольник), показанную на рис. 13.7. В первой четверти ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$) величина $\sigma_3 = 0$ и критерий Мора совпадает с критерием максимальных касательных напряжений. Во второй четверти ($\sigma_x < 0$, $\sigma_y > 0$) $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_x$ и по равенству (32)

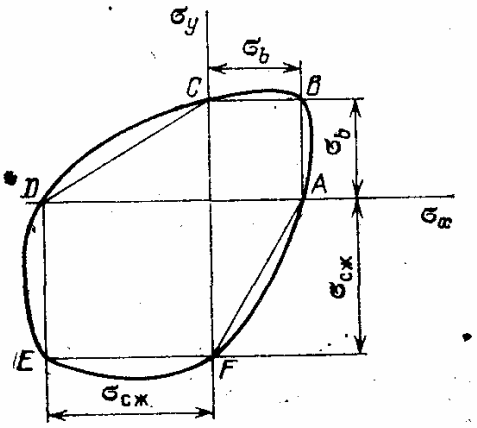


Рис. 13.7. Критерий Мора (шестиугольник) и критерий Писаренко — Лебедева (неправильный эллипс) для плоского напряженного состояния

$$\sigma_y - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_x = \sigma_b. \tag{36}$$

Уравнение (36) выражается прямой DC. В третьей четверти ($\sigma_x < 0$, $\sigma_y < 0$) $\sigma_1 = 0$, тогда по условию (32) имеем

$$-\sigma_3 = \sigma_{сж},$$

что соответствует прямым DE (при $|\sigma_x| > |\sigma_y|$) или EF (при $|\sigma_y| > |\sigma_x|$).

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений предстаавлена на рис. 13.8. В сечении плоскостью $\sigma_z = 0$ получается шестиугольник (см. рис. 13.7); вершина поверхности (точка S_0) лежит на гидростатической оси. При $\sigma_{сж} = \sigma_b$ точка S_0 уходит в бесконечность и поверхность на рис. 13.8, *а* совпадает с поверхностью на рис. 13.3, *б*.

Критерий Писаренко — Лебедева основан на существовании зависимости

$$\sigma_i = f(\sigma_1), \tag{37}$$

связывающей интенсивность напряжений σ_i и наибольшее нормальное напряжение σ_1 в момент разрушения (рис. 13.9). Заменяя в

первом приближении зависимость (37) прямой

$$\sigma_i = a_1\sigma_1 + a_0, \tag{38}$$

находим параметры a_1 и a_0 из условия, что прямая проходит через

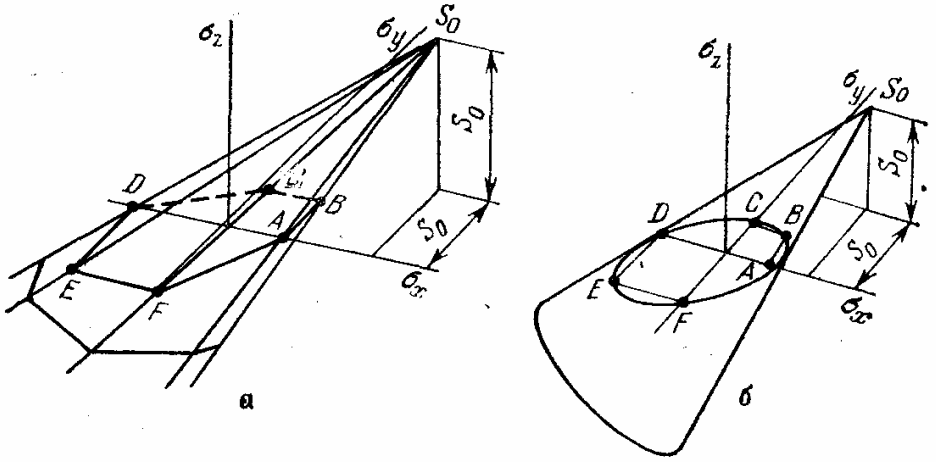


Рис. 13.8. Предельные поверхности в пространстве главных напряжений по критерию Мора (*а*) и по критерию Писаренко — Лебедева (*б*)

точки A и D (точки одноосного растяжения и сжатия). Получаем

$$a_1 = -(\sigma_{сж}/\sigma_b - 1), \quad a_0 = \sigma_{сж},$$

так как в точке D $\sigma_1 = 0$, $\sigma_i = \sigma_{сж}$, где $\sigma_{сж}$ — предел прочности на сжатие.

Из условия (38) следует

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\right)\sigma_1 = \sigma_b. \tag{39}$$

Эквивалентное напряжение по гипотезе Писаренко — Лебедева (критерий прочности) равно

$$\sigma_{экв} = \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\right)\sigma_1. \tag{40}$$

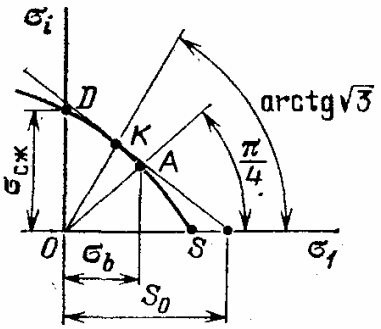


Рис. 13.9. Кривая предельных напряжений в плоскости (σ_i, σ_1) по гипотезе Писаренко — Лебедева

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений по критерию Писаренко — Лебедева. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) уравнение (39) представляет неправильный эллипс, описанный вокруг шестиугольника Мора (см. рис. 13.7). Предельная поверхность в пространстве главных напряжений представляет круговой конус, вершина которого лежит на оси, одинаково наклоненной к направлениям главных напряжений (см. рис. 13.8). Сопротивление отрыву по соотношению (39) равно

$$S_0 = \frac{\sigma_b}{1 - \sigma_b/\sigma_{сж}}.$$

Модели длительного разрушения. В современной технике часто встречаются конструкции, элементы которых работают при повышенных температурах (900°С и более). В этих условиях прочность конструкционных материалов, особенно металлов и их сплавов, существенно зависит от температуры и длительности нагружения.

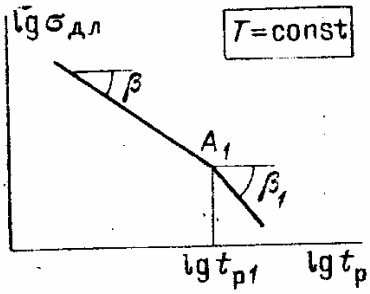


Рис. 13.10. Зависимость предела длительной прочности от времени нагружения (в логарифмических координатах)

Разрушение, наступающее вследствие длительного действия нагрузки, называется *длительным разрушением*. Связь между пределом длительной прочности $\sigma_{дл}$ и временем до разрушения $t_р$ устанавливается зависимостью

$$\sigma_{дл}^{m} t_р = C, \tag{41}$$

где $m = m(T)$, $C = C(T)$ — константы материала, зависящие от температуры.

В логарифмических координатах зависимость (41) выражается прямой линией. В некоторых случаях наблюдается перелом после времени нагружения $t_{р1}$ (рис. 13.10), и более общая зависимость имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{дл}^{m} t_р &= C \quad \text{при} \quad t_р < t_{р1}, \\ \sigma_{дл}^{m_1} t_р &= C_1 \quad \text{при} \quad t_р \geqslant t_{р1}. \end{aligned} \tag{42}$$

Константы материала связаны зависимостью, вытекающей из того, что точка A_1 принадлежит одновременно двум участкам:

$$\frac{1}{m}(\lg C - \lg t_{р1}) = \frac{1}{m_1}(\lg C_1 - \lg t_{р1}). \tag{43}$$

Модель длительного разрушения при стационарном (постоянном по времени) нагружении имеет вид

$$\sigma_{экв} = \sigma_{дл}(t,\ T), \tag{44}$$

где $\sigma_{дл}(t,\ T)$ — предел длительной прочности при растяжении, t и T — длительность и температура нагружения. Эквивалентное напряжение можно принимать по критерию Мора (31):

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{дл}}{\sigma_{дл.сж}}\sigma_3, \tag{45}$$

где $\sigma_{дл.\,сж}$ — предел длительной прочности на сжатие.

По экспериментальным данным получается

$$\sigma_{дл.\,сж} > 2\sigma_{дл}. \tag{46}$$

Принимая

$$\sigma_{дл.\,сж} = 2\sigma_{дл}, \tag{47}$$

получим

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3. \tag{48}$$

В качестве критерия длительной прочности используется критерий Сдобырева

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_1), \tag{49}$$

который можно рассматривать как критерий Писаренко — Лебедева при условии (47).

Модель длительного разрушения при нестационарном нагружении. Принципы линейного суммирования повреждений. Часто элементы конструкций работают на различных режимах нагружения.

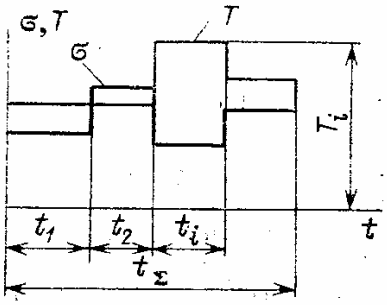


Рис. 13.11. Изменение напряжений и температур при нестационарном нагружении

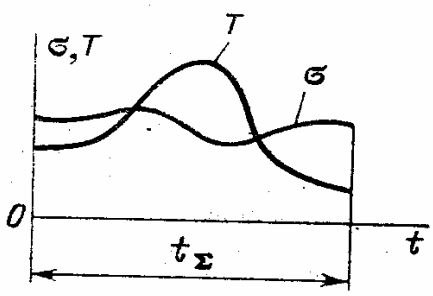


Рис. 13.12. Нестационарное нагружение при неправильном изменении режимов

Например, авиационный двигатель пассажирского самолета работает 2—4% своего ресурса на наиболее тяжелом (взлетном) режиме, 20—30% на номинальном режиме, остальное время на более легких режимах.

Допустим, что нагружение состоит из k режимов (рис. 13.11), причем на i-м режиме (в опасной точке) действуют температура T_i и напряжение σ_i; длительность i-го режима равна t_i; суммарное время работы обозначим t_Σ. Пусть t_{pi} составляет время до разрушения при непрерывной работе в условиях i-го режима (т. е. при температуре T_i и напряжении σ_i). Назовем *повреждением*, полученным материалом в результате работы на i-м режиме, величину

$$r_i = \frac{t_i}{t_{pi}}. \tag{50}$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant r_i \leqslant 1.$$

При $t_i = 0$ повреждение отсутствует, при $t_i = t_{pi}$ $(r_i = 1)$ материал разрушается полностью за счет работы на i-м режиме.

При работе на нескольких режимах в соответствии с *принципом линейного суммирования повреждений* разрушение наступает при

$$\frac{t_1}{t_{p1}} + \frac{t_2}{t_{p2}} + \ldots + \frac{t_k}{t_{pk}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t_{pi}} = 1. \tag{51}$$

Условие (51) представляет модель длительного разрушения при нестационарном нагружении. При непрерывном изменении режимов нагружения повреждение за время dt равно

$$dr = \frac{1}{t_p[\sigma(t), T(t)]}\,dt, \tag{52}$$

где $t_p(\sigma, T)$ — время до разрушения при напряжении σ и температуре T (в данное время t) (рис. 13.12).

Модель длительного разрушения при непрерывном изменении режимов имеет вид

$$\int_0^{t_\Sigma} dr = \int_0^{t_\Sigma} \frac{1}{t_p[\sigma(t)\,T(t)]} = 1. \tag{53}$$

Замечание. Принцип линейного суммирования повреждений был впервые выдвинут Пальгреном (1924 г.) при оценке долговечности шарикоподшипников. Для длительной прочности этот принцип был применен Робинсоном (1952 г.). Принцип получен как обобщение экспериментальных данных. Он может быть обоснован, если принять скорость развития повреждений равной

$$\frac{dr}{dt} = f(\sigma, T), \tag{54}$$

где $f(\sigma, T)$ — функция произвольной структуры, зависящая от напряжения и температуры.

Существенно, что время t не входит в явном виде в правую часть равенства (54), т. е. процессы старения (диффузии, коррозии и др.) исключаются из рассмотрения. Они считаются второстепенными по сравнению с влиянием напряжения и температуры.

Эквивалентные напряжения и запасы прочности при нестационарном нагружении. Рассмотрим длительную прочность на i-м режиме (рис. 13.13). Точка $A(\sigma_i, t_i)$ характеризует напряжения σ_i и длительность работы t_i на i-м режиме. Запас длительной прочности по напряжениям на i-м режиме

$$n_{\sigma_i} = \sigma_{pi}/\sigma_i.$$

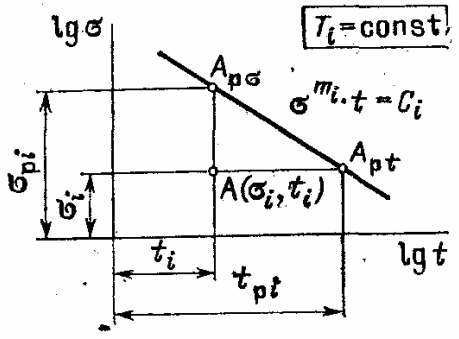


Рис. 13.13. Длительная прочность при работе на i-м режиме

Запас длительной прочности на i-м режиме по времени нагружения

$$n_{t_i} = t_{pi}/t_i. \tag{55}$$

Уравнение длительной прочности (41) позволяет установить важное соотношение между величинами n_{σ_i} и n_{t_i}. Учитывая, что точки $A_{p\sigma}$ и A_{pt} удовлетворяют уравнению длительной прочности

$$\sigma^{m_i} t = C_i, \tag{56}$$

запишем

$$\sigma_{pi}^{m_i} t_i = \sigma_i^{m_i} t_{pi} \tag{57}$$

или

$$\frac{t_i}{t_{pi}} = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{pi}}\right)^{m_i}. \tag{58}$$

В другой форме имеем

$$n_{t_i} = \left(n_{\sigma_i}\right)^{m_i}. \tag{59}$$

Запас по долговечности равен запасу по напряжениям в степени m_i. Так как показатель длительной прочности m лежит в пределах $m = 4, \ldots, 16$, то запас по долговечности значительно превышает запас по напряжениям. Условие линейного суммирования повреждений с учетом зависимости (58) представим в таком виде:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} + \ldots + \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{pk}}\right)^{m_k} = \frac{1}{n_{\sigma_1}^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{n_{\sigma_k}^{m_k}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}} = 1. \tag{60}$$

Допустим, что все режимы приводятся к условиям первого режима, но при действии эквивалентного напряжения $\sigma_{экв}$. При наличии только одного (первого) режима условие прочности (60) будет следующим:

$$\left(\frac{\sigma_{экв}}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} = \frac{1}{n_{\sigma_{экв}}^{m_1}} = 1. \tag{61}$$

Запишем равенство (60) так:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} \left(1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \ldots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}}\right) = 1. \tag{62}$$

Приравнивая выражения (61) и (62), находим

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \left(1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \ldots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}}\right). \tag{63}$$

Эквивалентное напряжение приведено к первому режиму, в качестве которого обычно принимают наиболее тяжелый (режим с минимальным запасом прочности). Из уравнений (60) и (61) получаем формулу для эквивалентного запаса прочности:

$$\frac{1}{n_{\sigma_{экв}}^{m_1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}}. \tag{64}$$

Соотношения (63) и (64) показывают, что основное значение для повреждаемости имеют режимы с наименьшими запасами прочности. Это обстоятельство используется для проведения ускоренных испытаний на надежность.

Прочность при наличии трещин. Линейная механика разрушения. В ряде случаев оказывается необходимым оценить прочность элементов конструкции при наличии трещин.

Трещины могут оказаться в результате пропуска при контроле технологических дефектов (литейных, ковочных и сварочных трещин) или возникнуть под действием внешних нагрузок. Влияние трещин на работоспособность конструкции зависит прежде всего от вида нагружения. При переменных нагрузках почти все конструкционные материалы резко снижают прочность при наличии трещин (в два-три раза и более), так как в вершине трещины образуется высокая концентрация напряжений. При статических нагрузках существенное влияние трещин проявляется у хрупких материалов (высокопрочных сталей и сплавов с удлинением при разрыве $\delta < 3\%$).

Практика показывает, что возникновение трещины часто не означает *окончания безопасного периода работы конструкции. До некоторого критического* размера повреждение оказывается безопасным. Если имеется возможность обнаружения и слежения за дефектом, то это дает обоснование эксплуатации дорогостоящей конструкции по «техническому состоянию».

Анализ распределения напряжений возле трещин и других линейных дефектов, изучение условий роста трещин и их влияния на прочность составляют теперь специальный раздел механики твердого деформируемого тела — линейную механику разрушения.

Распределение напряжений возле вершины трещины. Рассмотрим узкую трещину длиною $2l$ в тонком листе (рис. 13.14). В окрестности вершины трещины напряжения определяются следующими равенствами:

$$\sigma_y = K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 + \sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right),$$

$$\sigma_x = K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right), \qquad (65)$$

$$\tau_{xy} = K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta,$$

где $K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}$; r, θ — полярные координаты точки; σ — напряжение растяжения в листе.

Величина

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi l} \qquad (66)$$

называется *коэффициентом интенсивности напряжений.*

Формулы (65) получены из решения Инглиса для эллиптического отверстия в тонкой пластинке. При щели в толстом листе (случай плоской деформации) формулы (65) остаются справедливыми, но возникает дополнительно напряжение

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y), \qquad (67)$$

где μ — коэффициент Пуассона. Из соотношений (65) вытекает, что по мере приближения к вершине трещины напряжения стремятся к бесконечности, как $1/\sqrt{r}$ при $r \to 0$.

Критическая длина трещины. Формула Гриффитса. При образовании трещины длиной $2l$ (см. рис. 13.14) освобождается упругая

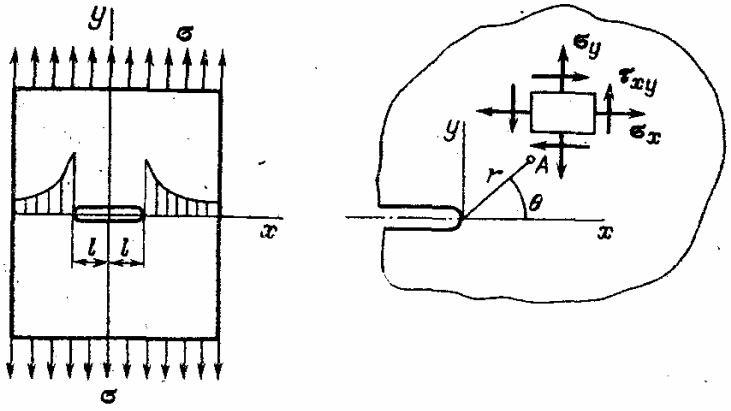


Рис. 13.14. Распределение напряжений возле вершины трещины

энергия, так как берега трещины и область, к ним примыкающая, освобождаются от действия напряжений. Вертикальное перемещение точек берега трещины из решения Инглиса имеет вид

$$u(x) = \frac{2\sigma}{E}\sqrt{l^2 - x^2}. \tag{68}$$

Изменение упругой энергии деформации можно считать равным работе, которую совершает напряжение σ при «закрытии» трещины:

$$W = 2\left(\frac{1}{2}\sigma h \int_{-l}^{l} u\,dx\right) = \frac{\pi l^2 \sigma^2 h}{E}, \tag{69}$$

где h — толщина листа.

При росте трещины на величину Δl освобождается упругая энергия

$$\Delta W = \frac{\pi (l + \Delta l)^2 \sigma^2 h}{E} - \frac{\pi l^2 \sigma^2 h}{E} \approx \frac{2\pi\sigma^2 l h}{E}\Delta l;$$

с другой стороны, должна быть затрачена работа на продвижение трещины

$$\Delta A = 2 \cdot 2\Delta l h \gamma,$$

где γ — плотность поверхностной энергии разрушения.

Критическая длина трещины l_* находится из условия

$$\Delta W = \Delta A,$$

что дает

$$\sigma\sqrt{\pi l_*} = \sqrt{2E\gamma}. \tag{70}$$

Формула (70) была впервые установлена Гриффитсом. Величина

$$\sqrt{2E\gamma} = K_{1c}$$

получила название *вязкости разрушения*; она считается постоянной материала. Условие начала быстрого роста трещины состоит в следующем:

$$K_1 \geqslant K_{1c}.$$

В момент начала лавинного разрушения коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины равен критическому значению вязкости разрушения. Размерность вязкости разрушения и коэффициента интенсивности напряжений равна

$$\dim K_{1c} = \dim K_1 = \text{Н} \cdot \text{мм}^{-3/2}.$$

Для конструкционных сталей, титановых сплавов $K_{1c} = (1-3) \cdot 10^3$ Н $\cdot$ мм$^{-3/2}$.

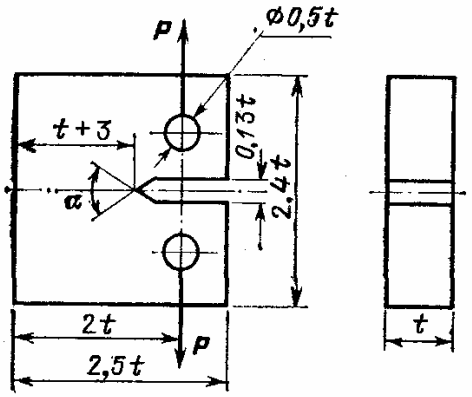


Рис. 13.15. Схема образцов для определения k_{1c} (по ГОСТ 90215—76)

Образцы для определения вязкости разрушения. Для определения K_{1c} используются образцы с надрезом (рис. 13.15). В вершине надреза с помощью специальных испытательных машин (пульсаторов) получают усталостную трещину длиной не менее 1,5 мм.

Далее осуществляется статическое нагружение образца усилиями P и расчет K_{1c} проводится по максимальному значению растягивающего усилия, предшествующего разрушению образца.

46. Модели усталостного и малоциклового разрушения

Вводные замечания. Ранее были изложены основные сведения об усталостных разрушениях элементов конструкций (разд. 16).

Усталостные разрушения возникают при действии переменных нагрузок при числе циклов $N > 10^5$ и характеризуются резким влиянием концентрации напряжений и качества поверхности.

Усталостные разрушения не имеют следов пластической деформации в очагах зарождения трещин. При числе циклов нагружения $N < 10^5$ наблюдаются разрушения малоцикловой усталости. Закономерности малоциклового разрушения занимают «промежуточное положение» между статической и усталостной прочностью. В частности, локальный характер усталостной прочности, зависимость от состояния поверхности проявляются при малоцикловой усталости в меньшей степени.

Рассмотрим сначала модели усталостного разрушения.

Модели усталостного разрушения при одноосном напряженном состоянии. Модель усталостного разрушения принимается в виде условия

$$\sigma_{экв} = \frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a^* + \psi_\sigma\sigma_m^* = \sigma_{-1}, \qquad (71)$$

где K_σ — эффективный коэффициент концентрации (нормальных) напряжений; β и ε — коэффициенты влияния поверхности и масштабного эффекта; ψ_σ — коэффициент постоянных (нормальных) напряжений (их значения указаны в разд. 16).

В равенстве (71) σ_a^* и σ_m^* — переменное и постоянное напряжения в момент разрушения; σ_{-1} — предел выносливости стандартного гладкого образца.

Если в рабочих условиях в опасной точке детали действуют переменное и постоянное (номинальные) напряжения σ_a и σ_m и к моменту разрушения происходит их пропорциональное возрастание, то

$$\sigma_a^* = n\sigma_a, \quad \sigma_m^* = n\sigma_m, \qquad (72)$$

где n — запас усталостной прочности по подобному циклу (разрушающий и рабочий циклы подобны).

Из соотношений (71) и (72) находим запас по подобному циклу:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m}. \qquad (73)$$

Запас по подобному циклу применяется для прочностной модели зубьев шестерен и в других случаях. Чрезвычайно широко распространено нагружение, при котором происходит возрастание только переменных напряжений (резонансные режимы работы конструкции и т. д.). Тогда в момент разрушения

$$\sigma_a^* = n_a\sigma_a, \quad \sigma_m^* = \sigma_m, \qquad (74)$$

где n_a — запас усталостной прочности по переменным напряжениям. Из модели усталостного разрушения (71) находим

$$n = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma\sigma_m}{\frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a}. \qquad (75)$$

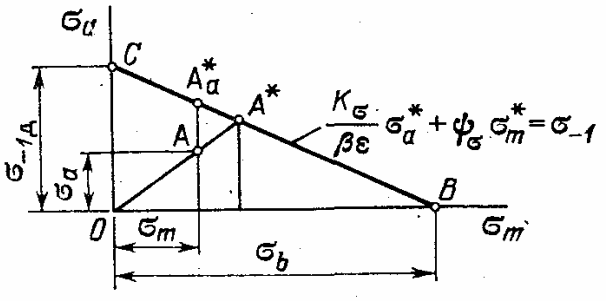


Рис. 13.16. Определение запасов усталостной прочности (геометрическая иллюстрация)

Геометрическая иллюстрация модели усталостной прочности при одноосном напряженном состоянии дана на рис. 13.16 для постоянного

значения

$$\psi_\sigma = \sigma_{-1}/\sigma_b, \tag{76}$$

где σ_b — предел прочности материала.

При $\sigma_m = 0$ получаем величину предела выносливости детали при симметричном цикле:

$$\sigma_{-1д} = \sigma_{-1}\beta\varepsilon/K_\sigma, \tag{77}$$

при $\sigma_m = \sigma_b$ (точка B) материал не может сопротивляться переменным напряжениям. При подобном цикле точка A перемещается вдоль луча OA^*; при возрастании переменной составляющей — по направлению AA_a^*.

Рассматриваемая модель усталостного разрушения справедлива при действии касательных напряжений

$$\frac{K_\tau}{\beta\varepsilon}\tau_a^* + \psi_\tau\tau_m^* = \tau_{-1}, \tag{78}$$

где τ_a^*, τ_m^* — переменное и постоянное касательные напряжения; τ_{-1} — предел выносливости при кручении.

Замечание. Величина запаса прочности по подобному циклу всегда меньше, чем по переменным напряжениям:

$$n < n_a.$$

Однако не следует считать, что можно ограничиться определением величины n как наименьшей. Дело в том, что допускаемые значения для n и n_a различны! Часто принимают

$$[n] = 1{,}5—2, \quad [n_a] = 2{,}5—4.$$

Модели усталостного разрушения при многоосном (многокомпонентном) напряженном состоянии. Рассмотрим многоосное напряженное состояние, при котором составляющие тензора напряжений имеют переменные и постоянные части (рис. 13.17):

$$\sigma_x = \sigma_{xa} + \sigma_{xm}, \quad \sigma_y = \sigma_{ya} + \sigma_{ym}, \ \ldots, \ \tau_{zx} = \tau_{zxa} + \tau_{zxm}.$$

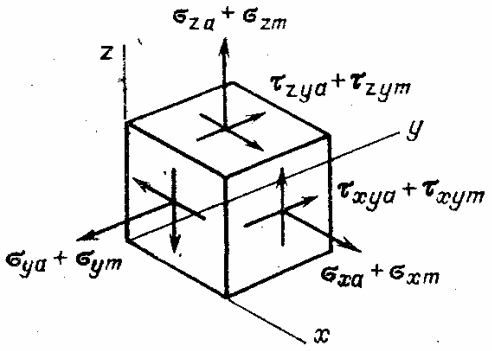


Рис. 13.17. Многокомпонентное нагруженное состояние при действии переменных и постоянных нагружений

Составим интенсивность переменных напряжений

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + \ldots + 6\tau_{zxa}^2}. \tag{79}$$

Модель усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии и при симметричном цикле изменения напряжений можно принять в виде

$$\sigma_{экв} = \sigma_{ia} = \sigma_{-1}. \tag{80}$$

Например, для случая действия переменных напряжений изгиба $\sigma_{xa} = \sigma_a$ и кручения $\tau_{xya} = \tau_a$ (другие компоненты напряженного состояния отсутствуют) получим из условия (80)

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sigma_{-1}. \tag{81}$$

При действии одних касательных напряжений (переменное кручение) из соотношения (81) находим

$$\tau_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{-1} \approx 0{,}57\sigma_{-1},$$

что является хорошим приближением для пластичных конструкционных материалов. Для хрупких материалов (легированных сталей, сплавов повышенной твердости) модель усталостного разрушения при многоосном напряженном состоянии можно принять такой:

$$\sigma_{экв} = \lambda_0\sigma_{ia} + \lambda_1\sigma_{1a} = \sigma_{-1}, \tag{82}$$

где σ_{1a} — наибольшее переменное напряжение. Применяя условие (82) для испытаний на переменный изгиб или растяжение — сжатие, получим

$$\lambda_0\sigma_{-1} + \lambda_1\sigma_{-1} = \sigma_{-1}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

Для испытаний на переменное кручение

$$\lambda_0\sqrt{3}\,\tau_{-1} + \lambda_1\tau_{-1} = \sigma_{-1}, \quad \lambda_0\sqrt{3} + \lambda_1 = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}.$$

Из приведенных уравнений находим

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right), \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right).$$

Условие усталостной прочности (82) приобретает следующий вид:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)\sigma_{ia} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)\sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \tag{83}$$

При $\sigma_{-1}/\tau_{-1} = \sqrt{3}$ получаем условие (80), при $\sigma_{-1}/\tau_{-1} = 1$ (хрупкие материалы) соотношение (82) дает

$$\sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \tag{84}$$

Модель усталостного разрушения при многокомпонентном напряженном состоянии и асимметричном цикле действующих напряжений является обобщением условия (80) и может быть представлена в виде

$$\sigma_{экв} = \sigma_{ia} + \psi_\sigma\sigma_{1m} = \sigma_{-1}, \tag{85}$$

где σ_{1m} — наибольшее постоянное нормальное напряжение. При наличии концентрации напряжений при сложном напряженном со-

стоянии величина σ_{ia} относится к истинным максимальным переменным напряжениям:

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(K_x\sigma_{xa} - K_y\sigma_{ya})^2 + \ldots + 6K_{zx}^2\tau_{zx}^2} = K_i\sigma_{ia}, \qquad (86)$$

где K_x, K_y, ..., K_{zx} — коэффициенты концентрации напряжений σ_x, σ_y, ..., τ_{zx}; K_i — коэффициент концентрации интенсивности напряжений.

Модели усталостного разрушения при стационарном нагружении с учетом числа циклов нагружений. При одноосном напряженном состоянии такие модели рассматривались в разд. 16:

$$\begin{aligned} \sigma_a^m N &= C, \quad \sigma_a > (\sigma_{-1})_{N_0}, \\ \sigma_a^{m_0} N &= C_0, \quad \sigma_a \leqslant (\sigma_{-1})_{N_0}, \end{aligned} \qquad (87)$$

где σ_a — переменное напряжение; m, C, m_0, C_0 — постоянные материала, связанные соотношением непрерывности кривой

$$C(\sigma_{-1})_{N_0}^{m_0 - m} = C_0,$$

$(\sigma_{-1})_{N_0}$ — предел выносливости при числе циклов N_0, соответствующем точке прогиба.

При многоосном состоянии и асимметричном цикле напряжений в равенствах (87) следует положить (рис. 13.18)

$$\sigma_a = \sigma_{экв} = \sigma_{ia} + \psi\sigma_{1m}, \qquad (88)$$

где σ_{ia} — интенсивность переменных напряжений, σ_{1m} — наибольшее постоянное напряжение.

Модели усталостного разрушения при нестационарном нагружении. Уровень переменных напряжений, действующих в элементах конструкции, зависит от режима работы, т. е. является нестационарным. Пусть на j-м режиме амплитуда переменных напряжений равна σ_j (индекс a для краткости опускается). Число циклов нагружений на j-м режиме обозначено N_j; суммарное число циклов составляет N_Σ:

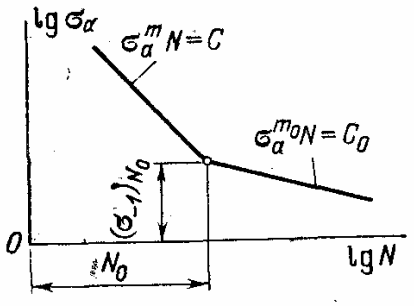


Рис. 13.18. Модель усталостного разрушения при стационарном нагружении

$$N_\Sigma = N_1 + N_2 + \ldots + N_k = \sum_{j=1}^{k} N_j.$$

Обозначим относительную длительность (по числу циклов) j-го режима в виде

$$q_j = N_j/N_\Sigma. \qquad (89)$$

Во многих случаях нестационарного нагружения относительная длительность режимов остается постоянной. Модель усталостного разрушения основывается на принципе линейного суммирования

повреждений, в соответствии с которым к моменту разрушения

$$\frac{N_1^*}{N_{p1}} + \ldots + \frac{N_k^*}{N_{pk}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^*}{N_{pj}} = 1, \tag{90}$$

где N_j^* — число циклов, накопленных к моменту разрушения на j-м режиме (при нестационарном нагружении); N_{pj} — число циклов до разрушения при работе только на j-м режиме.

Условие усталостного разрушения (90) можно выразить через суммарное число циклов до разрушения $N_{p\Sigma}$, так как

$$N_j^* = q_j N_{p\Sigma}, \tag{91}$$

и тогда

$$N_{p\Sigma} \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{N_{pj}} = 1. \tag{92}$$

Если при нестационарном нагружении элемент конструкции имел суммарное число нагружений (на всех режимах) N_Σ, то запас долговечности (по числу циклов)

$$n_N = N_{p\Sigma}/N_\Sigma. \tag{93}$$

Из условия (92) находим

$$n_N = \left(N_\Sigma \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{N_{pj}} \right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{N_j}{N_{pj}} \right)^{-1}, \tag{94}$$

где $N_j = N_\Sigma q_j$ — число циклов нагружения на j-м режиме в условиях эксплуатации. Так как

$$N_{pj}/N_j = n_{jN} \tag{95}$$

— запас по долговечности при работе только на j-м режиме, то суммарный запас по долговечности составит

$$n_N = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_{jN}} \right)^{-1}, \tag{96}$$

или

$$\frac{1}{n_N} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_{jN}}. \tag{97}$$

Запас по долговечности и запас по напряжениям при работе на j-м режиме связаны следующим соотношением:

$$n_{jN} = n_{j\sigma}^{m_j}, \tag{98}$$

что вытекает из равенства

$$\sigma_j^{m_j} N_{pj} = \sigma_{pj}^{m_j} N_j, \tag{99}$$

где σ_{pj} — переменное напряжение, при котором происходит разрушение за N_j циклов.

Запас по напряжениям на j-м режиме равен

$$n_{j\sigma} = \frac{\sigma_{pj}}{\sigma_j}. \tag{100}$$

Запас по долговечности равен

$$n_{jN} = N_{pj}/N_j. \tag{101}$$

Из соотношений (99)—(101) вытекает равенство (98).

Модели малоциклового разрушения при одноосном и сложном напряженных состояниях. В разд. 16 была приведена модель малоциклового разрушения при одноосном напряженном состоянии (условие разрушения Мэнсона):

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N^{-0,6} + 1{,}75\frac{\sigma_b}{E} N^{-0,12}, \tag{102}$$

где ε_a — амплитуда изменения деформаций; ψ — коэффициент поперечного сужения при разрыве; σ_b — предел прочности материала; E — модуль упругости; N — число циклов до разрушения. Величина ε_a включает пластическую и упругую части циклической деформации. При сложном напряженном состоянии величина ε_a в уравнении (92) заменяется эквивалентной деформацией

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{экв} = \varepsilon_{ia}, \tag{103}$$

где ε_{ia} — интенсивность амплитудных значений деформаций:

$$\varepsilon_{ia} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xa}-\varepsilon_{ya})^2 + \ldots + \frac{3}{2}\gamma_{zxa}^2}. \tag{104}$$

Величины ε_{xa}, ε_{ya}, ..., γ_{zxa} являются амплитудными значениями циклически изменяющихся компонент деформации.

При асимметричном цикле изменений деформаций, когда имеются переменные и постоянные составляющие цикла, эквивалентная деформация

$$\varepsilon_{экв} = \varepsilon_{ia} + \psi_\varepsilon \varepsilon_{1m}, \tag{105}$$

где ε_{1m} — наибольшая постоянная линейная деформация.

Модели малоциклового разрушения при нестационарном нагружении. При работе элемента конструкции на разных режимах с циклическими деформациями ε_{a1}, ε_{a2}, ..., ε_{ak} условие разрушения может быть принято в виде

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^*}{N_{pj}} = 1, \tag{106}$$

где N_j^* и N_{pj} — число циклов нагружения на j-м режиме, накопленное к моменту разрушения при нестационарном режиме нагружения; N_{pj} — число циклов до разрушения при работе только на одном j-м режиме. Условие (106) выражает принцип линейного суммирования повреждений при малоцикловой усталости.

Запас долговечности выражается равенством (94).

ГЛАВА 14

ЦИЛИНДРЫ И ДИСКИ

Многие ответственные элементы машин и сооружений могут рассматриваться как полые цилиндры, работающие при действии внутреннего или внешнего давления (толстостенные трубы, цилиндрические сосуды высокого давления, валы и втулки при наличии прессовых посадок и т. д.). Часто применяются высоконагруженные, быстровращающиеся диски (турбины, осевые компрессоры), шлифовальные круги и т. д.

47. Прочностные модели толстостенных труб и цилиндров. Напряжения и деформации

Рассмотрим круговой цилиндр при осесимметричном, постоянном по длине нагружении. На рис. 14.1 представлен участок толстостенной трубы под внутренним давлением. Внешний радиус цилиндра обозначим b, внутренний a. Предположим, что по длине

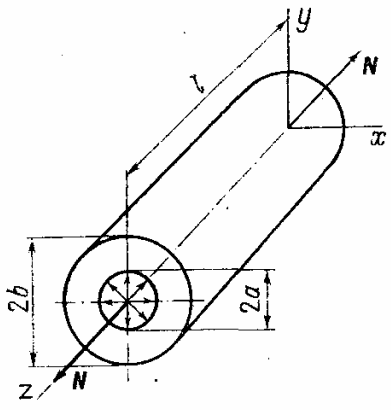


Рис. 14.1. Круговой цилиндр при осесимметричном, постоянном по длине нагружении

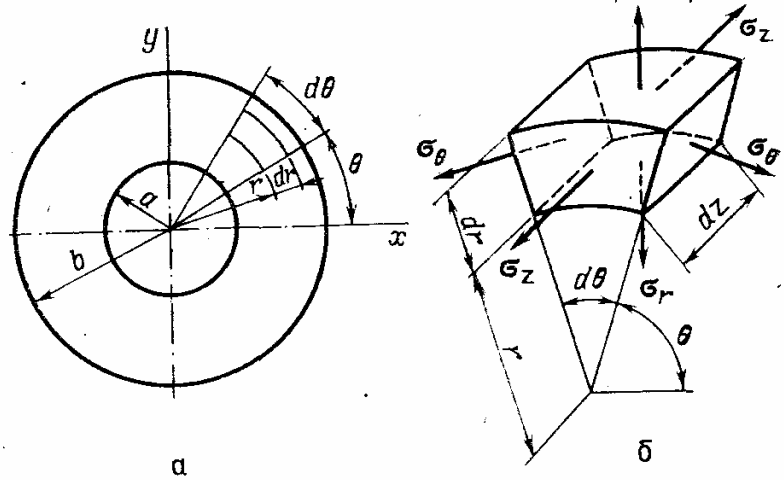


Рис. 14.2. Напряжения по граням элемента цилиндра

цилиндра (по оси z) нагрузка N и температурное поле не изменяются. Длина цилиндра l существенно больше его радиуса, и при указанных условиях поперечные сечения цилиндра остаются плоскими. Искажения, которые могут возникнуть только возле торцов, занимают по принципу Сен-Венана небольшие области, и ими в рассматриваемой модели пренебрегаем.

Выделим элемент цилиндра двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстояние dz, двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r+dr$ и, наконец, двумя меридиональными плоскостями, составляющими угол $d\theta$ (рис. 14.2, $а$). По

граням этого элемента будут действовать: радиальное σ_r, окружное σ_θ и осевое σ_z напряжения (рис. 14.2, *б*).

В силу осевой симметрии и постоянства нагружения по оси указанные напряжения будут главными: по граням элемента (рис. 14.2, *б*) касательные напряжения отсутствуют. Точка A цилиндра (рис. 14.3) получает радиальное смещение $u(r)$.

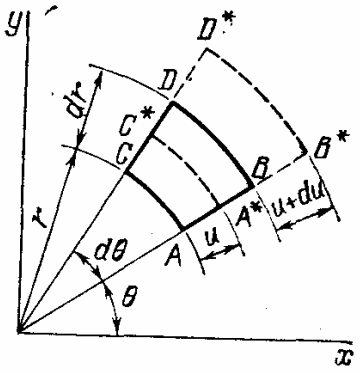


Рис. 14.3. Перемещение и деформации в цилиндре при осесимметричном нагружении

Для определения деформации в радиальном направлении в соответствии с общей теорией деформации (разд. 9) рассматриваем две точки A и B, отстоящие на расстояние dr. Так как перемещение u зависит от радиуса, то радиальное перемещение в точке B будет равно $u + \frac{du}{dr}\,dr$. Деформация в радиальном направлении равна

$$\varepsilon_r = \frac{A^*B^* - AB}{AB} = \frac{u + \frac{du}{dr}\,dr + dr - u - dr}{dr} = \frac{du}{dr}. \tag{1}$$

Для определения деформации в окружном направлении надо проследить за изменением длины отрезка AC. Тогда

$$\varepsilon_\theta = \frac{A^*C^* - AC}{AC} = \frac{(r+u)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) выражают деформации в полярной системе координат (r, θ) при осесимметричном нагружении.

Выражение для осевой деформации ε_z имеет такой же вид, как и в декартовой системе координат (разд. 9):

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

где w — перемещение в направлении оси z. При плоской деформации величина ε_z постоянна:

$$\varepsilon_z = \text{const} = e. \tag{3}$$

Уравнения равновесия элемента цилиндра. На рис. 14.4, *а* представлены элемент цилиндра и действующие на него усилия. По граням элемента приложены напряжения: σ_r, σ_θ и σ_z, зависящие от радиуса r; по θ и z напряжения постоянны. К элементу цилиндра может быть приложена распределенная массовая сила (на единицу массы), которая при вращении цилиндра равна

$$F_r = \omega^2 r, \tag{4}$$

где ω — угловая частота вращения.

Окружное напряжение σ_θ одинаково на двух противоположных гранях, составляющих угол $d\theta$, так как оно не зависит от угла θ.

Постоянным на гранях элемента оказывается и напряжение σ_z, так как напряжения не изменяются по координате z. Разными будут радиальные напряжения в силу возрастания радиуса соответствующих граней (r и $r+dr$). Рассмотрим равновесие сил в радиальном направлении. На рис. 14.4, *б* показана проекция элемента на

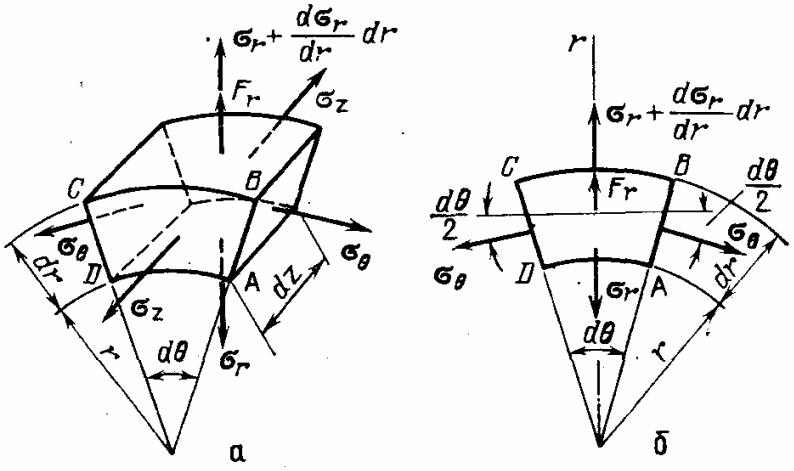


Рис. 14.4. Условия равновесия элемента цилиндра

плоскость, перпендикулярную оси цилиндра (оси z). Проектируя все силы на ось r, проходящую через центр тяжести элемента, получаем

$$-\sigma_r r\,d\theta\,dz + \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\,dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dz - \\ - 2\sigma_\theta \sin(d\theta/2)\,dr\,dz + \rho F_r r\,d\theta\,dr\,dz = 0, \quad (5)$$

где ρ — плотность материала.

В уравнении (5) учитывается, что усилия на боковых гранях дают составляющие на направление r (рис. 14.4, *б*).

Полагая, что

$$\sin\left(\frac{1}{2}\,d\theta\right) = \frac{1}{2}\,d\theta,$$

и пренебрегая величинами высшего порядка, получим

$$\sigma_r\,dr\,d\theta\,dz + r\frac{d\sigma_r}{dr}\,dr\,d\theta\,dz - \sigma_\theta\,dr\,d\theta\,dz + \rho\omega^2 r^2\,dr\,d\theta\,dz = 0.$$

Так как $dr\,d\theta\,dz \neq 0$, то

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет условие равновесия для элемента цилиндра. Два других условия (проекции на направление, перпендикулярное r, и на ось z) выполняются по условиям задачи.

Уравнения упругости. Рассматривая изотропное упругое тело, будем иметь следующие соотношения упругости (разд. 18):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T, \tag{7}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] + \alpha T, \tag{8}$$

$$\varepsilon_z = e = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T. \tag{9}$$

В дальнейшем потребуется выразить напряжение через деформации.

В рассматриваемой задаче, учитывая условие (3), удобно исключить величину σ_z из соотношений (7) и (8) с помощью равенства (9):

$$\sigma_z = Ee + \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha T. \tag{10}$$

Подставляя последнее соотношение в уравнения (7) и (8), представим их так:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_0}(\sigma_r - \mu_0\sigma_\theta) + \alpha_0 T - \mu e, \tag{11}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_0}(\sigma_\theta - \mu_0\sigma_r) + \alpha_0 T - \mu e, \tag{12}$$

где параметры упругости для плоской деформации имеют вид

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu} \tag{13}$$

и коэффициент линейного расширения равен

$$\alpha_0 = \alpha(1+\mu). \tag{14}$$

Из уравнений (11) и (12) легко находим

$$\sigma_r = \frac{E_0}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_r + \mu_0\varepsilon_\theta) - \frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0} + \frac{E_0\mu}{1-\mu_0}e, \tag{15}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_0}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu_0\varepsilon_r) - \frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0} + \frac{E_0\mu}{1-\mu_0}e. \tag{16}$$

В тех случаях, когда напряжение σ_z в цилиндре отсутствует, соотношения (7) и (8) приводят к более простым зависимостям:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{17}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{18}$$

которые также будут использованы в дальнейшем.

Основное дифференциальное уравнение. Это уравнение составляем относительно радиального перемещения $u(r)$. Если восполь-

зоваться уравнением равновесия (6)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\rho\omega^2 r \tag{19}$$

и внести значения σ_r и σ_θ из соотношений (15) и (16), то, учитывая формулы (1) и (2), получим

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{E_0}{1-\mu_0^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu_0\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{E_0}{1+\mu_0}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) = $$

$$= -\rho\omega^2 r + \frac{d}{dr}\left(\frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{E_0\mu}{1-\mu_0}\right)e. \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $u(r)$.

Если параметры упругости E и μ постоянны вдоль радиуса, то из уравнения (20) находим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = f(r), \tag{21}$$

где функция

$$f(r) = -\frac{1-\mu_0^2}{E_0}\rho\omega^2 r + (1+\mu_0)\frac{d}{dr}(\alpha_0 T) = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\rho\omega^2 r +$$

$$+ \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{d}{dr}(\alpha T). \tag{22}$$

С помощью небольших преобразований уравнение (21) можно представить в более удобном для последующего интегрирования виде:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right) = f(r). \tag{23}$$

Толстостенная труба под действием внутреннего и внешнего давлений. Рассмотрим равномерно нагретый цилиндр с постоянными параметрами упругости вдоль радиуса, нагруженный давлением (рис. 14.5); вращение отсутствует ($\omega = 0$), и торцы цилиндра свободны от напряжений. Для указанного случая $f(r) = 0$, и дифференциальное уравнение (21) будет таким:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right) = 0. \tag{24}$$

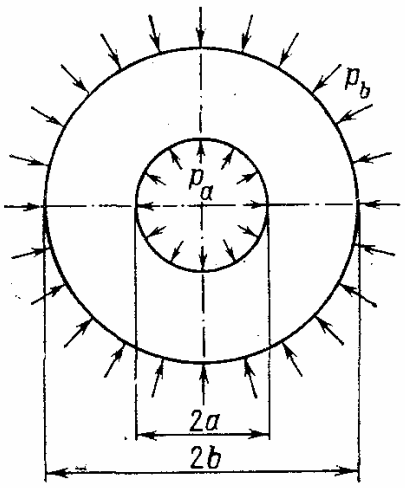


Рис. 14.5. Цилиндр под действием внутреннего и внешнего давлений

Решение уравнения (24) можно искать в следующем виде:

$$u = Cr^k. \tag{25}$$

После подстановки в уравнение (24)

$$C[k(k-1)+k-1]r^{k-2}=0$$

приходим к характеристическому уравнению $k^2-1=0$, корни которого равны $k_1=1$, $k_2=-1$.

Решение уравнения (24) будет таким:

$$u=C_1r+C_2/r, \tag{26}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Этот же результат можно получить другим путем. Из уравнения (24) имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}=\text{const}=2C_1. \tag{27}$$

Перенося r в правую часть равенства и интегрируя, получаем

$$ur=C_1r^2+C_2, \tag{28}$$

что совпадает с решением (26). Так как на торцах цилиндра внешние усилия отсутствуют, то можно положить $\sigma_z=0$ и воспользоваться соотношениями (17) и (18), пренебрегая температурными членами. Тогда

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr}+\mu\frac{u}{r}\right), \tag{29}$$

$$\sigma_0=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r}+\mu\frac{du}{dr}\right). \tag{30}$$

Подставляя u из уравнения (26), находим

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1-\frac{1-\mu}{r^2}C_2\right], \tag{31}$$

$$\sigma_0=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1+\frac{1-\mu}{r^2}C_2\right]. \tag{32}$$

Постоянные C_1 и C_2 следует определять из краевых условий (для радиальных напряжений)

$$\sigma_r(a)=-p_a \quad \text{при} \quad r=a,$$
$$\sigma_r(b)=-p_b \quad \text{при} \quad r=b.$$

Будем иметь

$$(1+\mu)C_1-\frac{1-\mu}{a^2}C_2=-\frac{1-\mu^2}{E}p_a, \tag{33}$$

$$(1+\mu)C_1-\frac{1-\mu}{b^2}C_2=-\frac{1-\mu^2}{E}p_b. \tag{34}$$

Из последних соотношений находим

$$C_1=\frac{1-\mu}{E}\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2},$$
$$C_2=\frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{b^2-a^2}. \tag{35}$$

Внося значения C_1 и C_2 в равенства (31) и (32), получаем формулы Ламе

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{1}{r^2}\frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}, \tag{36}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{1}{r^2}\frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \tag{37}$$

Для радиального перемещения из соотношений (26) и (35) устанавливаем следующую зависимость:

$$u(r) = \frac{1-\mu}{E}\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}\frac{1}{r}. \tag{38}$$

Замечания. 1. Обоснованность предположения, что $\sigma_z = 0$, сделанного при построении решения, доказывается следующим образом. Из уравнений (31) и (32) (или (36) и (37)) вытекает, что на всех радиусах

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}.$$

Так как в рассматриваемых задачах $e = \text{const}$, то из соотношения (10) при $\alpha T = 0$ получаем, что напряжение σ_z также должно быть постоянным. Внешнее усилие вдоль оси цилиндра отсутствует, и потому напряжение σ_z должно обращаться в нуль (иначе условия равновесия не удовлетворяются).

2. Для сплошного цилиндра в общем решении (26) следует положить $C_2 = 0$, так как при $C_2 \neq 0$ перемещение $u \to \infty$ при $r \to 0$. Из условия на внешнем контуре (34) получим

$$C_1 = -\frac{1-\mu}{E} p_b,$$

и тогда из соотношений (29) и (30)

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p_b. \tag{39}$$

Интересный результат!

3. Напряжение в цилиндре не зависит от природы упругого материала, формулы (36) и (37) не содержат модуля упругости и коэффициента Пуассона.

4. Формулы для напряжений в цилиндре были впервые получены Ламе (1795—1870) — французским ученым, долгое время работавшим в России.

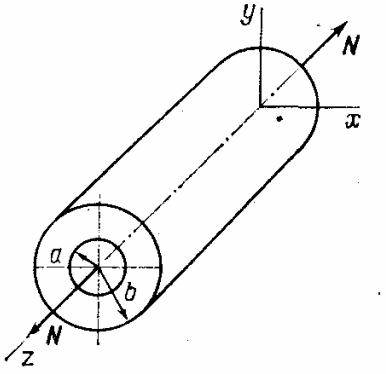


Рис. 14.6. Цилиндр под действием осевого усилия.

Действие осевого усилия. Если на цилиндр (рис. 14.6) действует осевое усилие N, то при постоянных параметрах упругости решение задачи будет таким:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \sigma_z = \frac{N}{\pi (b^2 - a^2)}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{\mu \sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = e = \frac{\sigma_z}{E}. \tag{41}$$

Очевидно, что уравнения равновесия и совместности деформаций удовлетворяются. Эти уравнения дифференциальные, а напряжения и деформации по равенствам (40) и (41) — постоянные ве-

личины. На торцах цилиндра краевое условие выполняется в интегральном смысле:

$$\int_F \sigma_z dF = N. \tag{42}$$

Точное решение требует приложения на торцах цилиндра постоянных напряжений.

При действии давлений по цилиндрическим поверхностям и осевого усилия в пределах упругих деформаций напряжения и деформации суммируются.

Прочностная модель цилиндрической части сосуда высокого давления. Рассмотрим напряженное состояние в цилиндрической части сосуда высокого давления (рис. 14.7) при действии внутреннего давления p. Внешнее давление считаем отсутствующим. Осевое усилие равно

$$N = \pi a_y^2 p.$$

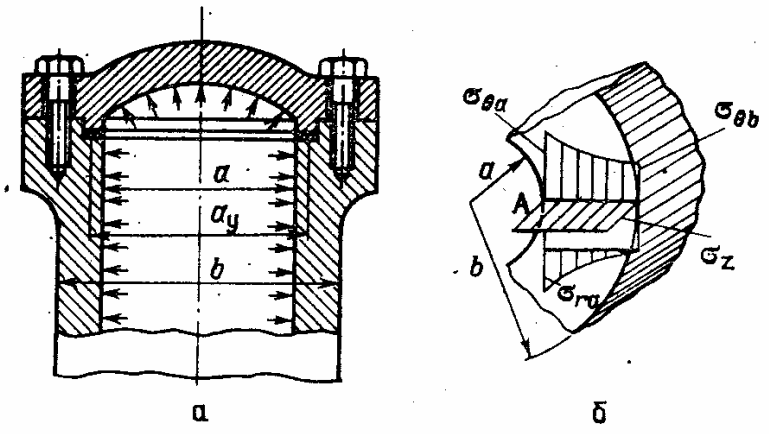
Напряжение в пределах упругости материала опеределяем по формулам (36), (37) и (40):

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p - \frac{1}{r^2} \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2}, \tag{43}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p + \frac{1}{r^2} \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2}, \tag{44}$$

$$\sigma_z = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}. \tag{45}$$

Распределение напряжений по толщине показано на рис. 14.7, *б*. Наиболее



а б

Рис. 14.7. Прочностная модель цилиндрической части сосуда высокого давления

напряженными являются точки внутренней поверхности (точки A), в которых (при $a_y \approx a$)

$$\sigma_r = -p, \quad \sigma_\theta = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p, \quad \sigma_z = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}. \tag{46}$$

Модель статической прочности примем в виде условия прочности Мора

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_b, \tag{47}$$

где $\chi = \sigma_b/\sigma_{сж}$, σ_b — предел прочности материала.

В рассматриваемом случае $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Модель статической прочности имеет вид

$$\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \chi\right) p = \sigma_b. \tag{48}$$

В запас прочности можно считать $\chi = 1$.

Модель малоцикловой прочности используется при повторении циклов нагружений.

На основании условия Мэнсона (разд. 17) имеем

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N^{-0,6} + 1{,}75\,\frac{(\sigma_b - \sigma_m)}{E}\,N^{-0,12},$$

где ε_a — амплитуда переменных деформаций, ψ — поперечное сужение материала, σ_m — среднее напряжение, N — число циклов до разрушения.

Цикл нагружения соответствует возрастанию давления от 0 до p. При сложном деформированном состоянии под ε_a понимается амплитуда эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{эквa} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_i, \tag{49}$$

где ε_i — интенсивность деформаций в опасной точке при действии давления p; множитель 1/2 связан с тем, что нагружение от 0 до p можно представить в виде постоянного нагружения давлением $p/2$ и переменного нагружения давлением с амплитудой $p/2$.

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}$$

с учетом соотношений (46) равна

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + 1\right)^2 + \left(\frac{1+n^2}{1-n^2} - \frac{n^2}{1-n^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{1-n^2} + 1\right)^2}\,p,$$

где для краткости обозначено $n = a/b$.

В окончательном виде имеем

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\frac{b^2}{b^2 - a^2}\,p. \tag{50}$$

Интенсивность деформаций в упругой области равна

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu)}{3E}\,\sigma_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{(1+\mu)\,b^2}{b^2 - a^2}\,\frac{p}{E}. \tag{51}$$

Модель малоцикловой прочности с учетом соотношений (49) — (51) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1+\mu}{E}\,\frac{b^2}{b^2 - a^2}\,p = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N^{-0,6} + 1{,}75\,\frac{(\sigma_b - \sigma_m)}{E}\,N^{-0,12},$$

где

$$\sigma_m = \frac{1}{2}\,\sigma_\theta = \frac{1}{2}\,\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}\,p. \tag{52}$$

Условие (52) связывает размеры цилиндра, величину циклически действующего давления, характеристики материала с числом циклов до разрушения. Допускаемое число циклов нагружения в рабочих условиях

$$[N] = N/n_N,$$

где n_N — запас по числу циклов.

Учитывая рассеяние результатов в силу отклонений по свойствам материала, технологическим и другим факторам, принимают

$$n_N = 3—5.$$

Прочностная модель прессового соединения. Прессовое соединение (рис. 14.8) получается за счет сборки с натягом двух сопрягаемых деталей (например, кольца шарикоподшипника и вала). За счет сил упругости на поверхности сопряжения создается давление p_a.

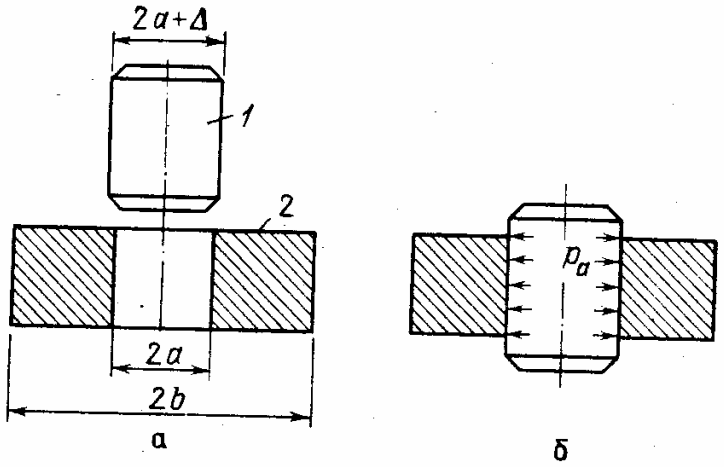


Рис. 14.8. Прочностная модель прессового соединения

При построении прочностной модели требуется найти условия, при которых в соединении не возникнут пластические деформации. Давление p_a вызовет радиальное перемещение охватывающей детали, которое может быть определено по формуле (38). Полагая $p_a = p$ и $p_b = 0$, получим

$$u_2(a) = \left((1-\mu_2)\frac{a^2}{b^2-a^2} + (1+\mu_2)\frac{b^2}{b^2-a^2}\right)\frac{aP}{E_2} = \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \mu_2\right)\frac{ap}{E_2}. \quad (53)$$

Радиальное перемещение внутреннего сплошного цилиндра ($p_b = p$) равно

$$u_1(a) = \frac{1}{E_1}(\sigma_\theta - \mu_1\sigma_r)\,a = -\frac{(1-\mu_1)}{E_1}\,ap, \quad (54)$$

так как $\sigma_\theta = \sigma_r = -p$ (формула (39)).

Разность радиальных перемещений должна быть равна радиальному натягу (по условиям неразрывности деформаций натяг «компенсируется» перемещениями):

$$u_2(a) - u_1(a) = \frac{1}{2}\Delta. \quad (55)$$

Учитывая равенства (53) и (54), находим

$$p = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{a}\frac{1}{\left(\frac{1}{E_2}\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\mu_2\right)+\frac{1-\mu_1}{E_1}}. \quad (56)$$

Если наружный диаметр втулки очень велик (отверстие в листе), то при

$$p = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{a}\frac{1}{\frac{1+\mu_2}{E_2}+\frac{1-\mu_1}{E_1}} \tag{57}$$

наибольшее напряжение по втулке будет на поверхности радиусом a

$$\sigma_{2r}(a) = -p, \quad \sigma_{2\theta}(a) = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}p.$$

Интенсивность напряжений равна

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\sigma_{2r}^2 - \sigma_{2r}\sigma_{2\theta} + \sigma_{2\theta}^2} = p\sqrt{1+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\right)} = p\frac{\sqrt{3b^4+a^4}}{b^2-a^2}.$$

Напряжения в цилиндре (валике) равны

$$\sigma_{1r} = \sigma_{1\theta} = -p, \quad \sigma_{i1} = p.$$

Модель прочностной надежности прессового соединения имеет вид

$$\frac{\sqrt{3b^4+a^4}}{b^2-a^2}\frac{1}{\frac{1}{E_2}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\mu_2\right)+\frac{1-\mu_1}{E_1}}\frac{\Delta}{2a} \leqslant \frac{\sigma_{2T}}{n_T}, \tag{58}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{E_2}\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\mu_2+\frac{1-\mu_1}{E_1}}\frac{\Delta}{2a} \leqslant \frac{\sigma_{1T}}{n_T}, \tag{59}$$

где σ_{1T}, σ_{2T} — пределы текучести материала втулки и валика; n_T — запас по пределу текучести (обычно $n_T \geqslant 1{,}3$).

Условие (58) обеспечивает отсутствие пластических деформаций во втулке, условие (59) — в валике. Предполагается, что величина Δ соответствует «эффективному» натягу, учитывающему «сминание» гребешков на поверхности (обычно $\Delta = 0{,}6$—$0{,}9\Delta_0$, где Δ_0 — номинальный натяг).

Температурные напряжения и напряжения от центробежных сил. Рассматривается цилиндр с постоянными параметрами упругости. При неравномерном нагреве и вращении дифференциальное уравнение для радиального смещения будет неоднородным (уравнение (23)).

Интегрируя уравнение (23) от a до r, получим

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr} = \int_0^r f(r_1)\,dr_1 + 2C_1, \tag{60}$$

где $2C_1$ — произвольная постоянная (множитель 2 взят для удобства дальнейших записей). Перенося r в правую часть равенства, повторяя операцию интегрирования, находим

$$u = \frac{1}{r}\int_a^r r_1 \int_0^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1 + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \tag{61}$$

Формула (61) выражает общее решение уравнения (23) при произвольной правой части. Далее составляются выражения для σ_r и σ_θ и находятся постоянные C_1 и C_2 из краевых условий для радиального напряжения:

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0. \tag{62}$$

Решения для случая, когда на цилиндрических поверхностях действуют давления, были получены ранее.

Покажем более подробно последовательность решения для температурных напряжений, при которых

$$f(r) = (1 + \mu_0)\frac{d}{dr}(\alpha_0 T). \tag{63}$$

В этом случае из равенства (61) получаем

$$u = (1 + \mu_0)\frac{1}{r}\int_a^r r_1 \alpha_0 T\, dr_1 + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \tag{64}$$

причем значения, соответствующие нижнему пределу интегрирования, включаются в произвольные постоянные.

Дифференцируя равенство (64), получаем

$$\frac{du}{dr} = -(1 + \mu_0)\frac{1}{r^2}\int_a^r r_1 \alpha_0 T\, dr_1 + (1 + \mu_0)\alpha_0 T + C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \tag{65}$$

Подставляя значения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

в равенства (15) и (16), находим

$$\sigma_r = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2}\left[(1 + \mu_0)C_1 - \frac{1 - \mu_0}{r^2}C_2 - (1 - \mu_0^2)F(r)\right] + \frac{E_0}{1 - \mu_0}\mu e, \tag{66}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2}\left[(1 + \mu_0)C_1 + \frac{1 - \mu_0}{r^2}C_2 + (1 - \mu_0^2)(F(r) - \alpha_0 T)\right] + \frac{E_0}{1 - \mu_0}\mu e, \tag{67}$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\int_a^r r_1 \alpha_0 T\, dr_1, \tag{68}$$

e — деформация вдоль оси z, постоянная для всех точек сечения.

Определяя произвольные постоянные из условия (62), получаем

$$C_1 = (1 - \mu_0)F(b)\frac{b^2}{b^2 - a^2} - \mu e, \quad C_2 = (1 + \mu_0)F(b)\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \tag{69}$$

где $F(b) = \frac{1}{b^2}\int_a^b r_1 \alpha_0 T\, dr_1$.

Учитывая полученные значения C_1 и C_2, приходим к следующим формулам для радиального и окружного температурных напряжений:

$$\sigma_r = E_0\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-F(r)\right], \tag{70}$$

$$\sigma_\theta = E_0\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+F(r)-\alpha_0 T\right]. \tag{71}$$

Для определения осевого напряжения σ_z имеется формула (10), которую запишем так:

$$\sigma_z = Ee+\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)-(1-\mu)E_0\alpha_0 T. \tag{72}$$

Неизвестную величину e определяем из условия

$$\int_F \sigma_z\,dF = 2\pi\int_a^L \sigma_z r\,dr = 0. \tag{73}$$

В результате находим

$$\sigma_z = E_0\left(F(b)\frac{2b^2}{b^2-a^2}-\alpha_0 T\right). \tag{74}$$

При использовании формул (70), (71) и (74) следует помнить, что

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2},\quad \alpha_0 = \alpha(1+\mu).$$

Подобным образом, полагая

$$f(r) = -\frac{1-\mu_0^2}{E_0}\rho\omega^2 r,$$

можно получить формулы для напряжений в быстровращающемся цилиндре.

Анализ распределения температурных напряжений. Сначала установим, что в равномерно нагретом, свободном от закрепления цилиндре температурные напряжения отсутствуют. В рассматриваемом случае

$$\alpha_0(r)T(r) = \text{const} = A,$$

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\int_a^r r\alpha_0 T\,dr = \frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right).$$

Подставляя значение $F(r)$ в равенства (70), (71) и (74), находим

$$\sigma_r = E_0\left[\frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]=0,$$

$$\sigma_\theta = E_0\left[\frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-A\right]=0,$$

$$\sigma_z = E_0\left[\frac{1}{2}A\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{2b^2}{b^2-a^2}-A\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Получим из соотношений (70), (71) и (74) формулы для температурных напряжений на внутренней ($r = a$) и на внешней ($r = b$) поверхностях цилиндра: при $r = a$

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_\theta(a) = \sigma_z(a) = E_0\left(F(b)\frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \alpha_0(a)\,T(a)\right); \tag{75}$$

при $r = b$

$$\sigma_r(b) = 0, \quad \sigma_\theta(b) = \sigma_z(b) = E_0\left(F(b)\frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \alpha_0(b)\,T(b)\right). \tag{76}$$

Отметим, что окружные и осевые температурные напряжения на граничных цилиндрических поверхностях одинаковы. Для выяснения «физического смысла» формул (75) и (76) определим «среднюю» температуру, точнее, температурную деформацию цилиндра

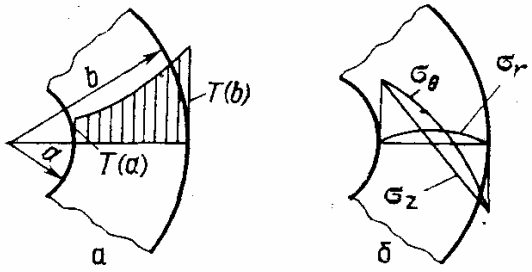


Рис. 14.9. Распределение температурных напряжений в цилиндре

$$(\alpha_0 T)_{\text{ср}} = \frac{1}{F}\int_F \alpha_0 T\,dF =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi(b^2 - a^2)}\int_a^b r\alpha_0 T\,dr = \frac{2b^2}{b^2 - a^2}F(b).$$

С учетом последнего соотношения формулы (75) и (76) представим так:

$$\sigma_\theta(a) = \sigma_z(a) = E_0[(a_0T)_{\text{ср}} - \alpha_0(a)T(a)],$$
$$\sigma_\theta(b) = \sigma_z(b) = E_0[(a_0T)_{\text{ср}} - \alpha_0(b)T(b)].$$

Если периферия диска нагрета больше (температура возрастает вместе с радиусом) (рис. 14.9, *а*), то во внешних областях температурные напряжения будут сжимающими.

Типичное распределение температурных напряжений показано на рис. 14.9, *б*. Отметим, что температурные напряжения пропорциональны модулю упругости и коэффициенту линейного расширения.

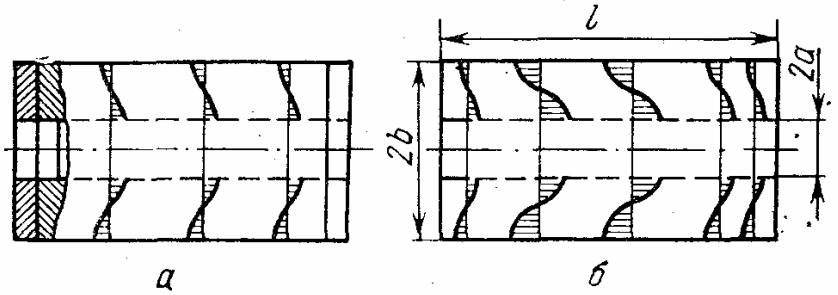


Рис. 14.10. Распределение температурных напряжений по длине цилиндра: *а* — цилиндр с абсолютно жесткими шайбами; *б* — цилиндр со свободными торцами

Замечания. 1. Температурные напряжения определяются температурной деформацией:

$$\varepsilon_T = \alpha T.$$

Так как коэффициент линейного расширения α заметно зависит от температуры, то более правильно говорить не о распределении температур, а о распределении температурных деформаций.

2. Полученное решение предполагает равномерное распределение температурных напряжений по длине цилиндра. Это осуществляется, если к торцам цилиндра (рис. 14.10) припаяны абсолютно жесткие шайбы. При свободных торцах $\sigma_z = 0$ и полученное решение справедливо на некотором удалении от торцов.

Цилиндр с переменными параметрами упругости. Необходимость рассмотрения подобной задачи связана с рядом ее приложений: учетом влияния температуры на величину модуля упругости, расчетом слоистых цилиндров, расчетом в упругопластической области методом переменных параметров упругости.

Составим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций $\sigma_r(r)$ и $u(r)$. Первое уравнение получается из соотношения (15):

$$\frac{du}{dr} = \frac{1-\mu_0^2}{E_0}\sigma_r - \frac{\mu_0}{r}u + (1+\mu_0)(\alpha T - \mu e). \qquad (77)$$

Второе уравнение возникает в силу зависимости (19):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{E_0}{1+\mu_0}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - \rho\omega^2 r. \qquad (78)$$

Используя соотношение (77), представим уравнение (78) в таком виде:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1-\mu_0}{r}\sigma_r + \frac{E_0}{r^2}u - \frac{E_0}{r}(\alpha_0 T - \mu e) - \rho\omega^2 r. \qquad (79)$$

В матричной форме система уравнений (79) и (77) имеет вид

$$\{Y\}' = [A]\{Y\} + \{f_T\} + \{f_e\} + \{f_\omega\}, \qquad (80)$$

где

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix}\sigma_r \\ u\end{Bmatrix}.$$

Элементы матрицы $[A]$ равны

$$A_{11} = -\frac{1-\mu_0}{r}, \quad A_{12} = \frac{E_0}{r^2},$$

$$A_{21} = \frac{1-\mu_0^2}{E_0}, \quad A_{22} = -\frac{\mu_0}{r}.$$

Векторы нагрузки

$$\{f_T\} = \begin{Bmatrix}-\dfrac{E_0\alpha T}{r} \\ (1+\mu_0)\alpha T\end{Bmatrix}, \quad \{f_e\} = e\begin{Bmatrix}\dfrac{\mu E_0}{r} \\ -(1+\mu_0)\mu\end{Bmatrix}, \quad \{f_\omega\} = \omega^2\begin{Bmatrix}-\rho r \\ 0\end{Bmatrix}.$$

Краевые условия при интегрировании уравнений (80) имеют вид

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, \quad \sigma_r(b) = \sigma_{rb},$$

где σ_{ra} и σ_{rb} — заданные радиальные напряжения (в частности, нулевые) при $r = a$ и $r = b$.

Величина e определяется из условия

$$\int_F \sigma_z \, dF = 2\pi \int_a^b \sigma_z r \, dr = N,$$

где N — заданное осевое усилие, действующее на цилиндр.

48. Прочностные модели дисков

Вводные замечания, основные предположения. На рис. 14.11 приведен ротор авиационного газотурбинного двигателя, наиболее ответственными элементами которого являются диски. Окружная скорость составляет 400 м/с и более. Разрушение дисков несет катастрофические последствия. Обеспечение надежности дисков составляет одну из основных проблем проектирования, производства и эксплуатации газотурбинных двигателей, паровых и газовых турбин, ультрацентрифуг и т. д. Наибольшее практическое применение получило

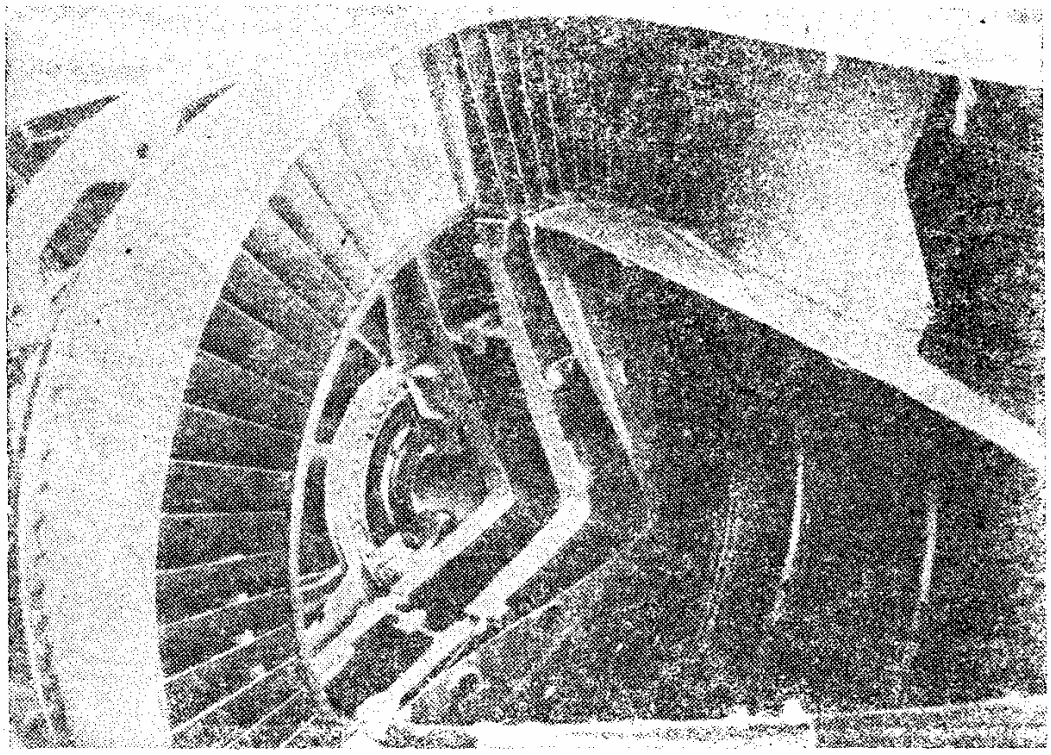


Рис. 14.11. Ротор авиационного газотурбинного двигателя (макет с разрезом)

представление диска как тонкой круглой пластинки переменной толщины (рис. 14.12). При инженерной оценке надежности диска используются два основных предположения.

1. Напряженное состояние в диске двухосное. В диске действуют радиальные и окружные напряжения; напряжение σ_z считается отсутствующим, т. е. напряженное состояние предполагается плоским.

2. Напряжения постоянны по толщине диска $h(r)$.

Оба эти предположения оправдываются для тонких дисков, обладающих плоскостью симметрии. Предполагается, что центробежные силы и температурное поле симметричны относительно оси вращения; рассматривается растяжение диска в его срединной плоскости.

Замечание. В реальных дисках действуют поперечные нагрузки вследствие разности давления среды, неравномерный нагрев по толщине и другие факторы, вызывающие деформацию изгиба. Они рассматриваются в следующей главе. В большинстве случаев надежность диска связана с его растяжением центробежными усилиями и неравномерным нагревом по радиусу.

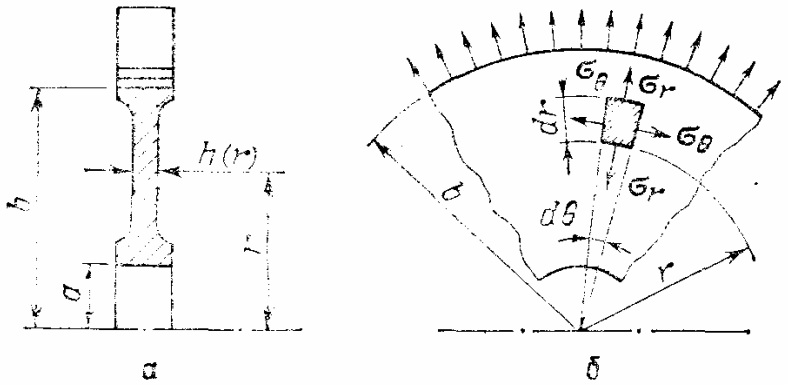


Рис. 14.12. Конструктивная схема диска ($а$), радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения ($б$)

Напряжения, условия равновесия. В диске возникают (рис. 14.12) радиальные $\sigma_r(r)$ и окружные $\sigma_\theta(r)$ напряжения и соответствующие усилия

$$N_r = \sigma_r h(r), \tag{81}$$

$$N_\theta = \sigma_\theta h(r). \tag{82}$$

Рассмотрим равновесие элемента диска, образованного двумя цилиндрическими сечениями радиусами r и $r + dr$ и двумя меридиональными сечениями, образующими угол $d\theta$ (рис. 14.13). Касательные напряжения на гранях элемента отсутствуют. Если на грани элемента, лежащей на цилиндрической поверхности радиуса r, действует (на единицу длины) радиальное усилие N_r, то на противоположной грани его величина будет $N_r + dN_r$. Усилие N_θ одинаково по двум меридиональным граням элемента диска. Составим проекцию внешних сил, приложенных к элементу диска, на радиальное направление:

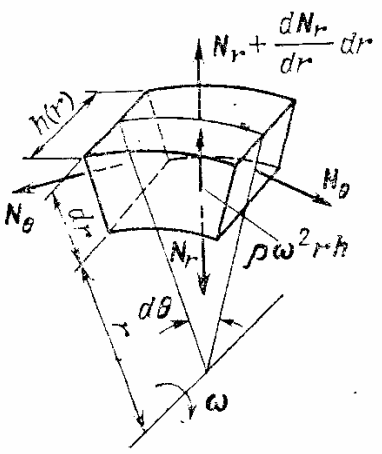


Рис. 14.13. Равновесие элемента диска

$$-N_r r\,d\theta + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}dr\right)(r + dr)\,d\theta - 2N_\theta \sin\frac{d\theta}{2}\,dr + \rho\omega^2 r h r\,d\theta\,dr = 0.$$

Члены первого порядка малости взаимно уничтожаются. Пренебрегая членами высшего порядка малости, находим

$$N_r\,dr\,d\theta + \frac{dN_r}{dr}dr\,r\,d\theta - N_\theta\,d\theta\,dr + \rho\omega^2 r^2 h\,d\theta\,dr = 0,$$

или

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \rho\omega^2 rh = 0. \tag{83}$$

Уравнение (83) представляет уравнение равновесия элемента диска.

Деформации и соотношения упругости. Вследствие осевой симметрии точки диска получают радиальные смещения $u(r)$, одинаковые по толщине диска. Радиальная и окружная деформации (см. разд. 47) равны

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \tag{84}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{85}$$

Соотношения упругости представим так:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T + \varepsilon_r^0, \tag{86}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha T + \varepsilon_\theta^0, \tag{87}$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона; αT — температурная деформация; ε_r^0, ε_θ^0 — дополнительная деформация, которая может рассматриваться как остаточная деформация, деформация ползучести или деформация другой природы, не связанной с упругостью материала.

Из уравнений (86) и (87) получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_r^0, \tag{88}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_\theta^0, \tag{89}$$

где «дополнительные напряжения»

$$\sigma_r^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r^0 + \mu\varepsilon_\theta^0), \tag{90}$$

$$\sigma_\theta^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta^0 + \mu\varepsilon_r^0) \tag{91}$$

представляют условные напряжения, которые соответствуют дополнительным деформациям в упругом теле.

Краевые условия. Краевые условия в большинстве случаев задаются для радиальных напряжений. На внешнем контуре диска

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \tag{92}$$

где σ_{rb} — напряжения от центробежных сил лопаток и замковых частей диска. На внутреннем контуре диска чаще всего

$$\sigma_{ra} = 0. \tag{93}$$

В случаях, когда применяется прессовая посадка диска на вал,

$$\sigma_r(a) = -p, \tag{94}$$

где p — давление на поверхности $r = a$ в рабочих условиях.

Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины с постоянными параметрами упругости. Для диска постоянной толщины $h = \text{const}$ уравнение равновесия (83) будет таким:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho\omega^2 r = 0. \tag{95}$$

Из соотношений упругости (88) и (89) при отсутствии дополнительных напряжений находим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{96}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}. \tag{97}$$

Внося зависимости (96) и (97) в уравнение (95), получим

$$\frac{d^2u}{dt} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = f(r), \tag{98}$$

где

$$f(r) = -\frac{1-\mu}{E}\rho\omega^2 r + (1+\mu)\frac{d}{dr}(\alpha T). \tag{99}$$

Уравнение (98) совпадает с уравнением для цилиндра (соотношение (21)), если значения E_0, μ_0, α_0 заменить на E, μ, α.

Замечание. Полученный результат не является случайным, так как задачи об осесимметричном напряженном состоянии цилиндра (плоская деформация) и диска (плоское напряженное состояние) являются вариантами одной и той же плоской задачи.

Напряжения в диске постоянной толщины. Как было показано ранее (разд. 47), общий интеграл уравнения (98) можно записать так:

$$u(r) = C_1 r + C_2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\int_a^r r_1 \int_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1. \tag{100}$$

Учитывая равенство (99), находим

$$\int_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\omega^2\frac{1}{2}(r_1^2 - a^2) + (1+\mu)(\alpha T(r_1) - \alpha_a T_a), \tag{101}$$

$$\frac{1}{r}\int_a^r r_1 \int_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\omega^2\left(\frac{r^3}{4}+\frac{a^4}{4r}-\frac{a^2 r}{2}\right)+$$

$$+(1+\mu)\frac{1}{r}\int_a^r r_1\alpha T(r_1)\,dr_1-(1+\mu)\alpha_a T_a\left(\frac{1}{2}r-\frac{a^2}{2r}\right). \quad (101)$$

Подставляя (101) в равенство (100) и включая постоянные величины, относящиеся к $r=a$, в произвольные постоянные, получим

$$u(r)=C_1^* r+C_2^*\frac{1}{r}-\frac{1-\mu}{8E}\rho\omega^2 r^3+(1+\mu)\frac{1}{r}\int_a^r r_1\alpha T(r_1)\,dr_1, \quad (102)$$

где C_1^*, C_2^* —новые значения произвольных постоянных, что для дальнейшего несущественно. Дифференцируя равенство (102), находим

$$\frac{du}{dr}(r)=C_1^*-C_2^*\frac{1}{r^2}-\frac{3(1-\mu^2)}{8E}\rho\omega^2 r^2-\frac{(1+\mu)}{r^2}\int_a^r r_1\alpha T(r_1)\,dr_1+$$

$$+(1+\mu)\alpha T. \quad (103)$$

Внося значения u и du/dr в соотношения упругости, будем иметь

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1^*-\frac{1-\mu}{r^2}C_2^*\right]-\rho\omega^2 r^2\frac{(3+\mu)}{8}-EF(r), \quad (104)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1^*+\frac{1-\mu}{r^2}C_2^*\right]-\rho\omega^2 r^2\frac{(1+3\mu)}{8}+E(F(r)-\alpha T), \quad (105)$$

где

$$F(r)=\frac{1}{r^2}\int_a^r r_1\alpha T(r_1)\,dr_1. \quad (106)$$

Из краевых условий для радиальных напряжений

$$\sigma_r(a)=\sigma_{ra}, \qquad \sigma_r(b)=\sigma_{rb}$$

находим значения произвольных постоянных:

$$C_1^*=\frac{1-\mu}{E}\frac{1}{b^2-a^2}(\sigma_{rb}b^2-\sigma_{ra}a^2)+$$

$$+\frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\mu)(1-\mu)(b^2+a^2)+(1-\mu)\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}F(b), \quad (107)$$

$$C_2^*=\frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(\sigma_{rb}-\sigma_{ra})+\frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\mu)(1+\mu)a^2b^2+$$

$$+(1+\mu)\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}F(b). \quad (108)$$

Если теперь подставить значения C_1^* и C_2^* в равенства (104) и (105), получим следующие важные формулы:

$$\sigma_r = \sigma_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - \sigma_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) + \sigma_{r\omega} + \sigma_{rT}, \quad (109)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \sigma_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) + \sigma_{\theta\omega} + \sigma_{\theta T}, \quad (110)$$

где напряжения от центробежных сил равны

$$\sigma_{r\omega} = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2\right), \quad (111)$$

$$\sigma_{\theta\omega} = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right). \quad (112)$$

Температурные напряжения составляют

$$\sigma_{rT} = E\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - F(r)\right], \quad (113)$$

$$\sigma_{\theta T} = E\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) + F(r) - \alpha T\right], \quad (114)$$

где $F(r)$ определяется соотношением (106).

Первые группы членов в равенствах (109) и (110) дают напряжения от контурных нагрузок. Сопоставление с формулами (36) и (37) показывает, что напряжения от контурных нагрузок в диске постоянной толщины и цилиндре одинаковы. При сравнении температурных напряжений следует учесть различие в зависимостях (65) и (106) ($\alpha_0 = \alpha(1+\mu)$). Тогда приходим к выводу, что при одинаковом распределении температурной деформации вдоль радиуса в цилиндре температурные напряжения в $1/(1-\mu)$ раз больше, чем в диске; кроме того, в цилиндре имеются температурные напряжения σ_{zT}, которые в диске отсутствуют.

Перемещения в диске находятся из соотношения

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + r\alpha T, \quad (115)$$

где значения σ_θ и σ_r определяются из формул (109) и (110).

Рассмотрим теперь диск без центрального отверстия (сплошной диск). В центре диска $r=0$ содержится особая точка, в которой в силу осевой симметрии

$$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0}. \quad (116)$$

Дифференциальное уравнение (102) остается справедливым, но в его решении (100) следует считать $C_2 = 0$, так как иначе в центре

диска перемещение не обращается в нуль. Решение уравнения (98) следует принять таким:

$$u(r) = C_1 r + \frac{1}{r}\int_0^r r_1 \int_0^{r_1} f(r_2)\, dr_2\, dr_1. \tag{117}$$

Несмотря на наличие множителя $1/r$, второй член равен нулю при $r = 0$. Учитывая значение $f(r)$, получим

$$u(r) = C_1^* r - \frac{1-\mu^2}{8E}\rho\omega^2 r^3 + (1+\mu)\frac{1}{r}\int_0^r r_1 \alpha T(r_1)\, dr_1.$$

Продолжая выкладки, найдем напряжения в сплошном диске:

$$\sigma_r = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2) + E(F(b) - F(r)), \tag{118}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+8}r^2\right) + E(F(b) + F(r) - \alpha T), \tag{119}$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r_1 \alpha T(r_1)\, dr_1. \tag{120}$$

В центре сплошного диска

$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 b^2 + E\left(F(b) - \frac{1}{2}\alpha T(0)\right), \tag{121}$$

так как

$$F(0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r_1 \alpha T(r_1)\, dr_1 = \alpha T(0)\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r_1\, dr_1 = \frac{1}{2}\alpha T(0).$$

Распределение напряжений в диске постоянной толщины. Распределение напряжений при действии контурной нагрузки и центробежных сил представлено на рис. 14.14 и 14.15; значения напряжений на внешнем и внутреннем контурах вытекают из формул (109), (110) и (118), (119).

Из рис. 14.14 видно, что возле отверстия окружные напряжения существенно повышаются. При малом центральном отверстии величина окружного напряжения становится приблизительно в 2 раза больше, чем в сплошном диске. В циклически нагруженных дисках отверстия нежелательны, так как концентрация напряжений возле отверстий снижает циклическую долговечность.

Определим температурные напряжения в сплошном диске, считая температуру возрастающей по степенному закону ($n > 0$):

$$T(r) = T(0) + \Delta T(r/b)^n, \tag{122}$$

где $\Delta T = T(b) - T(0)$ — перепад температуры между ободом и центром диска; коэффициент линейного расширения α предполагаем постоянным.

Из соотношения (120) находим

$$F(r) = \frac{1}{2}\alpha T(0) + \frac{\alpha \Delta T}{n+2}\frac{r^n}{b^n}.$$

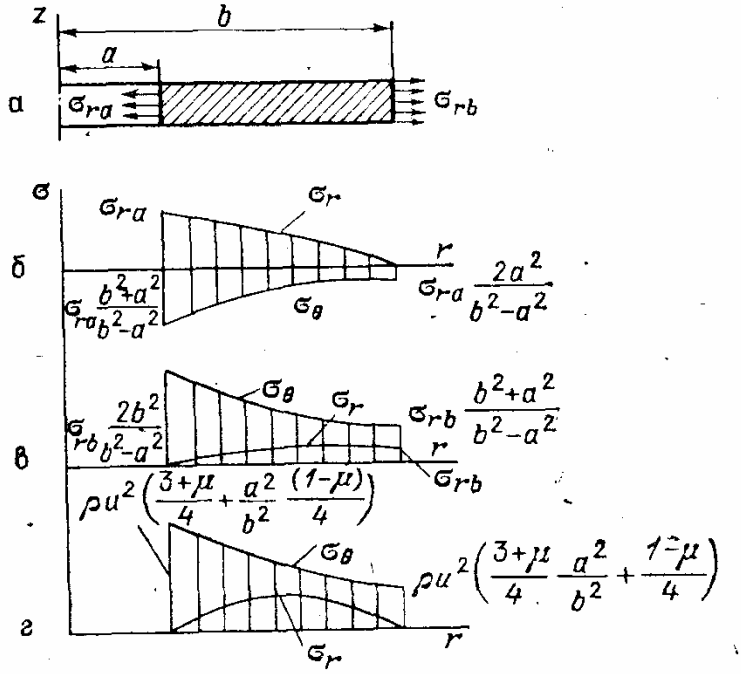


Рис. 14.14. Распределение напряжений в диске с отверстием от контурной нагрузки и центробежных сил

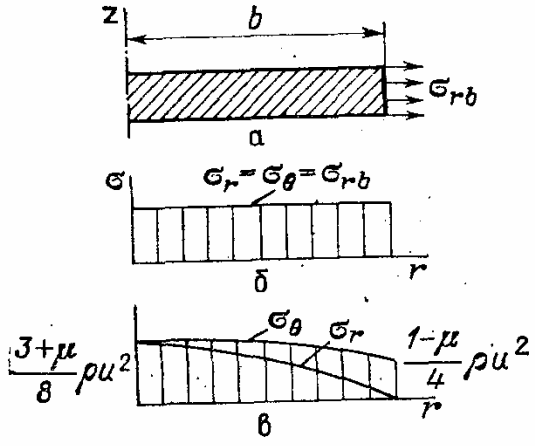


Рис. 14.15. Распределение напряжений в сплошном диске от контурной нагрузки и центробежных сил

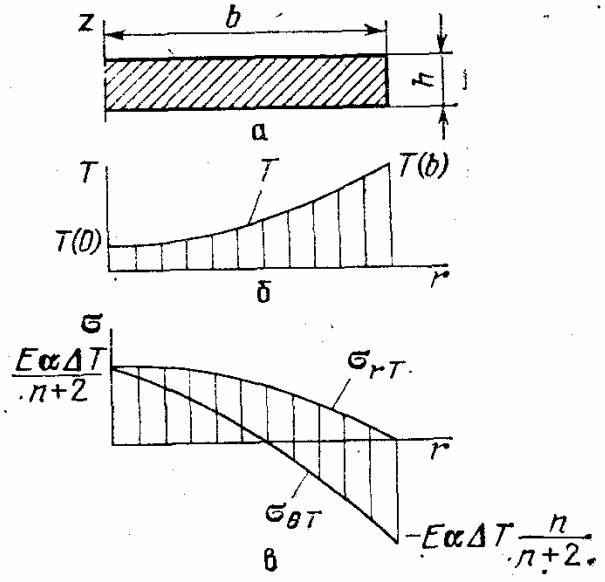


Рис. 14.16. Распределение температурных напряжений в сплошном диске

Формулы (118) и (119) дают следующие значения температурных напряжений:

$$\sigma_{rT} = \frac{E\alpha\Delta T}{n+2}\left(1 - \frac{r^n}{b^n}\right), \qquad \sigma_{\theta T} = \frac{E\alpha\Delta T}{n+2}\left(1 - (n+1)\frac{r^n}{b^n}\right).$$

Как и следовало ожидать, постоянная температура не вызывает в диске температурных напряжений. При возрастании температуры по радиусу в ободе возникает сжимающее напряжение

$$\sigma_{\theta T}(0) = -E\alpha\Delta T\,\frac{n}{n+2}.$$

Распределение температурных напряжений в сплошном диске показано на рис. 14.16.

Напряжения в диске переменной толщины с переменными параметрами упругости. В общем случае расчет дисков на растяжение проводится приближенными методами. Важность проблемы прочности дисков вызвала большое число исследований, и в настоящее время известно свыше сорока различных методов расчета. Основные методы можно подразделить на следующие группы:

1) методы разбиения на участки с последующим их сопряжением:
2) методы конечных разностей;
3) методы интегральных уравнений:
4) методы численного интегрирования.

Указанные методы типичны и для других сложных задач инженерного дела. В первой группе диск разбивается на участки более простых профилей, для которых могут быть использованы точные решения (например, на участки дисков постоянной толщины и т. п.). Во второй группе дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными. Методы интегральных уравнений основывались на их численном решении с помощью последовательных приближений. Наконец, численные методы используют прямое интегрирование системы дифференциальных или интегральных уравнений первого порядка. Эти методы, получившие широкое применение в связи с расчетами на ЭВМ, излагаются ниже. Рассматривается диск с переменными параметрами упругости и дополнительными деформациями, что дает возможность учета деформаций пластичности и ползучести. Составим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно радиального усилия $N_r(r)$ и радиального перемещения $u(r)$. Эти переменные не претерпевают разрывов даже при скачкообразном изменении параметров диска (толщины, модуля упругости, температуры и т. п.).

Одно из уравнений непосредственно следует из соотношения упругости (88), которое представим в виде

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) - \frac{Eh\alpha T}{1-\mu} - N_r^0, \tag{123}$$

где $N_r = \sigma_r h$, $N_r^0 = \sigma_r^0 h$ — радиальные усилия.

Из равенства (123) вытекает

$$\frac{du}{dr} = \frac{1-\mu^2}{Eh} N_r - \mu \frac{u}{r} + (1+\mu)\alpha T + \frac{1-\mu^2}{Eh} N_r^0. \qquad (124)$$

Далее используем уравнение равновесия (83):

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1}{r}(N_r - N_\theta) - \rho\omega^2 rh. \qquad (125)$$

Из соотношений упругости (88) и (89) имеем

$$N_r - N_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\mu)\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - N_r^0 + N_\theta^0,$$

и потому

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1}{r}\left[\frac{E}{1-\mu^2}(1-\mu)\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - N_r^0 + N_\theta^0\right] - \rho\omega^2 rh.$$

Внося значение du/dr из уравнения (124), получаем

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1-\mu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} u - \frac{Eh}{r}\alpha T - \rho\omega^2 rh + \frac{\mu}{r} N_r^0 - \frac{1}{r} N_\theta^0. \qquad (126)$$

Зависимости (126) и (124) образуют систему дифференциальных уравнений

$$\{Y\}' = [A]\{Y\} + \{f_\omega\} + \{f_T\} + \{f_0\}, \qquad (127)$$

где

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} N_r \\ u \end{Bmatrix}, \quad \{f_\omega\} = \begin{Bmatrix} -\rho\omega^2 rh \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{f_T\} = \begin{Bmatrix} -\frac{Eh}{r}\alpha T \\ (1+\mu)\alpha T \end{Bmatrix}. \qquad (128)$$

Вектор дополнительной нагрузки

$$\{f_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\mu}{r} N_r^0 - \frac{1}{r} N_\theta^0 \\ \frac{1-\mu^2}{Eh} N_r^0 \end{Bmatrix}. \qquad (129)$$

Элементы матрицы равны

$$A_{11} = -\frac{1-\mu}{r}, \quad A_{12} = \frac{Eh}{r^2}, \quad A_{21} = \frac{1-\mu^2}{Eh}, \quad A_{22} = -\frac{\mu}{r}.$$

Уравнение (127) решают по методу начальных параметров, представляя решение в виде

$$\{Y\} = N_{ra}\{Y_1\} + u_a\{Y_2\} + \{Y^*\}, \qquad (130)$$

где $\{Y_i\}$ — решение однородного уравнения

$$\{Y_i\}' = [A]\{Y_i\}$$

при начальном значении

$$\{Y_1(a)\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вектор $\{Y_2\}$ соответствует решению однородного уравнения при начальных условиях

$$\{Y_2(a)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Вектор $\{Y^*\}$ представляет решение неоднородного уравнения (127) при начальном значении

$$\{Y^*(a)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Неизвестные значения начальных параметров определяются из краевых условий. Для дисков с отверстием величина N_{ra} обычно известна, и тогда векторы $\{Y_1\}$ и $\{Y^*\}$ объединяются: решение принимается в форме

$$\{Y\} = \{Y_1^*\} + u_a\{Y_2\}, \tag{131}$$

где $\{Y_1^*\}$ является решением уравнения (127) при начальном условии

$$\{Y_1^*(a)\} = \begin{Bmatrix} N_{ra} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для сплошных дисков для устранения числовых погрешностей краевое условие удобно ставить на некотором малом радиусе a (обычно $a = (0{,}05—0{,}1)\ b$).

Тогда, полагая для сплошного диска

$$N_r(a) = N_\theta(a), \tag{132}$$

получим из соотношений упругости

$$\frac{u_a}{a} = \frac{1-\mu_a}{E_a} N_{ra} + \alpha_a T_a + \varepsilon^0_{\theta a}, \tag{133}$$

где нижний индекс a указывает, что значение параметра относится к радиусу a. Зависимости между N_{ra} и u_a возникают и при упругом закреплении дисков.

Модели общей статической и длительной прочности диска. Модель общей статической и длительной прочности содержит условие

$$K_b = \frac{n_{\text{разр}}}{n_{\max}} \geqslant [K_b], \tag{134}$$

где $n_{\text{разр}}$ — частота вращения, при которой произойдет разрушение диска с учетом температуры и длительности работы; $n_{\max}$ — максимальная частота вращения диска в рабочих условиях; K_b — запас прочности по разрушающей частоте вращения (разрушающим оборотам); $[K_b]$ — допустимое значение запаса.

Разрушение может произойти по диаметральному (меридиональному) или по цилиндрическому сечениям, и соответственно различают запасы.

При определении запаса по диаметральному сечению исходят из предположения, что в момент разрушения окружное напряжение

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_{дл}(r), \tag{135}$$

где $\sigma_{дл}(r)$ — предел длительной прочности, соответствующий температуре на радиусе r и заданной длительности работы.

Рассмотрим равновесие диска непосредственно в момент разрушения. Радиальное напряжение на внешнем радиусе диска будет равно

$$\sigma^*_{rb} = \sigma_{rb}\frac{\omega^2_{разр}}{\omega^2_{max}}, \tag{136}$$

где σ_{rb} — радиальное напряжение на ободе диска при максимальной угловой скорости (или частоте вращения). Определим равнодействующую центробежных сил, приложенных к массе диска. На элемент диска действует центробежная сила

$$dC = \rho\omega^2_{разр} r\, h\, r\, d\theta\, dr = \rho\omega^2_{разр} r^2\, dF\, d\theta,$$

где $dF = h\, dr$ — элемент площади диаметрального сечения. Равнодействующая центробежных сил, приложенных к половине диска, равна

$$C = \int_0^\pi \int_a^b dC \sin\theta = \rho\omega^2_{разр} \int_a^b r^2\, dF \cdot \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta,$$

или

$$C = 2\rho\omega^2_{разр} \int_F r^2\, dF = 2\rho\omega^2 J, \tag{137}$$

где $J = \int_a^b r^2 h\, dr$ — момент инерции половины диаметрального сечения диска относительно оси вращения. Проектируя все силы на вертикальное направление, получим

$$2\sigma_{rb}\frac{\omega^2_{разр}}{\omega^2_{max}} bh_b + 2\rho\omega^2_{разр} J = 2\int_a^b \sigma_{дл} h\, dr. \tag{138}$$

Напряжениями на внутреннем контуре $r = a$ пренебрегают (свободное отверстие). Если даже в рабочих условиях по внутреннему контуру была запрессовка, то к моменту разрушения давление запрессовки исчезает.

Из равенства (138) находим запас по разрушающей частоте вращения по диаметральному сечению (рис. 14.17):

$$K_{b1} = \frac{\omega_{разр}}{\omega_{max}} = \sqrt{\frac{\int_a^b \sigma_{дл} h\, dr}{\sigma_{rb} bh_b + \rho\omega^2 J}}. \tag{139}$$

При кратковременном разрушении или при работе в условиях нормальной температуры величина длительной прочности $\sigma_{дл}$ заменяется пределом прочности σ_b. Из формулы (139) следует, что для увеличения прочности диска надо увеличивать толщину ближе к центру диска (в области ступицы), так как при этом момент инерции возрастает медленнее, чем площадь сечения. В достаточно надежных дисках

$$K_{b1} = 1{,}5;\ \ldots;\ 1{,}6.$$

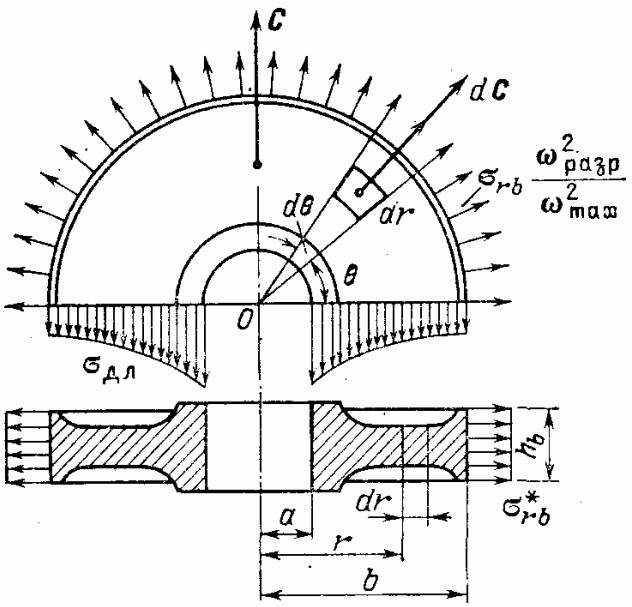


Рис. 14.17. Определение запаса по диаметральному сечению

Перейдем к определению запаса по цилиндрическому сечению. В этом случае разрушение происходит по цилиндрической поверхности радиусом $r_ц$ и по участкам диаметрального сечения (рис. 14.18). Считаем для общности, что на радиусе $r_ц$ имеется z отверстий диаметром d.

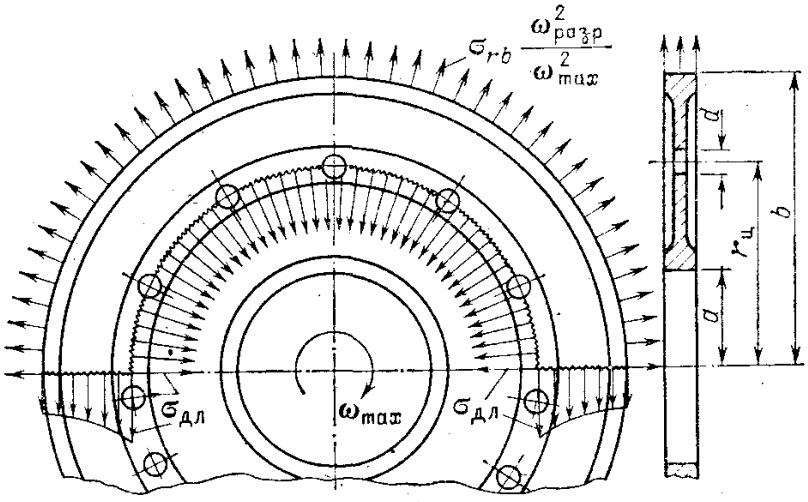


Рис. 14.18. Определение запаса по цилиндрическому сечению

Рассматривая равновесие сил в вертикальном направлении, находим

$$2\sigma_{rb}\frac{\omega^2_{разр}}{\omega^2_{max}}bh_b + 2\rho\omega^2_{разр}J_ц = 2\int_{r_ц}^{b}\sigma_{дл}h\,dr + \sigma_{дл}(r_ц)\,r_ц h_ц\left(1-\frac{zd}{2\pi r_ц}\right), \quad (140)$$

где $J_ц = \int_{r_ц}^{b} r^2 h\,dr.$

Из условия (140) получаем

$$K_{b_2} = \frac{\omega_{разр}}{\omega_{max}} = \sqrt{\frac{\int\limits_{r_ц}^{b} \sigma_{дл} h\, dr + \sigma_{дл}(r_ц)\, r_ц h_ц \left(1 - \frac{zd}{2\pi r_ц}\right)}{\sigma_{rb} b h_b + \rho\omega^2 J_ц}}. \qquad (141)$$

Расчет проводят для различных радиусов $r_ц$ и для оценки прочности учитывается минимальное значение K_{b_2}. Обычно это значение соответствует ободной части диска. В удовлетворительно работающих дисках

$$[K_{b_2}] = 1{,}4; \ldots; 1{,}5.$$

Замечания. 1. Допускаемое значение $[K_{b_1}] > [K_{b_2}]$, так как диаметральное разрушение диска более опасно по своим последствиям.

2. Запас K_{b_2} определяют для $r_ц > a$, иначе отверстие предполагается «несущим», что неправильно. При $r = a$ следует считать $K_{b_2} = K_{b_1}$.

3. В общей модели статической прочности температурные напряжения не учитываются. Предполагается, что к моменту разрушения идут процессы пластичности и ползучести, приводящие к релаксации температурных напряжений. Влияние температуры сказывается на значениях $\sigma_{дл}(r)$.

Эквивалентный запас по разрушающей частоте вращения. Если диск работает на различных режимах с температурами T_i с длительностью t_i, то определяется эквивалентный запас по разрушающей частоте вращения по принципу линейного суммирования повреждений (гл. 13):

$$\frac{1}{\left(K^2_{bэкв}\right)^{m_{экв}}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\left(K^2_{b(i)}\right)^{m_i}}, \qquad (142)$$

где $m_{экв} = m_1$, если, как обычно, режим 1 относится к режиму наименьшего запаса прочности. В равенстве (142) $K_{b(i)}$ входят во второй степени, так как запас по частоте вращения соответствует квадрату запаса по напряжениям.

Модели локальной статической и длительной прочности диска. Эти модели служат дополнительными критериями прочностной надежности диска, оценивая местные запасы прочности

$$K_m = \frac{\sigma_{дл}(T, t)}{\sigma_{экв\,max}}, \qquad (143)$$

где $\sigma_{дл}(T, t)$ — предел длительной прочности при температуре T и длительности нагружения t; $\sigma_{экв\,max}$ — наибольшее эквивалентное напряжение.

В практических расчетах часто принимают

$$\sigma_{экв\,max} = \sigma_{max},$$

где σ_{max} — наибольшее напряжение (радиальное или окружное) на данном радиусе.

Значение K_m определяется для сечения, в котором K_m минимально. При работе диска на различных режимах определяется эквивалентный запас прочности. Обычно принимают

$$[K_m] > 1{,}6.$$

Модели малоцикловой прочности диска. Модель малоцикловой прочности диска содержит условие

$$K_N = N_{разр}/N \geqslant [K_N], \tag{144}$$

где $N_{разр}$ — число циклов нагружения до разрушения диска, N — число циклов нагружения в процессе эксплуатации, K_N — запас по циклической долговечности.

Для удовлетворительно работающих дисков расчетный запас долговечности равен $[K_N] = 5$. При экспериментальном определении запаса долговечности в составе изделия $[K_N] = 3$. Минимальные значения K_N получаются в местах концентрации напряжений.

ГЛАВА 15

БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ И ПРУЖИНЫ

49. Изгиб балок на упругом основании

Вводные замечания. Если балка (стержень) опирается на ряд близко расположенных упругих опор, то можно считать, что балка лежит на сплошном упругом основании (рис. 15.1). Такая расчетная модель применяется во многих случаях. На рис. 15.2 показана схема рельсового пути, причем как шпалы,

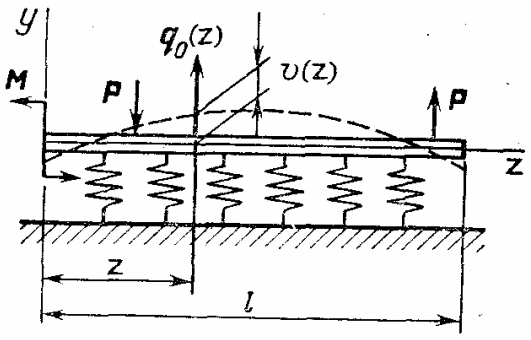


Рис. 15.1. Расчетная модель балки на упругом основании

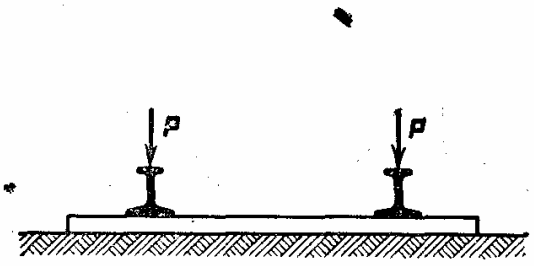


Рис. 15.2. Балка на упругом основании (схема рельсового пути на шпалах)

так и рельсы могут приближенно рассматриваться как балки на упругом основании (многие видели значительную осадку рельс при прохождении поезда).

Если прогиб балки $v(z)$, то со стороны упругого основания возникает распределенная нагрузка

$$q_0(z) = -kv(z), \tag{1}$$

где k — коэффициент упругого основания.

Знак минус в формуле (1) имеет принципиальное значение: возникающее усилие направлено в сторону, противоположную прогибу.

Размерность q_0 — $\left[\frac{\text{сила}}{\text{длина}}\right]$, размерность k — $\left[\frac{\text{сила}}{\text{длина}^2}\right]$.

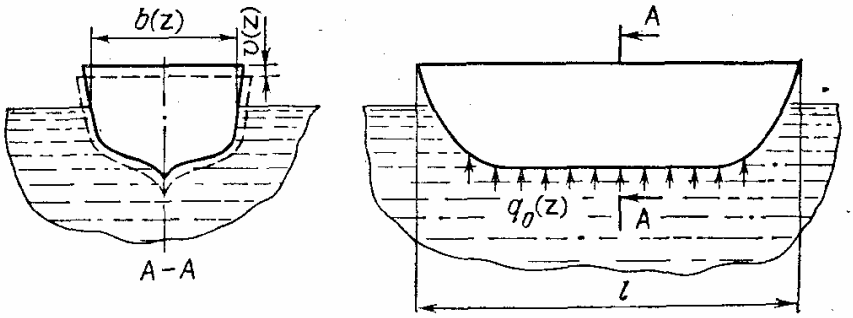


Рис. 15.3. Усилия, возникающие при общих прогибах корпуса судна

Еще один пример расчетной модели балки на упругом основании: приближенный расчет корпуса судна по стержневой теории. Длина современных танкеров достигает 200—300 м и более, размеры поперечного сечения можно

считать малыми по сравнению с длиной. Это дает основания для применения модели стержня.

При прогибе $v(z)$ (рис. 15.3) возникает дополнительное усилие (на единицу длины)

$$q_0(z) = -\gamma b(z) v(z) = -k(z) v(z), \tag{2}$$

где γ — удельный вес жидкости, $b(z)$ — поперечный размер по ватерлинии. Коэффициент упругого основания может изменяться по длине балки.

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании. На элемент балки длиной dz (рис. 15.4) кроме распределенной нагрузки от внешних сил действует распределенная нагрузка от упругого основания q_0.

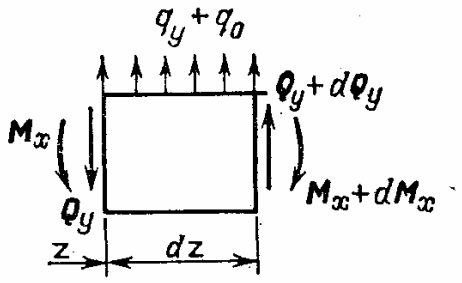


Рис. 15.4. Условие равновесия элемента балки на упругом основании

Уравнение изгиба балки на упругом основании отличается от основного уравнения изгиба стержня (разд. 34) только наличием дополнительного члена в правой части

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v}{dz^2}\right) = q_y + q_0 = q_y - k(z)v(z), \tag{3}$$

или в окончательной форме

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v}{dz^2}\right) + k(z)v(z) = q_y(z). \tag{4}$$

Для изгибающего момента и перерезывающей силы справедливы полученные ранее зависимости:

$$EJ_x(z)\frac{d^2v}{dz^2} = -M_x(z), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v}{dz^2}\right) = -Q_y(z). \tag{6}$$

Замечания. 1. Распределенная нагрузка от упругого основания принимается равной

$$q_0(z) = -k(z)v(z)$$

и соответствует физической модели, когда пружины (рис. 15.1) припаяны к балке. При положительном прогибе ($v(z) > 0$) усилие основания направлено вниз. Такие связи балки и основания называются двусторонними.

Во многих случаях упругая среда оказывает сопротивление, когда прогиб направлен в глубь среды (см. рис. 15.1) при $v < 0$, и не действует на балку при противоположном направлении прогиба ($v > 0$) (балка положена на пружины, балка на грунте и т. п.); тогда следует считать

$$k(z, v) = \begin{cases} 0, & v > 0, \\ k(z), & v < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для односторонних связей (условие (7)) уравнение (4) оказывается нелинейным и решается методом последовательных приближений. В первом

приближении связи считаются двусторонними и определяются области, где $v > 0$. Во втором приближении в указанных областях полагают $q_0 = 0$ и находят новые границы областей и т. д.

2. Упругое полупространство (упругая среда) лишь приближенно можно рассматривать как упругое основание (рис. 15.5). В равенстве (1) предполагается, что прогиб $v(z)$ определяется усилием $q_0(z)$ в том же сечении.

В упругом полупространстве прогиб $v(z)$ зависит от распределений нагрузки во всех других сечениях

$$v(z) = \int_0^l \delta(z, z_1)\, q(z_1)\, dz_1,$$

где $\delta(z, z_1)$ — прогиб в сечении z от единичной силы в сечении z_1 (функция влияния).

В рассматриваемом случае решение получается значительно более сложным и относится к контактным задачам.

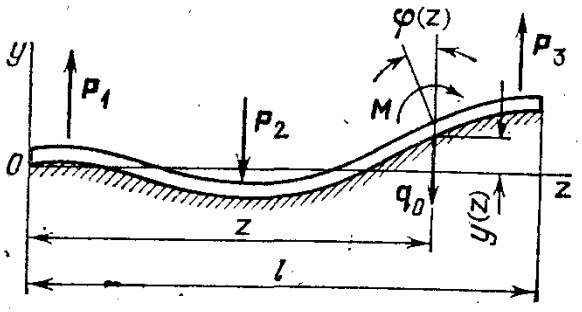


Рис. 15.5. Балка, лежащая на упругом полупространстве

3. Интересно отметить, что задача об изгибе балки на упругом основании имеет много общего с задачей осесимметричной деформации оболочек вращения. Роль «упругого основания» в оболочках играет реакция кольцевых слоев на радиальное перемещение.

Уравнения изгиба для балки постоянного сечения на упругом основании. Структура решения. В случае, когда $EJ_x(z) = EJ_x$ и коэффициент упругого основания постоянен ($k(z) = k$), уравнение изгиба (4) становится таким:

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} + \frac{k}{EJ_x} v(z) = \frac{1}{EJ_x} q_y(z). \tag{8}$$

Решение уравнения (8) можно получить общими методами решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и оно имеет следующую структуру:

$$v(z) = C_1 v_1(z) + C_2 v_2(z) + C_3 v_3(z) + C_4 v_4(z) + v^*(z), \tag{9}$$

где $v_i(z)$ — частные, линейно независимые решения однородного уравнения (8) при $q_y = 0$; $v^*(z)$ — частное решение неоднородного уравнения; C_i — произвольные постоянные. Однородное уравнение удобно записать в следующем виде:

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} + 4\beta^4 v(z) = 0, \tag{10}$$

где

$$4\beta^4 = \frac{k}{EJ_x}. \tag{11}$$

Частное решение предполагается в виде

$$v(z) = Ce^{\lambda z}. \tag{12}$$

Подставляя его в уравнение (10), найдем

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0. \tag{13}$$

Используя формулу Муавра для корней из комплексных чисел, найдем четыре корня уравнения (13):

$$\lambda_1 = \beta(1+i), \quad \lambda_2 = \beta(1-i), \quad \lambda_3 = -\beta(1-i), \quad \lambda_4 = -\beta(1+i). \quad (14)$$

Решение будет таким:

$$v(z) = \sum_{i=1}^{4} C_i e^{\lambda_i z} + v^*(z). \quad (15)$$

Учитывая формулы Эйлера для тригонометрических и гиперболических функций

$$e^{\pm i\beta z} = \cos\beta z \pm i \sin\beta z, \quad e^{\pm\beta z} = \operatorname{ch}\beta z \pm \operatorname{sh}\beta z, \quad (16)$$

можно представить решения (15) в различных формах, приспособленных для конкретных условий.

Длинные балки. Запишем решение (15) в следующем виде:

$$v(z) = e^{-\beta z}(C_1 \cos\beta z + C_2 \sin\beta z) + e^{\beta z}(C_3 \cos\beta z + C_4 \sin\beta z) + v^*(z). \quad (17)$$

Если балка является длинной (например, рельсовый путь), то величина $e^{\beta z}$ может быть очень большой, и по условиям ограниченности прогиба следует положить $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Решение для длинных балок будет таким:

$$v(z) = C_1 e^{-\beta z}\cos\beta z + C_2 e^{-\beta z}\sin\beta z + v^*(z). \quad (18)$$

Непосредственным дифференцированием получаем полезные для дальнейшего формулы:

$$\begin{aligned} v'(z) &= -C_1\beta e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z) + C_2\beta e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z) + v^{*\prime}(z), \\ v''(z) &= C_1 \cdot 2\beta^2 e^{-\beta z}\sin\beta z - C_2 \cdot 2\beta^2 e^{-\beta z}\cos\beta z + v^{*\prime\prime}(z), \\ v'''(z) &= C_1 \cdot 2\beta^3 e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z) + C_2 \cdot 2\beta^3 e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z) + v^{*\prime\prime\prime}(z). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим действие сосредоточенного усилия на бесконечно длинную балку (рис. 15.6). Поместим начало координат в сечении, где приложена сила.

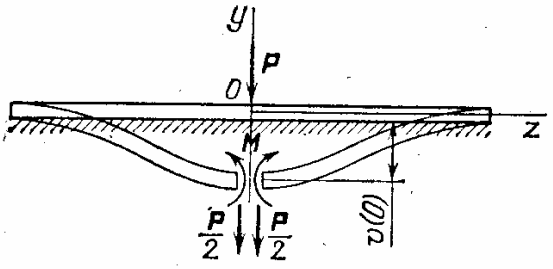


Рис. 15.6. Действие сосредоточенной силы на длинную балку на упругом основании

Краевые условия при $z = 0$ будут такими:

$$\frac{dv(0)}{dz} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^3v}{dz^3}(0) = -\frac{P}{2EJ_x}. \quad (21)$$

Так как перерезывающая сила в сечении равна

$$Q_y(0) = \frac{P}{2},$$

внешняя распределенная нагрузка $q_y(z)$ отсутствует, и потому $v^*(z) = 0$. Из соотношений (18)—(21) находим

$$-C_1 + C_2 = 0, \quad 2\beta^3(C_1 + C_2) = -\frac{P}{2EJ_x}$$

или

$$C_1 = C_2 = -\frac{P}{4\beta^3 EJ_x}.$$

Теперь из соотношений (18) и (19) находим значение прогиба и изгибающего момента:

$$v(z) = -\frac{P}{4\beta^2 EJ_x} e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z),$$
$$M_x(z) = -EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{P}{2\beta} e^{-\beta z}(\sin\beta z - \cos\beta z). \tag{22}$$

Из решения видно, что наибольшие значения прогиба и изгибающего момента получаются в сечении $z = 0$, где приложено усилие.

По мере удаления от сечения $z = 0$ прогибы затухают, так как они содержат множитель $e^{-\beta z}$ (рассматривается половина балки при $z > 0$; во второй половине распределение симметрично).

На расстоянии l можно практически пренебречь прогибами и моментами, если

$$\beta l > 3, \tag{23}$$

при этом $e^{-\beta l} < 1/20$. Условие (23) позволяет отнести рассматриваемую балку к числу длинных балок. Дальнейшее увеличение длины практически не оказывает влияния на максимальный прогиб и изгибающий момент.

Короткие балки на упругом основании. Функции Крылова. Значительно более сложным оказывается решение для коротких балок, когда требуется учесть условия на обоих концах балки (рис. 15.7). Для решения удобно воспользоваться нормальными фундаментальными функциями (функциями Крылова) уравнения (8). Эти функции ($Y_1(z)$, $Y_2(z)$, $Y_3(z)$, $Y_4(z)$) являются решениями однородного уравнения (8), удовлетворяющими специальному условию в начале координат $z = 0$. Например, функция $Y_2(z)$ должна при $z = 0$ удовлетворять следующим условиям:

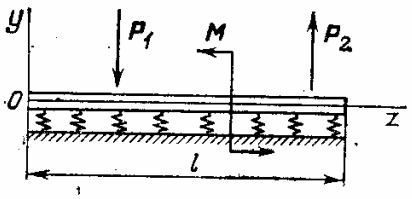


Рис. 15.7. Короткие балки на упругом основании

$$Y_2(0) = 0, \quad \frac{dY_2}{dz}(0) = 1, \quad \frac{d^2Y_2}{dz^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3Y_2}{dz^3}(0) = 0. \tag{24}$$

В порядке упражнения напишите аналогичные условия для остальных функций!

Как известно (разд. 34), функции Крылова могут быть образованы из частных решений однородного уравнения (8) путем надлежащего выбора произвольных постоянных:

$$Y_2(z) = \sum_{i=1}^{4} C_i e^{\lambda_i z};$$

надо найти постоянные C_i из систем линейных уравнений

$$Y_2(0)=\sum_{i=1}^{4} C_i=0, \qquad Y_2'(0)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i C_i=1,$$

$$Y_2''(0)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2 C_i=0, \quad Y_2'''(0)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^3 C_i=0,$$

где λ_i определяются равенствами (14). Не останавливаясь на алгебраической стороне вопроса, приведем окончательные результаты (функции Крылова):

$$Y_1(z)=\operatorname{ch}\beta z\cos\beta z, \qquad Y_2(z)=\frac{1}{2\beta}(\operatorname{ch}\beta z\sin\beta z+\operatorname{sh}\beta z\cos\beta z),$$
$$Y_3(z)=\frac{1}{2\beta^2}\operatorname{sh}\beta z\sin\beta z, \quad Y_4(z)=\frac{1}{4\beta^3}(\operatorname{ch}\beta z\sin\beta z-\operatorname{ch}\beta z\cos\beta z). \tag{25}$$

Решение дифференциального уравнения балки на упругом основании с помощью функций Крылова имеет следующий вид:

$$v(z)=v(0)Y_1(z)+v'(0)Y_2(z)+v''(0)Y_3(z)+v'''(0)Y_4(z)+Y^*(z), \tag{26}$$

где частное решение (см. разд. 34)

$$Y^*(z)=\int_0^x Y_4(z-z_1)\frac{1}{EJ_x}q_y(z_1)\,dz_1. \tag{27}$$

Как уже указывалось, одно из главных преимуществ применения нормальных фундаментальных функций состоит в том, что произвольные постоянные приобретают конкретный физический смысл.

Метод начальных параметров и решение уравнения изгиба балки на упругом основании в матричной форме. Представим решение (26) для прогиба и его производных в матричной форме:

$$\{v(z)\}^{\mathrm{T}}=[Y(z)]\{v(0)\}+\{Y^*(z)\}, \tag{28}$$

где $\{v(z)\}^{\mathrm{T}}=\{v(z),\ v'(z),\ v''(z),\ v'''(z)\}$ — вектор состояния, $\{v(0)\}$ — вектор начальных параметров, $\{Y^*(z)\}$ — вектор частного решения.

Нормальная фундаментальная матрица имеет следующую структуру:

$$[Y(z)]=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ -4\beta^4Y_4 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ -4\beta^4Y_3 & -4\beta^4Y_4 & Y_1 & Y_2 \\ -4\beta^4Y_2 & -4\beta^4Y_3 & -4\beta^4Y_4 & Y_1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где $Y_i=Y_i(z)$ — функция Крылова.

Интересно отметить, что производные функции Крылова по z выражаются снова через те же функции.

Матричная форма (28) удобна для конкретных расчетов, в которых требуется определить не только значение прогибов, но и производных прогибов. Примеры применения функций Крылова и решения (28) будут даны в разделе о цилиндрических оболочках.

Замечание. Решение (28) справедливо, разумеется, для балки на упругом основании произвольной длины, как общее решение уравнения (8). Но для длинных балок преимущества функций Крылова теряются, так как с ростом βz функции возрастают, и происходит потеря точности (результат оказывается зависящим от малых разностей больших чисел). Для балок с параметром $\beta l > 5$ применение функций Крылова не рекомендуется; большую точность можно получить с помощью решения (18).

Из этого замечания следует, что во многих случаях целесообразно изменять форму решения, приспосабливая ее к условиям задачи.

50. Криволинейные стержни и пружины

Вводные замечания. В ряде случаев элементы конструкций могут рассматриваться как стержни с криволинейной осью (кольца, пружины и т. п.). Ось стержня — геометрическое место центров тяжести сечений — представляет пространственную кривую (рис. 15.8).

В дальнейшем основное внимание уделяется стержням с криволинейной осью, лежащей в одной плоскости, т. е. когда ось стержня является плоской кривой.

В центре тяжести поперечного сечения помещается местная система координат; ось z_1 направлена вдоль касательной к оси стержня, оси x_1, y_1 — главные оси сечения.

Внешние силы приводятся к главному вектору $\mathbf{Q}$ и главному моменту $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i}_1 + Q_y\mathbf{j}_1 + N\mathbf{k}_1 = \{Q_x, Q_y, N\},$$
$$\mathbf{M} = M_x\mathbf{i}_1 + M_y\mathbf{j}_1 + M_z\mathbf{k}_1 = \{M_x, M_y, M_z\}, \quad (30)$$

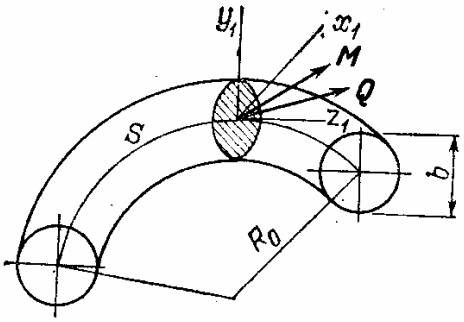


Рис. 15.8. Стержень с криволинейной осью

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — единичные векторы по осям x_1, y_1, z_1. В равенствах (30) Q_x, Q_y, N — перерезывающие и нормальные усилия; M_x, M_y, M_z — изгибающие и крутящий моменты.

Важным параметром, характеризующим криволинейный стержень, является радиус кривизны оси стержня (рис. 15.8). В зависимости от отношения

$$\nu = b/R_0, \quad (31)$$

где R_0 — радиус кривизны оси стержня, b — наибольший размер сечения вдоль радиуса кривизны, криволинейные стержни разделяются на стержни малой кривизны ($\nu < 1/5$) и стержни большой кривизны ($\nu > 1/5$).

Для стержней малой кривизны при определении напряжений и параметров деформации могут использоваться формулы для прямолинейных стержней (разд. 31).

Для стержней большой кривизны требуется учесть дополнительные факторы, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Винтовые пружины. Наибольшее распространение в различных областях техники имеют винтовые пружины, которые обычно могут рассматриваться как стержни малой кривизны; винтовые пружины изготавливаются чаще всего путем навивки на цилиндрическую

оправку проволоки диаметром от 0,2 до 50 мм и выше (рис. 15.9). Диаметр цилиндрической поверхности, содержащей центры тяжести сечений (средний диаметр), обозначен D_0 (рис. 15.9), диаметр проволоки d, шаг навивки t, ось стержня является винтовой линией с углом подъема α:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{t}{\pi D_0}. \qquad (32)$$

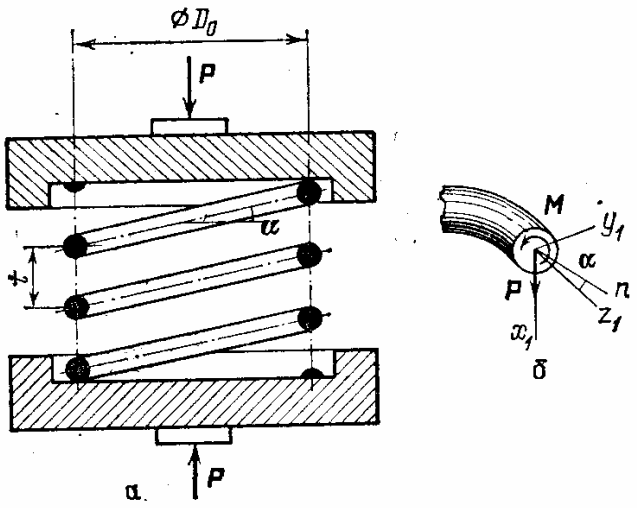


Рис. 15.9. Расчетная схема витой пружины: *а* — конструктивная схема; *б* — силовые факторы в сечении пружины

В большинстве случаев угол α — малая величина ($\operatorname{tg}\alpha \leqslant \leqslant 0{,}2$, $\alpha \leqslant 12°$). Наибольшее распространение получили пружины, работающие на сжатие (рис. 15.9) (клапанные пружины, пружинные рессоры и т. п.); через тарелки или торцевые плоскости передается усилие P, действующее вдоль оси пружины.

В поперечном сечении создается крутящий момент

$$M_к = M\cos\alpha \approx \frac{1}{2}PD_0, \qquad (33)$$

так как $\cos\alpha \approx 1$. Изгибающим моментом в сечении при малых углах α можно пренебречь.

Важным геометрическим параметром витой пружины является ее индекс c:

$$c = D_0/d, \qquad (34)$$

где D_0 — средний диаметр пружины, d — диаметр проволоки.

Для пружин большого индекса ($c \geqslant 8$) распределение касательных напряжений при действии крутящего момента такое же, как при кручении прямого вала (рис. 15.10, *а*):

$$\tau_{к\max} = \frac{16M_к}{\pi d^3} = \frac{8PD_0}{\pi d^3}. \qquad (35)$$

Перерезывающая сила в сечении $Q = P$ дает касательные напряжения среза, приближенно равные (рис. 15.10, *б*)

$$\tau_{ср} = \frac{4P}{\pi d^2}. \qquad (36)$$

Максимальное касательное напряжение находится в точке попереч-

ного сечения, ближайшей к оси пружины (точка A на рис. 15.10):

$$\tau_{max} = \tau_{кmax} + \tau_{ср} = \\ = \tau_{кmax}\left(1 + \frac{\tau_{ср}}{\tau_{кmax}}\right) = \frac{8PD_0}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D_0}\right) = \frac{8PD_0}{\pi d^3}\left(1 + \frac{1}{2c}\right). \quad (37)$$

Разрушение пружин обычно начинается в точке A, где напряжения наибольшие.

В общем случае максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \frac{8PD_0}{\pi d^3}, \quad (38)$$

где $\alpha_\tau = \alpha_\tau(c)$ — коэффициент концентрации напряжений на внутреннем волокне пружины (в точке A). Приближенно можно принять,

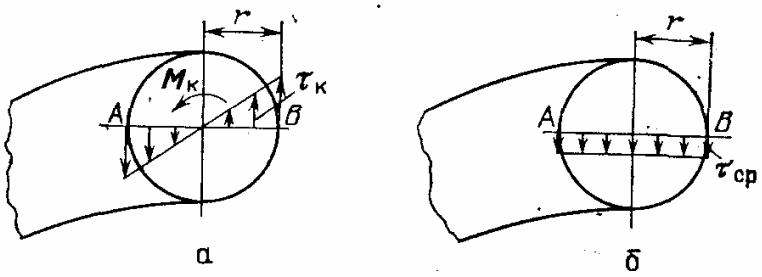


Рис. 15.10. Касательные напряжения кручения $\tau_к$ и среза $\tau_{ср}$ в сечении пружины

что при кручении касательные напряжения на внутреннем волокне возрастают пропорционально отношению радиусов винтовых линий:

$$\alpha_{\tau_{кр}} \approx \frac{R_0}{R_A} = \frac{R_0}{R_0 - \frac{1}{2}d} = \frac{c}{c-1}.$$

Такое предположение основано на том, что при кручении сечение стержня остается неизменным, а углы сдвига и касательные напряжения изменяются обратно пропорционально длинам винтовых линий. Коэффициент концентрации касательных напряжений равен

$$\alpha_\tau \approx \frac{c}{c-1} + \frac{1}{2c}. \quad (39)$$

При уменьшении индекса c величина α_τ возрастает.

Для определения осадки пружины (сближения точек приложения усилий P) найдем величину потенциальной энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_к^2\, ds}{GJ_к} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{KQ^2\, ds}{GF}. \quad (40)$$

В качестве длины стержня принимают

$$l = \pi D n, \quad (41)$$

где n — число рабочих витков.

Для передачи осевого усилия на пружину витки на концах пружины поджимаются при навивке и сошлифовываются для получения опорной плоскости (рис. 15.9). Обычно принимается число рабочих витков

$$n = n_0 - \Delta, \tag{42}$$

где $\Delta = 1, \ldots, 2$ — число концевых витков.

Учитывая, что

$$J_к = J_p = \pi d^4/32, \quad F = \pi d^2/4,$$

и принимая $K \approx 1$, получаем из соотношения (40)

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{8P^2D_0^2\pi D_0 n}{G\pi d^4} + \frac{4P^2 D_0 \pi n}{G\pi d^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8P^2D_0^3 n}{Gd^4} + \frac{4P^2 D_0 n}{Gd^2}\right). \tag{43}$$

Потенциальная энергия деформации равна работе внешней силы (закон сохранения энергии)

$$U = \frac{1}{2} P\delta, \tag{44}$$

где δ — осадка пружины. Из уравнений (43) и (44) находим

$$\delta = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4} + \frac{4PD_0 n}{Gd^2} = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{D_0^2}\right). \tag{45}$$

Вторым слагаемым практически можно пренебречь; тогда

$$\delta = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4} = \lambda n, \tag{46}$$

где

$$\lambda = \frac{8PD_0^3}{Gd^4} \tag{47}$$

— осадка одного витка.

Формулы (38) и (46) являются основными для расчета пружин. Связь осадки пружины δ и действующего усилия P показана на рис. 15.11. Усилие предварительной затяжки (осадки) P_1 принимается в зависимости от назначения пружины в пределах

$$P_1 = (0{,}1 - 0{,}5)P_2, \tag{48}$$

где P_2 — максимальная нагрузка на пружину. Величина P_2 представляет наибольшую допустимую нагрузку по условиям статической прочности. При осадке пружины $\delta_{пос}$ происходит соприкосновение витков и удар. Необходимо выполнение очевидного условия

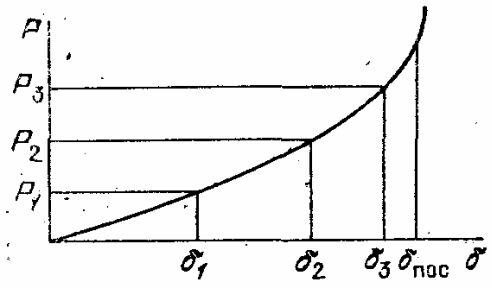


Рис. 15.11. Связь осадки пружины δ и действующего усилия P

$$\delta < \delta_{пос}. \tag{49}$$

Из этого условия назначается шаг пружины (в свободном

состоянии)

$$t \geqslant d + \frac{k\delta_3}{n}, \tag{50}$$

где δ_3 — осадка при допустимой (статической) нагрузке; n — число рабочих витков; $k = 1{,}1; \ldots; 1{,}3$ — коэффициент, гарантирующий зазор между витками при наибольшей нагрузке.

Модели прочностной надежности пружин. В качестве материала пружин используются высокоуглеродистые и легированные стали, термообработанные на высокий предел прочности ($\sigma_b = 1200$—3000 МПа). Они характеризуются сравнительно малой пластичностью. В качестве критерия разрушения можно принять максимальные растягивающие напряжения σ_1; при напряженном состоянии типа кручения или сдвига

$$\sigma_1 = \tau_{max}. \tag{51}$$

Модель прочностной надежности пружин при статических нагрузках имеет вид

$$\sigma_1 = \alpha_\tau \frac{8PD_0}{\pi d^3} \leqslant \frac{\sigma_b}{n_{ст}}, \tag{52}$$

где σ_b — предел прочности материала, $n_{ст}$ — запас статической прочности. Обычно при расчете пружин принимают

$$n_{ст} = 1{,}7 - 3{,}5. \tag{53}$$

Величина предела прочности σ_b зависит от диаметра проволоки; при уменьшении диаметра проволоки σ_b возрастает.

Модель прочностной надежности пружин при циклических нагрузках. При числе циклов нагружений $N \geqslant 10^6$ опасным становится усталостное разрушение. Условие усталостной прочности имеет вид

$$\tau_a^* \frac{K_\tau}{\beta\varepsilon} + \psi_\tau \tau_m^* = \tau_{-1}, \tag{54}$$

где τ_a^*, τ_m^* — амплитуда переменных напряжений и постоянное напряжение в момент разрушения; τ_{-1} — предел выносливости для касательных напряжений; K_τ, β, ε — эффективный коэффициент концентрации напряжений, коэффициент поверхности и масштабный фактор; ψ_τ — коэффициент влияния постоянных напряжений. При подобии рабочего и предельного циклов имеем

$$\tau_a^* = n_{пд}\tau_a, \quad \tau_m^* = n_{пд}\tau_m, \tag{55}$$

где τ_a, τ_m — наибольшие переменные и постоянные напряжения в рабочих условиях, $n_{пд}$ — запас по подобному циклу. Из соотношений (54) и (55) находим

$$n_{пд} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{K_\tau}{\beta\varepsilon} + \psi_\tau \tau_m}. \tag{56}$$

При возрастании только переменной части напряжений:

$$\tau_a^* = n_a \tau_a, \quad \tau_m^* = \tau_m \tag{57}$$

получаем из соотношений (54) и (57)

$$n_a = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_m}{\tau_a \frac{K_\tau}{\beta\varepsilon}}. \tag{58}$$

Запас по переменным напряжениям n_a применяется в тех случаях, когда имеется опасность усталостных разрушений пружин вследствие резонансных явлений. Если внешняя нагрузка циклически изменяется от $P_{\max} = P_2$ до $P_{\min} = P_1$, то

$$\tau_a = \alpha_\tau \frac{8P_a D_0}{\pi d^3}, \quad \tau_m = \alpha_\tau \frac{8P_m D_0}{\pi d^3}, \tag{59}$$

где

$$P_a = \frac{1}{2}(P_{\max} - P_{\min}), \; P_m = \frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min}). \tag{60}$$

Так как «концентрация напряжений» отражена в величинах τ_a и τ_m, то ее дополнительный учет не требуется — можно принять в равенствах (56) и (58) $K_\tau \approx 1$. Величина β при наличии упрочняющей обработки (например, обдувки микрошариками) принимается равной 1,3—1,4. Влияние чистоты поверхности, коррозии и других факторов на величину β указывалось в разд. 16.

Масштабный фактор ε принимается по формулам разд. 16, $\psi_\tau \approx 0{,}1$. Запас прочности по подобному циклу $n_{\text{пд}} = 1{,}4—2{,}5$; запас по переменным напряжениям $n_a = 2—3$.

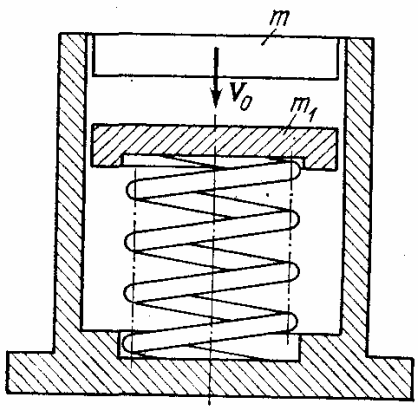


Рис. 15.12. Ударное нагружение пружины

Замечание. Возрастание касательных напряжений на внутренних волокнах (в окрестности точки A) носит плавный характер и только условно относится к концентрации напряжений. В сущности, коэффициент α_τ вводится скорее как приближенная поправка к простым формулам для прямого бруса, позволяющего избегать более точного, но громоздкого расчета.

Модель прочностной надежности пружин при ударном нагружении. Рассмотрим действие на пружину груза весом Q, падающего с начальной скоростью V_0 (рис. 15.12).

Для определения наибольшей динамической нагрузки используется приближенное решение, основанное на том, что энергия падающего груза $U_{\text{гр}}$ переходит в потенциальную энергию сжатия пружины $U_{\text{пр}}$. Будем сначала пренебрегать массой пружины и покрывающей тарелки по сравнению с массой груза. Статическая осадка пружины под действием усилия Q равна

$$\delta_{\text{ст}} = \delta_{11} Q, \tag{61}$$

где δ_{11} — осадка пружины при единичной (статической) силе. После удара груза в пружине возникают динамическая осадка $\delta_{\text{д}}$ и потенциальная энергия пружины

$$U_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\delta_{\text{д}} Q_{\text{д}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\delta_{11}}\delta_{\text{д}}^2 \quad (\delta_{\text{д}} = \delta_{11} Q_{\text{д}}). \tag{62}$$

Изменение энергии груза равно разности энергии груза в момент соприкосновения и после полной осадки пружины:

$$U_{\text{гр}} = U_{1\text{гр}} - U_{2\text{гр}} = \frac{1}{2}\frac{Q}{q}V_0^2 + QH - Q(H - \delta_{\text{д}}) = \frac{1}{2}\frac{Q}{q}V_0^2 + Q\delta_{\text{д}}, \tag{63}$$

где QH — потенциальная энергия груза в поле силы тяжести (H — высота). Предполагается, что груз останавливается при полном сжатии пружины. Пренебрегая рассеянием энергии и приравнивая $U_{\text{пр}}$ и $U_{\text{гр}}$, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\delta_{11}}\delta_{\text{д}}^2 - Q\delta_{\text{д}} - \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_0^2 = 0, \tag{64}$$

что дает

$$\delta_д = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{11}Q}}\right) = \delta_{ст}K_д, \tag{65}$$

где коэффициент динамического усилия

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{11}Q}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}}}, \tag{66}$$

Коэффициент динамического усилия показывает, во сколько раз возрастает осадка (прогиб) упругой системы при динамическом приложении внешней нагрузки по сравнению со статическим (медленно возрастающим ее приложением).

Если нагрузка прикладывается мгновенно, но с нулевой скоростью ($V_0 = 0$), из формулы (66) получаем

$$K_д = 2. \tag{67}$$

При наличии начальной скорости $K_д > 2$. Для уменьшения $K_д$ следует увеличивать податливость системы (величину δ_{11}).

Максимальное напряжение в пружине при ударе равно

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \frac{8Q_д D_0}{\pi d^3} = \alpha_\tau \frac{8\delta_д D_0}{\delta_{11}\pi d^3}. \tag{68}$$

Рассмотрим теперь удар падающего груза при наличии на торце пружины массы m_1 (буфера).

Считая удар неупругим, получим, что после соударения массы m и m_1 начнут двигаться с общей скоростью V_1, которую можно определить из равенства количества движения:

$$V_1 = V_0 \frac{m}{m + m_1} = V_0 \frac{1}{1 + m_1/m}. \tag{69}$$

Повторяя предыдущий вывод, найдем для рассматриваемого случая

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}(1 + m_1/m)}}. \tag{70}$$

Наличие массы m_1 перед пружиной понижает динамические напряжения в пружине. Ранее считалось, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой груза. Для приближенного учета массы пружины считаем, что к m_1 должна быть добавлена приведенная масса (приведенная к сечению пружины, воспринимающему удар). Если скорость начального сечения V_{max}, то кинетическую энергию приведенной массы и всей конструкции (пружины) получим в виде

$$\frac{1}{2} m_{1пр} V_{max}^2 = K_1, \tag{71}$$

где K_1 — кинетическая энергия, которую приобретает пружина после удара.

При статическом приложении усилия осадка витков линейно изменяется по длине:

$$\delta(s) = \delta_{max}\frac{s}{l}, \tag{72}$$

где s — длина вдоль проволоки пружины, l — общая длина пружины, δ — максимальная осадка (при $s = l$).

В нижнем сечении ($s = 0$) осадка (перемещение) отсутствует. Предполагая приближенно, что распределение динамического прогиба (осадка) остается подобным статическому распределению, получим, дифференцируя равенство (72) по времени,

$$V(s) = V_{\max}\frac{s}{l}.$$

Кинетическая энергия пружины

$$K_1 = \frac{1}{2}\int_0^l \mu V^2(s)\,ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,\mu l V_{\max}^2,$$

где μ — масса единицы длины пружины, $\mu l = m_{\text{пр}}$ — масса всей пружины. Из равенства (71) находим приведенную массу пружины

$$\frac{1}{2}\,m_{1\text{пр}}V_{\max}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,V_{\max}^2, \tag{73}$$

или

$$m_{1\text{пр}} = \frac{1}{3}\,m_{\text{пр}}.$$

Коэффициент динамического усилия с учетом массы пружины равен

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{\text{ст}}\left(1 + \dfrac{m_1 + m_{\text{пр}}}{m}\right)}}. \tag{74}$$

Замечание. Приближенная модель ударного воздействия, рассмотренная на примере пружины, используется для общего случая ударного нагружения конструкций (рис. 15.13). Формула для коэффициента динамического усилия (74) остается прежней, но изменяются $\delta_{\text{ст}}$ — прогиб оси статического воздействия груза — и значение приведенной массы $m_{\text{пр}}$.

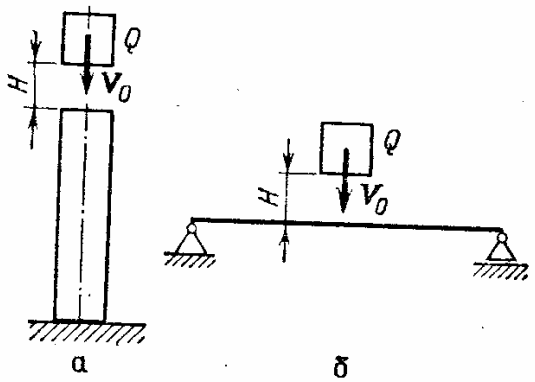


Рис. 15.13. Ударное нагружение конструкций

Для стержня (рис. 15.13) приведенная масса

$$m_{1\text{пр}} = \frac{1}{3}\,m_{\text{стержень}},$$

для балки

$$m_{1\text{пр}} = \frac{17}{35}\,m_{\text{балка}}.$$

Стержни большой кривизны. Нормальные напряжения. Рассмотрим стержень с плоской криволинейной осью, причем плоскость симметрии поперечного сечения лежит в той же плоскости (рис. 15.14). Начало местной системы координат помещается в приведенном центре тяжести сечения, отстоящем на расстояние e от центра тяжести сечения; величина e определяется в дальнейшем. Ось стержня представляет геометрическое место приведенных центров тяжести сечений; радиус кривизны оси стержня обозначен r, элемент дуги ds_0.

Приближенная теория стержней большой кривизны основана на гипотезе плоских сечений.

Перемещения точек поперечного сечения вдоль оси стержня

$$w = w_0 + y\varphi_x, \tag{75}$$

где w_0 — перемещение точки O_c, лежащей на оси стержня; φ_x —

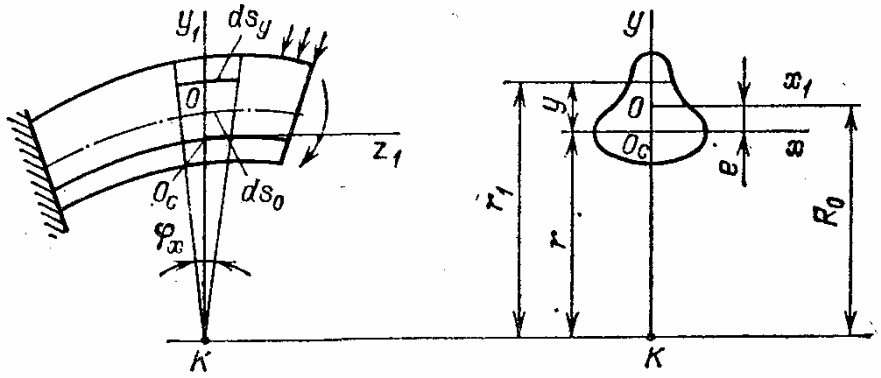


Рис. 15.14. Стержни большой кривизны. Перемещения по гипотезе плоских сечений

угол поворота сечения. Приращение перемещения

$$dw = \frac{dw_0}{ds_0} ds_0 + y \frac{d\varphi_x}{ds_0} ds_0. \tag{76}$$

Относя величину dw к первоначальной длине отрезка, найдем

$$\varepsilon = \frac{dw}{ds_y} = \frac{dw_0}{ds_0} \frac{ds_0}{ds_y} + y \frac{d\varphi_x}{ds_0} \frac{ds_0}{ds_y}, \tag{77}$$

где ds_y — длина дуги на расстоянии $r + y$:

$$ds_y = ds_0 \frac{r + y}{r}. \tag{78}$$

Учитывая соотношение (78), получим

$$\varepsilon = \frac{dw_0}{ds_0} \frac{r}{r + y} + \frac{yr}{r + y} \frac{d\varphi_x}{ds_0}. \tag{79}$$

Считая напряженное состояние одноосным (гипотеза ненадавливания), получим при упругих деформациях $\sigma = E(\varepsilon - \alpha T)$, или

$$\sigma = E\left(\frac{r}{r + y} \frac{dw_0}{ds_0} + \frac{yr}{r + y} \frac{d\varphi_x}{ds_0} - \alpha T \right), \tag{80}$$

где αT — температурная деформация.

Из условий равновесия имеем

$$\int_F \sigma \, dF = N, \tag{81}$$

$$\int_F \sigma y \, dF = M_x. \tag{82}$$

Учитывая соотношения (80), (81) и (82), получим систему двух уравнений относительно параметров деформации:

$$\frac{dw_0}{ds_0}\int_F E\frac{r}{r+y}\,dF + \frac{d\varphi_x}{ds_0}\int_F E\frac{ry}{r+y}\,dF - \int_F E\alpha T y\,dF = N, \tag{83}$$

$$\frac{dw_0}{ds_0}\int_F F\frac{ry}{r+y}\,dF + \frac{d\varphi_x}{ds_0}\int_F E\frac{ry^2}{r+y}\,dF - \int_F E\alpha T y\,dF = M_x. \tag{84}$$

Определим положение начала координат (центра сопротивления) из условия

$$\int_F E\frac{y}{r+y}\,dF = 0. \tag{85}$$

Из соотношений (83) и (84) находим параметры деформации dw_0/ds_0 и $d\varphi_x/ds_0$ и по равенству (80) получаем

$$\sigma = E\frac{r}{r+y}\left(\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x}\right) + E\left(\frac{r}{r+y}\frac{\int_F E\alpha T\,dF}{A} + \frac{ry}{r+y}\frac{\int_F E\alpha T y\,dF}{B_x} - \alpha T\right), \tag{86}$$

где жесткости сечений на растяжение и изгиб равны соответственно

$$A = \int_F E\frac{r}{r+y}\,dF, \quad B_x = \int_F E\frac{ry^2}{r+y}\,dF. \tag{87}$$

Учитывая соотношение (52), запишем

$$A = \int_F E\frac{r+y-y}{r+y}\,dF = \int_F E\,dF, \tag{88}$$

$$B_x = r\int_F \frac{Ey^2}{r+y}\,dF + r\int_F \frac{Ery}{r+y}\,dF = r\int_F Ey\,dF. \tag{89}$$

Первая группа членов в формуле (86) выражает напряжения в криволинейном стержне от внешних сил.

Обычное (линейное) распределение напряжений в прямом стержне содержит множитель $r/(r+y)$, приводящий к увеличению напряжений при $y<0$ (на более близких к центру кривизны волокнах). Вторая группа членов дает температурные напряжения.

Замечание. Характерной чертой преобразований в теории криволинейного стержня является использование равенства (85). В частности, при выводе формулы (89) к исходному интегралу был добавлен нулевой член.

Определение приведенного центра тяжести сечения криволинейного стержня. Примеры. Центр кривизны K обычной оси стержня (геометрического места центров тяжести сечений) считаем извест-

ным, и требуется определить величину r — расстояние от приведенного центра тяжести до центра кривизны.

Из условия (85) находим

$$\int_F E\frac{y}{r+y}dF = \int_F E\frac{y+r-r}{r+y}dF = \int_F E\,dF - r\int_F \frac{E\,dF}{r+y} = 0, \qquad (90)$$

что дает

$$r = \frac{\int_F E\,dF}{\int_F \frac{E\,dF}{r+y}} = \frac{\int_F E\,dF}{\int_F \frac{E\,dF}{r_1}}, \qquad (91)$$

где $r_1 = r + y$ — расстояние от элемента dF до центра кривизны (известная величина).

Можно установить приближенную формулу для величины

$$e = r_0 - r. \qquad (92)$$

Учитывая, что

$$y_1 = y - e$$

— расстояние до главной оси сечения, $\int_F Ey_1 dF = 0$, получим из равенства (90)

$$\int_F \frac{E(y_1+e)}{r+y}dF \approx \frac{1}{r_0}\int_F E(y_1+e)\left(1-\frac{y_1}{r_0}\right)dF \approx 0,$$

или

$$e\int_F EdF - \frac{1}{r_0}\int_F Ey_1^2 dF \approx 0.$$

Из последнего соотношения находим

$$\frac{e}{r_0} \approx \frac{B_{x\,\text{пр}}}{r_0^2 A},$$

где $B_{x\,\text{пр}}$ — жесткость сечения на изгиб для прямолинейного стержня.

При постоянном модуле упругости имеем

$$\frac{e}{r_0} \approx \frac{J_x}{r_0^2 F}, \qquad (93)$$

где $J_x = \int_F y_1^2 dF$ — главный момент инерции сечения.

Пример. Рассмотрим стержень с прямоугольным поперечным сечением (рис. 15.15, *а*). Модуль упругости E считаем постоянным.

По формуле (91) находим

$$r = \frac{\int\limits_F dF}{\int\limits_F \frac{dF}{r_1}} = \frac{F}{b\int\limits_{r_0-h/2}^{r_0+h/2} \frac{dr_1}{r_1}} = \frac{h}{\ln \frac{r_0+h/2}{r_0-h/2}}.$$

Смещение центра тяжести сечения относительно приведенного центра тяжести равно

$$e = r_0 - \frac{h}{\ln \frac{r_0+h/2}{r_0-h/2}}. \tag{94}$$

Учитывая разложение натурального логарифма в ряд, получим

$$\frac{e}{r_0} \approx \frac{1}{12}\frac{h^2}{r_0^2}, \tag{95}$$

что соответствует формуле (93).

Для круглого сечения (рис. 15.15, *б*) укажем окончательный результат, опуская промежуточные довольно громоздкие преобразования:

$$\frac{e}{r_0} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}\right) \approx \frac{1}{16}\frac{d^2}{r_0^2}, \tag{96}$$

где $d = 2R$ — диаметр круглого сечения.

Приближенное значение e/r_0 вытекает из соотношения (93).

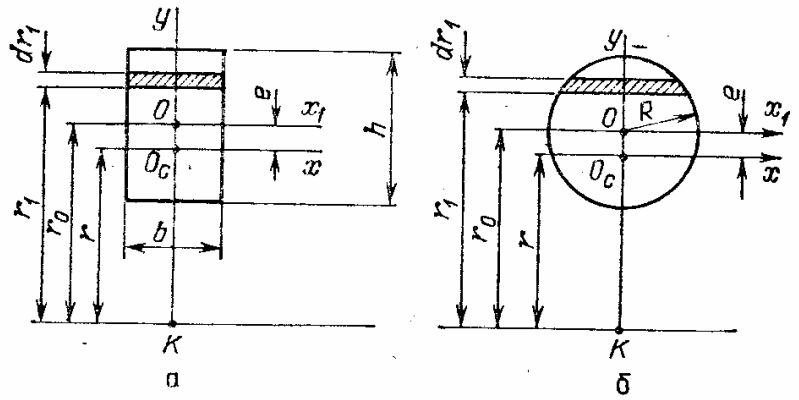


Рис. 15.15. Криволинейный стержень с прямоугольным (*а*) и круглым (*б*) поперечными сечениями

Замечание. Ось x проходит через приведенный центр тяжести, отстоящий на расстояние e от центра тяжести сечения; поэтому

$$\int\limits_F Ey\,dF = \int\limits_F E\,(y_1 + e)\,dF = e\int\limits_F E\,dF, \tag{97}$$

так как

$$\int\limits_F Ey_1\,dF = 0$$

как обобщенный статический момент относительно главной оси.

Касательные напряжения при изгибе криволинейного стержня. Касательные напряжения, как и в прямолинейном стержне (разд. 31), определяются из условия равновесия отсеченной части элемента стержня (рис. 15.16). Предполагая касательные напряжения распределенными равномерно по хорде b и проектируя все силы на горизонтальное направление, находим

$$\frac{\partial N_f}{\partial s} - \tau b \frac{r+y}{r} + \frac{1}{r} Q_f = 0, \tag{98}$$

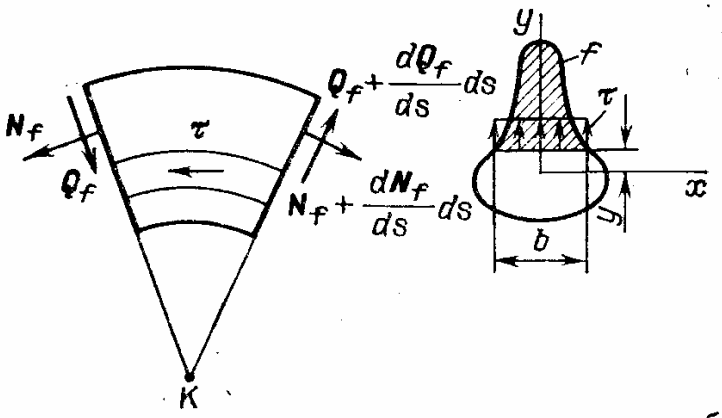


Рис. 15.16. Касательные напряжения при изгибе криволинейного бруса

где N_f, Q_f — нормальное и касательное усилия, действующие на отсеченную часть с площадью сечения f (общая площадь поперечного сечения F):

$$N_f = \int_f \sigma \, dF, \qquad Q_f = \int_f \tau \, dF.$$

Опуская вывод, приведем окончательный результат для криволинейного стержня с постоянными параметрами упругости:

$$\tau = \frac{rQ}{b(r+y)^2}\left(\frac{S_f}{S_F} - \frac{f}{F}\right), \tag{99}$$

где $S_f = \int_f y \, dF$, $S_F = \int_F y \, dF$ — статические моменты относительно по оси x, проходящей через приведенный центр тяжести; f, F — площади отсеченной части и всего поперечного сечения.

Перемещения на изгибе криволинейного стержня. Для нахождения перемещений составим сначала выражение потенциальной энергии деформации равномерно нагретого криволинейного стержня. В результате деформации сечение стержня получает поступательное смещение w_0 и угол поворота φ_x (рис. 15.17).

Работа, совершаемая при деформации элемента стержня, равна

$$dU = \frac{1}{2} M_x \frac{d\varphi_x}{ds} ds + \frac{1}{2} N \frac{dw_0}{ds} ds, \tag{100}$$

где параметры деформации имеют вид

$$\frac{d\varphi_x}{ds} = \frac{M_x}{B_x}, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{N}{A}. \tag{101}$$

В равенстве (67) пренебрегается работой перерезывающих сил.

Потенциальная энергия деформации всего стержня

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2 ds}{B_x} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2 ds}{A}. \qquad (102)$$

Интегрирование ведется вдоль оси приведенных центров тяжести.

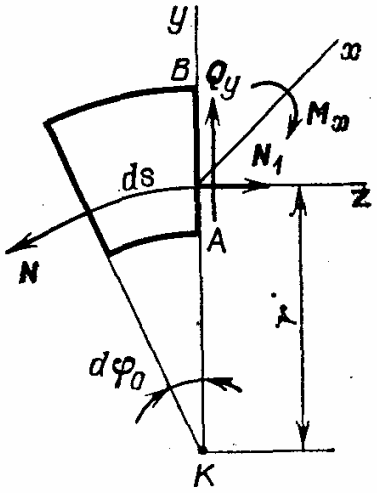
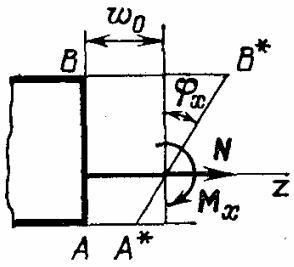


Рис. 15.17. Определение потенциальной энергии элемента стержня



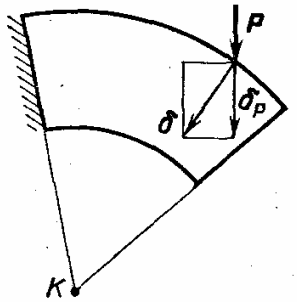


Рис. 15.18. Определение перемещений в криволинейном стержне

Если к стержню (рис. 15.18) приложена сила P, то перемещение точки приложения силы по направлению ее действия по теореме Кастилиано составит

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}. \qquad (103)$$

Этот же результат можно получить с помощью интеграла Мора

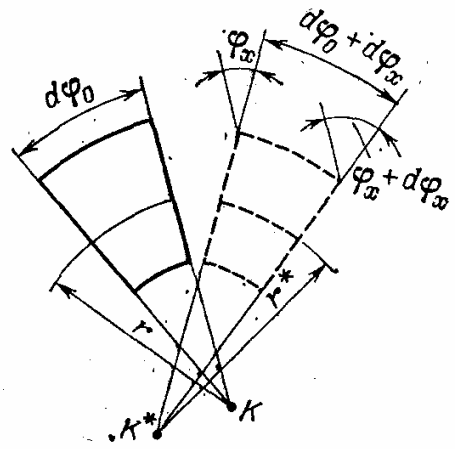


Рис. 15.19. Изменение радиуса кривизны при деформации криволинейного стержня

$$\delta = \int_0^l \left(\frac{M_x M_{1x}}{B_x} + \frac{N N_1}{A} \right) ds, \qquad (104)$$

где M_{1x}, N_1 — единичный изгибающий момент и осевая сила. Формула (104), как и в случае прямолинейного стержня, справедлива для определения прогиба в точке приложения единичной силы вдоль линии ее действия.

Замечания. 1. Обычно при нахождении энергии деформации криволинейного стержня большой кривизны интегрирование ведется вдоль оси центров тяжести и внешние нагрузки приводятся к обычным главным осям сечения. Тогда появляется необходимость учитывать работу момента от перемещений, вызванных усилием. При интегрировании вдоль оси приведенных центров тяжести формулы для криволинейного и прямолинейного брусьев совпадают.

2. Параметр изгибной деформации $d\varphi_x/ds$ связан с изменением радиуса кривизны оси приведенных центров тяжести сечений. Если r — первоначальный радиус кривизны (рис. 15.19):

$$ds = r d\varphi_0, \tag{105}$$

то после деформации его величина будет r^* и угол между гранями элемента становится равным $d\varphi_x + d\varphi_0$. Пренебрегая удлинением оси при рассмотрении изгибной деформации, получим

$$r^*(d\varphi_x + d\varphi_0) = r\, d\varphi_0 = ds. \tag{106}$$

Из последнего соотношения находим

$$\frac{d\varphi_x}{ds} = \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r} = \frac{M_x}{B_x}. \tag{107}$$

Параметр $d\varphi_x/ds$ выражает изменение кривизны стержня.

ГЛАВА 16

ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

В современной технике многие элементы конструкций могут рассматриваться как тела, у которых один размер (толщина) мал по сравнению с двумя другими.

Если срединная поверхность таких тел плоская, то они называются *пластинками,* если искривленная — *оболочками.*

51. Пластинки

По форме срединной поверхности в плане различают круглые и прямоугольные пластинки (рис. 16.1). Значительно реже используются расчетные модели в виде эллиптических, треугольных и других пластинок.

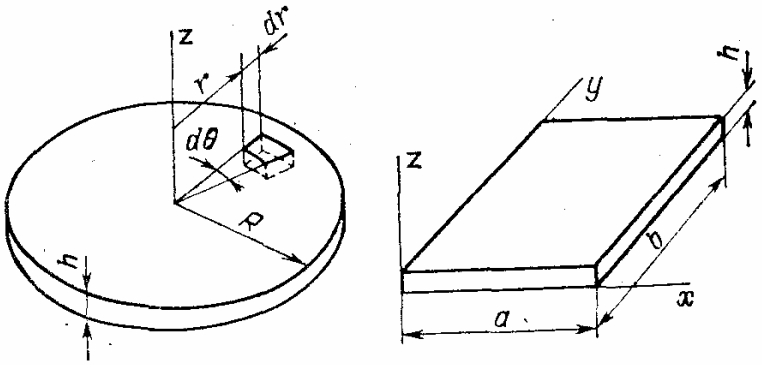


Рис. 16.1. Круглые и прямоугольные пластинки

В зависимости от относительной толщины пластинки (h/R, h/a) различают тонкие ($h/R < 0{,}1$) и толстые пластинки (плиты) ($h/R > 0{,}4$). Расчетные модели для указанных пластинок различны.

В дальнейшем ограничимся изучением прочностных моделей тонких пластинок.

Основные гипотезы при построении прочностных моделей пластинок. В инженерной практике применяются две основные гипотезы при построении прочностных моделей тонких пластинок.

Обе они используют то обстоятельство, что толщина пластинки мала по сравнению с ее размерами в плане.

Первая гипотеза, принадлежащая Кирхгофу, утверждает, что нормаль к срединной поверхности (плоскости) оболочки остается нормалью к ней после деформации. Эта гипотеза, вполне аналогичная гипотезе плоских сечений при изгибе и растяжении стержней, называется *гипотезой жесткой нормали.*

Вторая гипотеза утверждает, что напряженное состояние в точках пластинки является двуосным; нормальными и касательными напряжениями в площадках, перпендикулярных оси z, можно пренебречь.

Уравнения равновесия для осесимметричного изгиба и растяжения круглых пластинок. Осесимметричная деформация круглых

пластинок возникает, когда нагружение и условия закрепления являются осесимметричными. В общем случае к элементу пластинки (рис. 16.2) приложены распределенные (на единицу площади срединной поверхности) нагрузки q_r и q_z. По граням элемента действуют (на единицу длины) изгибающие моменты M_r, M_θ, усилия N_r, N_θ и перерезывающее усилие Q_r. В силу симметрии имеем $Q_\theta = 0$.

Измененное значение силового фактора в связи с приращением координаты r отмечено верхним индексом (звездочкой).

Составим проекцию всех сил на радиальное направление (см. уравнение (83) разд. 48):

$$-N_r r\,d\theta + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta - N_\theta\,d\theta\,dr + q_r r\,d\theta\,dr = 0,$$

или

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + q_r = 0. \qquad (1)$$

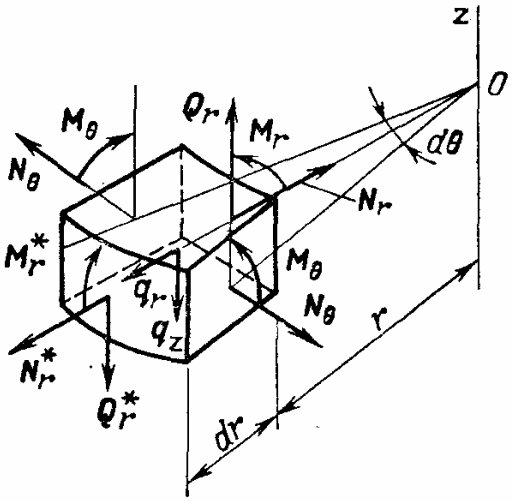


Рис. 16.2. Усилия и моменты, приложенные к элементу пластинки

При действии центробежных сил получим

$$q(r) = \rho\omega^2 r h. \qquad (2)$$

Уравнение (1) было выведено ранее (в разделе о растяжении дисков). Равновесие сил в вертикальном направлении приводит к следующему равенству:

$$Q_r r\,d\theta - \left(Q_r + \frac{dQ_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta - q_z r\,d\theta\,dr = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(Q_r r) = -q_z r. \qquad (3)$$

Теперь составим уравнение моментов относительно касательной к окружности радиусом r (рис. 16.2):

$$-M_r r d\theta + \left(M_r + \frac{dM_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta - M_\theta dr d\theta - \left(Q_r + \frac{dQ_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta dr - q_z r d\theta dr \cdot \frac{1}{2}\,dr = 0. \qquad (4)$$

Моменты M_θ вошли в уравнение, так как имеют составляющие $2M_\theta \sin(d\theta/2)$ относительно рассматриваемой оси. В уравнении (4) должны быть сохранены члены второго порядка малости, так как

члены первого порядка взаимно уничтожаются, члены третьего порядка, и среди них момент от поперечной распределенной нагрузки, должны быть отброшены.

В результате получим

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - Q_r = 0. \tag{5}$$

Деформация круглых пластинок. Точка A_0, лежащая в срединной плоскости пластинки, при осесимметричной деформации получает смещение u_0 вдоль радиального направления (рис. 16.3) и смещение (прогиб) w вдоль оси z. Положительное направление прогиба w примем противоположным направлению оси z. Перемещение в радиальном направлении точки A, отстоящей на расстояние z от точки A_0, будет равно

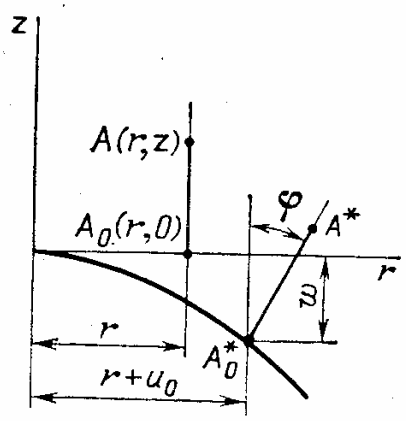


Рис 16.3. Деформации при осесимметричном нагружении круглых пластинок

$$u = u_0 + z\varphi(r), \tag{6}$$

где $\varphi(r)$ — угол поворота нормали (отрезка A_0A) в результате деформации.

Соотношение (6) является выражением гипотезы жесткой нормали.

При осесимметричной деформации имеем

$$\varepsilon_r = du/dr, \tag{7}$$

$$\varepsilon_\theta = u/r. \tag{8}$$

Внося в последние равенства соотношение (6), находим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + z\frac{d\varphi}{dr}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} + z\frac{\varphi}{r}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_{r0} = du_0/dr$, $\varepsilon_{\theta 0} = u_0/r$ — деформации срединной поверхности. Из равенств (9) и (10) вытекает, что деформации в пластинке распределяются по толщине стенки линейно.

Соотношения упругости для круглых пластинок. При двуосном напряженном состоянии (вторая гипотеза)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T, \tag{11}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha T, \tag{12}$$

или, в другой форме,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \tag{13}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T. \tag{14}$$

Температура в точках пластинки

$$T = T(r, z) \tag{15}$$

изменяется по радиусу и толщине.

Учитывая соотношения (9) и (10), запишем уравнения (13) и (14) в такой форме (при отсутствии нагрева)

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + \sigma_{ru}, \tag{16}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta 0} + \sigma_{\theta u}, \tag{17}$$

где напряжения в плоскости пластинки (напряжения растяжения) равны

$$\sigma_{r0} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{r0} + \mu\varepsilon_{\theta 0}), \tag{18}$$

$$\sigma_{\theta 0} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\theta 0} + \mu\varepsilon_{r0}), \tag{19}$$

а напряжения изгиба —

$$\sigma_{ru} = z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r}\right), \tag{20}$$

$$\sigma_{\theta u} = z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr}\right). \tag{21}$$

Отметим, что напряжения изгиба линейно изменяются по толщине стенки. Для точек срединной плоскости они обращаются в нуль. Усилия и моменты (на единицу длины), действующие в пластинке, связаны с напряжениями следующими простыми соотношениями (рис. 16.4):

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r\, dz \cdot 1, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta\, dz \cdot 1, \tag{22}$$

$$M_r = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\, dz \cdot 1, \quad M_\theta = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z\, dz \cdot 1.$$

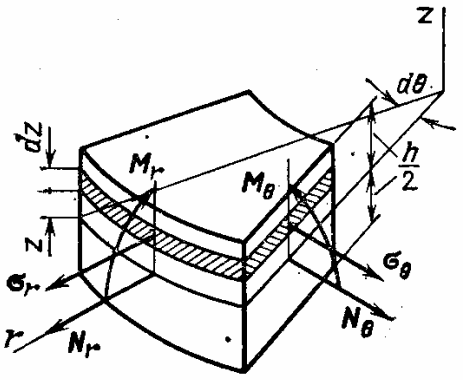


Рис. 16.4. Связь напряжений и силовых факторов

Подставляя в последние равенства зависимости (13), (14) и считая параметры упругости постоянными, получаем важные соотношения:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{du_0}{dr} + \mu\frac{u_0}{r}\right) - N_T, \tag{23}$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{u_0}{r} + \mu\frac{du_0}{dr}\right) - N_T, \tag{24}$$

$$M_r = -D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r}\right) + \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz, \tag{25}$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz, \tag{26}$$

где

$$N_T = \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha T\, dz, \quad D = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} Ez^2\, dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{27}$$

— жесткость на изгиб единицы длины сечения (множитель $(1-\mu^2)$ в знаменателе связан с плоским напряженным состоянием). Из уравнений (23)—(26) и уравнений равновесия вытекает существенный результат: напряженные состояния в плоскости пластинки определяются независимо от ее изгиба.

Усилия N_r и N_θ определяются из условия равновесия (1) и соотношений (23), (24). Они соответствуют уравнениям, полученным в разд. 48 для растяжения пластинки.

Для определения изгибных напряжений в пластинке используются уравнения равновесия (3), (5) и соотношения (25), (26).

Круглая пластинка постоянной толщины с постоянными параметрами упругости. Подставляя в уравнение равновесия (5) величины изгибающих моментов из соотношений (25) и (26), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi = -\frac{Q_r}{D} + \frac{1}{D}\frac{dM_T}{dr}, \tag{28}$$

где

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz \tag{29}$$

— температурный изгибающий момент.

Уравнение изгиба пластинки (28), составленное относительно угла поворота нормали $\varphi(r)$, оказалось точно таким же, как уравнение для радиального перемещения $u(r)$ при растяжении пластинки (см. разд. 48).

В соответствии с решением (10) разд. 48 можно записать

$$\varphi(r) = C_1 r + C_2\frac{1}{r} - \frac{1}{rD}\int_a^r r_1\int_a^{r_1} Q_r(r_2)\, dr_2\, dr_1 + \frac{1}{rD}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\, dr_1. \tag{30}$$

Внося значение $\varphi(r)$ в равенства (25) и (26), получим

$$M_r(r) = -D(1+\mu)C_1 + D\frac{1-\mu}{r^2}C_2 + \int_a^r Q_r(r_1)\, dr_1 -$$

$$-\frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1\int_a^{r_1} Q_r(r_2)\, dr_2\, dr_1 + \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\, dr_1, \tag{31}$$

$$M_\theta = -D(1+\mu)C_1 - \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 + \mu\int_a^r Q_r(r_1)\,dr_1 +$$

$$+\frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1\int_a^{r_1} Q_r(r_2)\,dr_2 dr_1 - \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\,dr_1 + (1-\mu)M_T. \quad (32)$$

После интегрирования по частям второго интеграла представим равенства (31) и (32) в таком виде:

$$M_r = -D(1+\mu)C_1 + \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 - F_1(r) + F_2(r) + F(r), \quad (33)$$

$$M_\theta = -D(1+\mu)C_1 - \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 + F_1(r) - F_2(r) - F(r) + (1-\mu)M_T, \quad (34)$$

где функции нагрузки

$$F_1(r) = \frac{1+\mu}{2}\int_a^r Q_r(r_1)\,dr_1, \quad (35)$$

$$F_2(r) = \frac{1-\mu}{2r^2}\int_a^r r_1^2 Q_r(r_1)\,dr_1 \quad (36)$$

и температурная функция

$$F(r) = \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\,dr_1. \quad (37)$$

Произвольные постоянные определяются из краевых условий

$$M_r(a) = M_{ra}, \quad M_r(b) = M_{rb}, \quad (38)$$

где M_{ra}, M_{rb} — заданные (распределенные) изгибающие моменты на внутреннем и внешнем контурах пластинки.

Из соотношений (33) — (37) имеем

$$D(1+\mu)C_1 = \frac{1}{b^2-a^2}[a^2M_{ra} - b^2M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) - F(b)],$$

$$D(1-\mu)C_2 = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}[M_{ra} - M_{rb} + F_1(b) + F_2(b) + F(b)].$$

Подставляя значения произвольных постоянных в равенства (33)

и (34), получим следующие формулы:

$$M_r = M_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - M_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) -$$
$$-(F_1(b)+F_2(b))\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + F_1(r) + F_2(r) -$$
$$-F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + F(r), \quad (39)$$

$$M_\theta = M_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - M_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) -$$
$$-(F_1(b)+F_2(b))\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) + F_1(r) - F_2(r) -$$
$$-F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - F(r) + (1-\mu)M_T. \quad (40)$$

Для сплошной пластинки (пластинки без центрального отверстия) следует считать $C_2 = 0$ из условия ограниченности решения при $r \to 0$. Полагая в равенствах (39) и (40) $a = 0$, находим

$$M_r = M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) + F_1(r) + F_2(r) - F(b) + F(r), \quad (41)$$
$$M_\theta = M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) + F_1(r) - F_2(r) - F(b) - F(r) + (1-\mu)M_T. \quad (42)$$

Функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ и $F(r)$ вычисляются при $a = 0$. В центре пластинки:

$$F_1(0) = 0,\ F_2(0) = 0,\ F(0) = \frac{1-\mu}{2}M_T.$$

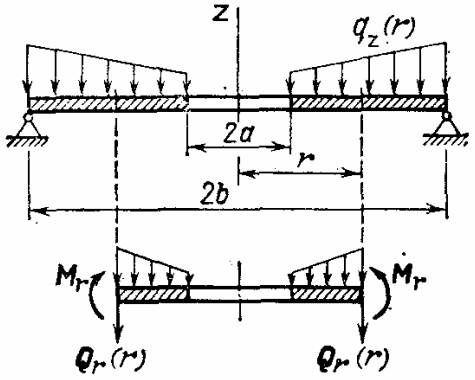


Рис. 16.5. Определение перерезывающей силы

Соотношения (39) и (40) позволяют определить изгибающие моменты в пластинке, если известно значение перерезывающего усилия $Q_r(r)$. Величина $Q_r(r)$ может быть определена из условия равновесия при наличии закрепления только на одном контуре (статически определимое закрепление пластинки).

Рассматривая равновесие части пластинки радиусом r (рис. 16.5), получаем

$$2\pi a Q_{ra} - 2\pi\int_a^r r_1 q_z(r_1)\,dr_1 - 2\pi r Q_r(r) = 0,$$

или

$$Q_r(r) = \frac{1}{r}\left(aQ_{ra} - \int_a^r r_1 q_z(r_1)\,dr_1\right). \quad (43)$$

При наличии двух опорных контуров необходимо сначала найти неизвестные силовые факторы, действующие на одном из контуров закрепления, из условия отсутствия прогибов или углов поворота. Во многих случаях удобно функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ и $F(r)$ находить путем численного интегрирования.

Напряжения изгиба в круглой пластинке. Если учесть зависимости (25) и (26), то получим следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_r = -z\frac{E}{(1-\mu^2)D}M_r + z\frac{E}{(1-\mu)(1-\mu^2)D}\int_{h/2}^{h/2}\alpha T z\,dz - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{44}$$

$$\sigma_\theta = -z\frac{E}{(1-\mu^2)D}M_\theta + z\frac{E}{(1-\mu)(1-\mu^2)D}\int_{h/2}^{h/2}\alpha T z\,dz - \frac{E\alpha T}{1-\mu}. \tag{45}$$

Так как $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, то формулы для изгибных напряжений приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -z\frac{12M_r}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}\alpha T z\,dz - \alpha T\right),\\ \sigma_\theta &= -z\frac{12M_\theta}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}\alpha T z\,dz - \alpha T\right).\end{aligned} \tag{46}$$

Вторые слагаемые связаны с неравномерным нагревом по толщине пластинки.

Определение прогибов круглой пластинки. Из соотношений (25) и (26) вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r} &= -\frac{M_r}{D} + \frac{M_T}{D},\\ \frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr} &= -\frac{M_\theta}{D} + \frac{M_T}{D},\end{aligned} \tag{47}$$

где, как и раньше,

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2}\alpha T z\,dz.$$

Из равенства (47) следует важная формула:

$$\frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{(1-\mu^2)D}(M_\theta - \mu M_r) + \frac{1}{(1+\mu)D}M_T. \tag{48}$$

Угол поворота $\varphi(r)$ и прогиб $w(r)$ связаны соотношением

$$\frac{dw(r)}{dr} = \varphi(r). \tag{49}$$

Если при $r = c$ прогиб обращается в нуль, то

$$w(r) = w(c) + \int_c^r \varphi(r_1)\, dr_1. \tag{50}$$

Прогибы часто оказывается удобным определить численным методом, так как аналитическое выражение обычно весьма громоздко.

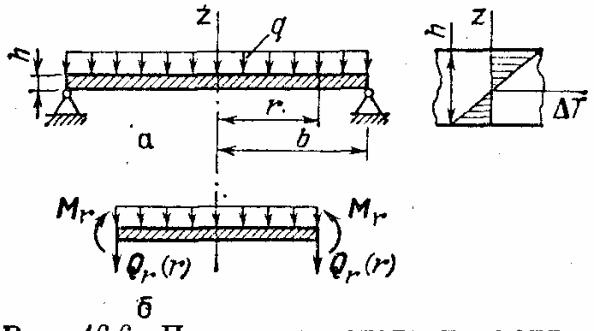


Рис. 16.6. Пример определения напряжений и прогибов пластинки

Пример определения напряжений и прогибов круглой пластинки. Рассмотрим сплошную, шарнирно опертую пластинку (рис. 16.6) под действием распределенной нагрузки q и с линейным распределением температуры по толщине $\Delta T = kz$.

Значение $Q_r(r)$ находим по формуле (43):

$$Q_r(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r_1 q_z\, dr_1 = -\frac{1}{2}qr.$$

Далее вычисляем

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha \Delta T z\, dz = \frac{E}{1-\mu}\alpha k \frac{h^3}{12},$$

$$F_1 = \frac{1+\mu}{2}\int_0^r Q_r\, dr_1 = -\frac{(1+\mu)q}{8}r^2,$$

$$F_2 = \frac{1-\mu}{2r^2}\int_0^r r_1^2 Q_r\, dr_1 = -\frac{1-\mu}{16}qr^2,$$

$$F(r) = \frac{1-\mu}{r^2}\int_0^r r_1 M_T\, dr = \frac{E\alpha k h^3}{24}.$$

По формулам (41) и (42) определяем

$$M_r = \frac{3+\mu}{16}q(b^2 - r^2),$$

$$M_\theta = \frac{3+\mu}{16}q\left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right).$$

Отметим, что выражения для M_r и M_θ не содержат температурных членов. Напряжения в пластинке находим по формулам (46):

$$\sigma_r = -z\frac{12M_r}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\alpha k\frac{h^3}{12} - \alpha k z\right) = -z\frac{12M_r}{h^3},$$

$$\sigma_\theta = -z\frac{12M_\theta}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\alpha k\frac{h^3}{12} - \alpha k z\right) = -z\frac{12M_\theta}{h^3}.$$

При линейном распределении температуры по толщине стенки и шарнирном опирании на контуре температурные напряжения отсутствуют. Напряжения растяжения возникают при $z<0$ и достигают наибольшей величины:

$$\sigma_r\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{6M_r}{h^2}, \qquad \sigma_\theta\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{6M_\theta}{h^2}.$$

Угол поворота нормали по формуле (48) равен

$$\varphi = \frac{r}{(1-\mu^2)D}\frac{(3+\mu)q}{16}\left[b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2 - \mu(b^2-r^2)\right] + \frac{r}{(1+\mu)D}M_T =$$

$$= -\frac{r}{(1+\mu)D}\frac{q}{16}[(3+\mu)b^2 - (1+\mu)r^2] + \frac{r}{(1+\mu)D}M_T.$$

Прогиб определяем по формуле (50), полагая $c=b$:

$$w(r) = -\int_r^b \varphi(r_1)\,dr_1.$$

Прогиб в центре пластинки ($r=0$)

$$w(0) = -\int_0^b \varphi(r_1)\,dr_1 = \frac{q}{(1+\mu)D}\frac{b^4}{64}(5+\mu) - \frac{M_T b^2}{2(1+\mu)D}.$$

Прогиб, вызванный температурной деформацией,

$$w_T(0) = -\frac{M_T b^2}{2(1+\mu)D} = \frac{E\alpha k h^3 b^2}{2(1-\mu^2)\dfrac{12Eh^3}{12(1-\mu^2)}} = -\frac{\alpha k b^2}{2}.$$

Линейное изменение температуры не вызывает напряжений в пластинке, но приводит к прогибу.

Изгиб прямоугольных пластинок. Деформации. Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 16.7), отнесенную к системе координат x, y, z. Элемент поверхности после деформации показан на рис. 16.8; точка A_0 до деформации лежит в срединной плоскости, после деформации она получает смещения u_0, v_0, $w_0 = w$. Точка A, отстоящая на расстояние z от точки A_0, после деформации переходит в точку A^*. Угол поворота «жесткости нормали» (гипотеза Кирхгофа) имеет составляющие φ_x и φ_y в координатных плоскостях.

Перемещения произвольной точки пластинки (точка A) равны

$$u = u_0 + z\varphi_x, \quad v = v_0 + z\varphi_y, \quad w = w_0, \tag{51}$$

где u_0, v_0, w_0 — смещения точки A_0, лежащей в срединной плоскости.

Деформацией в направлении нормали пренебрегаем. В соответствии с формулами для деформаций имеем

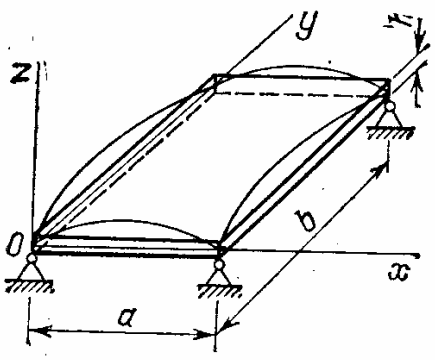


Рис. 16.7. Изгиб прямоугольной пластинки

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \tag{52}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy0} + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right),$$

где

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

— деформации в срединной плоскости пластинки.

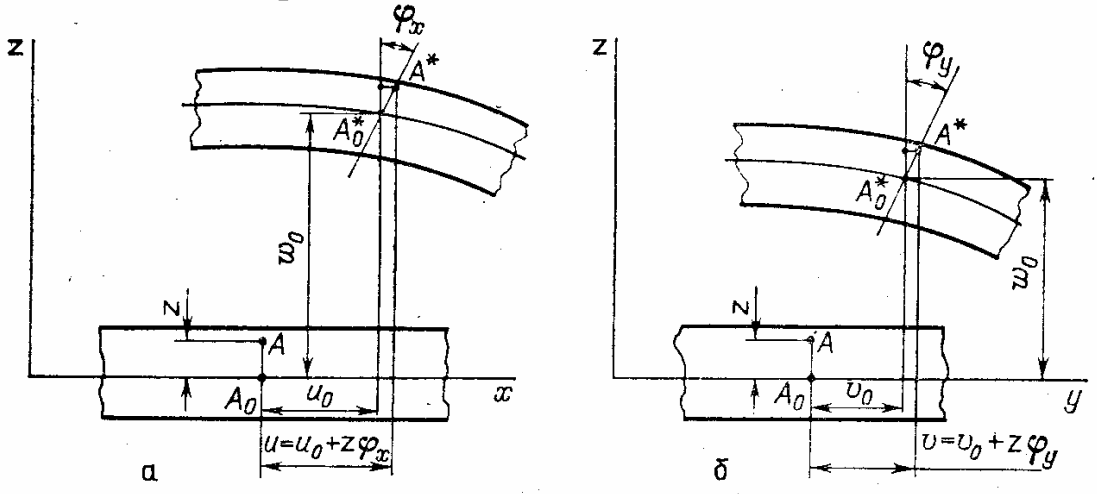


Рис. 16.8. Деформации изгиба прямоугольной пластинки

Учитывая, что

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{53}$$

получим следующие зависимости:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{54}$$

Уравнение упругости. Предполагается, что напряженное состояние является плоским. Пренебрегая для простоты температурной деформацией, будем иметь

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \tag{55}$$

Внося в (55) равенства (54), получим

$$\sigma_x = \sigma_{x0} - z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$
$$\sigma_y = \sigma_{y0} - z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (56)$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy0} - z(1-\mu)\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

где σ_{x0}, σ_{y0}, τ_{xy0} — нормальные и касательное напряжения в срединной плоскости пластинки. Они определяются по равенствам (55) для значений ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}.

Силовые факторы в сечениях прямоугольной пластинки. В слое dz (рис. 16.9) действуют нормальные (σ_x, σ_y) и касательное (τ_{xy})

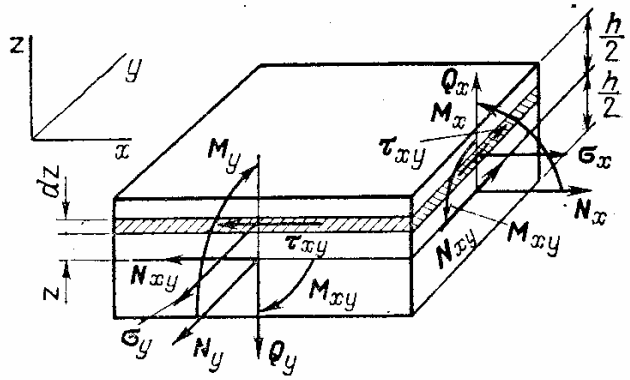


Рис. 16.9. Силовые факторы в сечении пластинок

напряжения, которые создают усилия и моменты (на единицу длины):

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\,dz, \qquad N_y = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y\,dz, \qquad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}\,dz,$$
$$M_x = -\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z\,dz, \quad M_y = -\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y z\,dz, \quad M_{xy} = -\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} z\,dz. \qquad (57)$$

Подставляя значения σ_x, σ_y и τ_{xy} из формул (56), найдем для усилий в срединной плоскости

$$N_x = \sigma_{x0}h = N_{x0}, \quad N_y = \sigma_{y0}h = N_{y0}, \quad N_{xy} = \tau_{xy0}h = N_{xy0}.$$

Для изгибающих и крутящих моментов получим

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad (58)$$
$$M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (59)$$
$$M_{xy} = (1-\mu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \qquad (60)$$

где

$$D = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2\,dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{61}$$

Величина D называется *жесткостью* (единицы длины) *пластинки.*

Замечание. Отметим очевидное свойство парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

и вытекающие из него условия для касательных усилий и крутящих моментов:

$$N_{xy} = N_{yx}, \quad M_{xy} = M_{yx}.$$

Условия равновесия элемента прямоугольной пластинки. На рис. 16.9 показаны усилия и моменты, действующие на грани элемента пластинки.

Рассматривая равновесие сил по осям x и y, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \tag{63}$$

Условие равновесия сил по оси z дает

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q. \tag{64}$$

Условие равновесия для моментов приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \tag{66}$$

Пять условий равновесия (62)—(66) характеризуют равновесие элемента пластинки.

Замечание. Шестое уравнение равновесия относительно оси z приводит к уже известному результату

$$N_{xy} = N_{yx}.$$

Разрешающие уравнения. Ранее были рассмотрены три группы уравнений: геометрические уравнения (51)—(54), описывающие геометрию деформации пластинки; физические уравнения (55), (56), устанавливающие связь деформаций и напряжений; статические уравнения равновесия (62)—(66).

Первая группа параметров: u_0, v_0, ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}, N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} — характеризует усилия и деформации в плоскости пластинки. Уравнения равновесия будут удовлетворены, если положить

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Используя уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y0}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy0}}{\partial x\, \partial y},$$

приходим к бигармоническому уравнению для функции усилий F. Легко заметить, что для определения усилий в плоскости пластинки получается плоская задача, разобранная в гл. 2.

Усилия, напряжения и деформации в плоскости пластинки определяются независимо от деформации изгиба.

Вторая группа параметров: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}$, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y — характеризует изгиб пластинки.

Разрешающее уравнение (уравнение, решение которого позволяет определить неизвестные параметры задачи) получается следующим образом. Дифференцируя уравнение (65) по x, уравнение (66) по y, затем складывая их, получим с учетом соотношения (64)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \tag{67}$$

С помощью зависимостей (58)—(60) находим для пластинок постоянной толщины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}. \tag{68}$$

Это и есть разрешающее уравнение изгиба пластинки постоянной толщины. В более краткой форме оно записывается так:

$$\nabla^4 w = -\frac{q}{D}, \tag{69}$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

— бигармонический оператор.

Определение прогибов и напряжений в пластинке вариационным методом. Будем использовать вариационный метод Галёркина, в соответствии с которым примем следующее выражение прогиба:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x, y),$$

где $\varphi_i(x, y)$ — заранее выбранные функции, удовлетворяющие краевым условиям задачи; c_i — коэффициенты, подлежащие определению.

Коэффициенты c_i найдем из системы уравнений

$$\int_0^a \int_0^b \left(\nabla^4 w + \frac{q}{D} \right) \varphi_i dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Система уравнений (70) может быть представлена в матричной форме:

$$[A_{ij}]\{c_i\} = \{f_i\}, \quad A_{ij} = \int_0^a \int_0^b (\varphi_i \nabla^4 \varphi_j)\, dx\, dy, \quad f_i = -\frac{1}{D} \int_0^a \int_0^b q\varphi_i\, dx\, dy. \quad (70)$$

Точность решения возрастает при увеличении числа членов ряда.

Пример. Определить прогиб пластинки, шарнирно опертой по четырем сторонам (рис. 16.10), при действии равномерно распределенного давления.

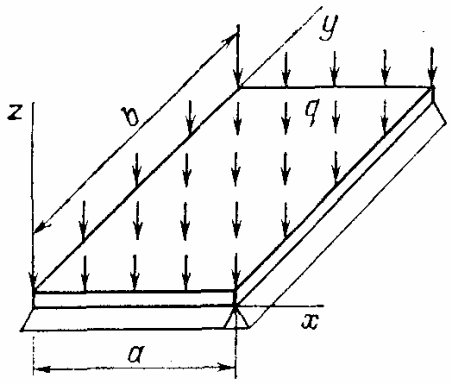


Рис. 16.10. Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по четырем сторонам, под действием постоянного давления

Краевые условия состоят в отсутствии прогибов и изгибающих моментов по краям пластинки. Этим условиям удовлетворяет функция

$$w = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При одном параметре из уравнений (70) находим

$$c_1 = \frac{\int_0^a \int_0^b q\varphi_1\, dx\, dy}{D \int_0^a \int_0^b \varphi_1 \nabla^4 \varphi_1\, dx\, dy}.$$

Вычисления дают

$$\int_0^a \int_0^b \varphi_1\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^b \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\, dx\, dy = \int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\, dx \int_0^b \sin\frac{\pi y}{b}\, dy = \frac{4ab}{\pi^2}.$$

$$\int_0^a \int_0^b \varphi_1 \nabla^4 \varphi_1\, dx\, dy = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}\, dx\, dy = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} ab.$$

Окончательно получаем

$$w = -\frac{16 q a^4 b^4}{\pi^6 (a^2 + b^2)^2 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

что дает погрешность порядка 10%. Знак минус означает, что прогиб направлен противоположно оси z.

Замечание. В круглых и прямоугольных пластинках применялось различное правило знаков для положительного значения прогиба. Разумеется, окончательные результаты не зависят от правила знаков, но следует выработать умение делать вывод, сопоставляя его с расчетной схемой и принятыми в ней положительными направлениями.

52. Цилиндрические оболочки

Гипотеза жесткой нормали, деформации. При осесимметричной деформации цилиндрической оболочки (рис. 16.11) точка срединной поверхности A_0 (рис. 16.12) получает смещения по оси оболочки u_0 и вдоль радиуса w_0. Точка A, отстоящая от срединной поверхности на расстояние z, будет иметь перемещения u_0, w,

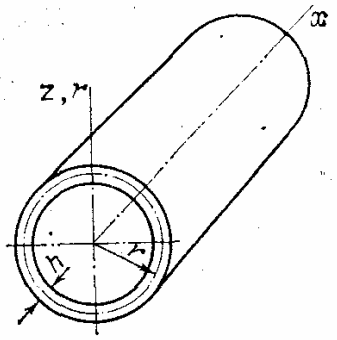


Рис. 16.11. Цилиндрическая оболочка

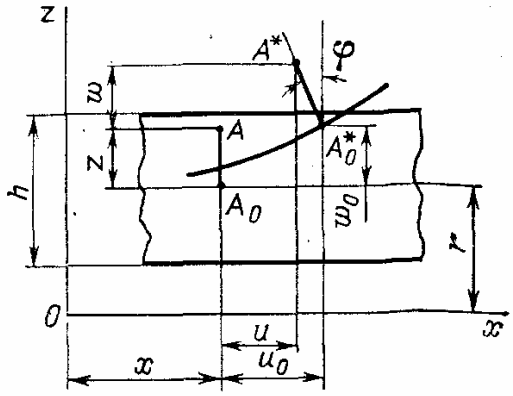


Рис. 16.12. Схема деформации оболочки

нормаль к срединной поверхности повернется на угол φ. По гипотезе жесткой нормали получим

$$u = u_0 - z\varphi. \tag{71}$$

Если пренебречь деформацией материала тонкостенной оболочки в радиальном направлении, то

$$w = w_0. \tag{72}$$

Деформации в слое z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} - z\frac{d\varphi}{dx}, \tag{73}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{r_z} = \frac{w_0}{r+z}, \tag{74}$$

где $\varepsilon_{x0} = \partial u_0/\partial x$ — деформация в точках срединной поверхности. По гипотезе жесткой нормали имеем

$$\varphi = \frac{dw_0}{dx}. \tag{75}$$

Полагая для тонкостенной оболочки

$$r + z \approx r,$$

получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{76}$$

$$\varepsilon_\theta = w/r. \tag{77}$$

Напряжения и силовые факторы. В слое на расстоянии z от срединной поверхности действуют напряжения σ_x и σ_θ (рис. 16.13), создающие усилия и моменты (на единицу длины сечения):

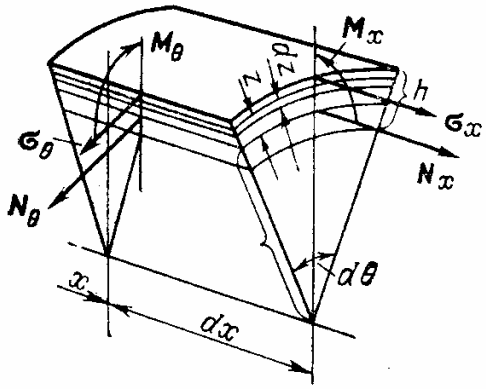


Рис. 16.13. Усилие и моменты на единицу длины сечений оболочки

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\, dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta\, dz,$$
$$M_x = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz, \qquad (78)$$
$$M_\theta = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z\, dz.$$

Уравнения упругости. Напряжения и деформации связаны следующими соотношениями упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_\theta] + \alpha T, \qquad (79)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha T, \qquad (80)$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения, T — температура.

Из уравнений (79) и (80) следует, что

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\theta) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \qquad (81)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T. \qquad (82)$$

В дальнейшем для упрощения будем пренебрегать температурной деформацией, полагая $\alpha T \approx 0$.

Учитывая соотношения (76) и (77), находим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{x0} - z\frac{d^2w}{dx^2} + \mu\frac{w}{r}\right), \qquad (83)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\varepsilon_{x0} - \mu z\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{w}{r}\right). \qquad (84)$$

Подставляя величины σ_x и σ_θ из соотношений (81) и (82) в (78), получим

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{x0} + \mu\frac{w}{r}\right), \qquad (85)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{r} + \mu\varepsilon_{x0}\right), \qquad (86)$$

$$M_x = D\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{87}$$

$$M_\theta = \mu D\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{88}$$

где

$$D = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2\,dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{89}$$

Величина D называется *цилиндрической жесткостью*. По физическому смыслу она представляет жесткость на изгиб полоски, ширина которой единица, а высота h (множитель $1/(1-\mu^2)$ связан с плоской деформацией).

Равенства (85) и (86) позволяют выразить деформации срединной поверхности через усилия

$$\varepsilon_{x0} = \frac{du_0}{dx} = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_\theta), \tag{90}$$

$$\varepsilon_{\theta 0} = \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}(N_\theta - \mu N_x). \tag{91}$$

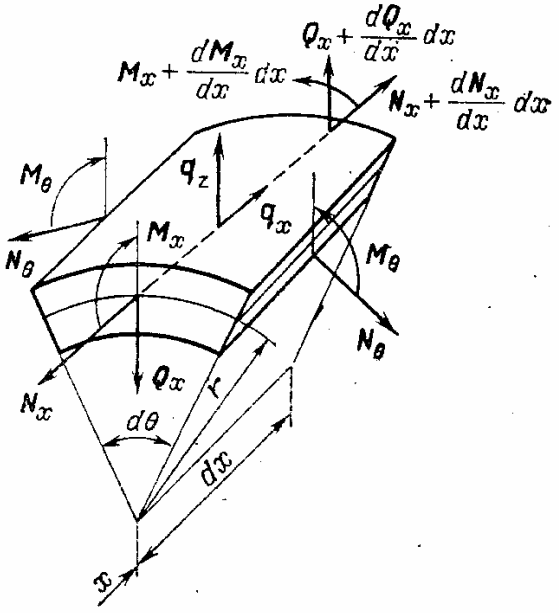


Рис. 16.14. Условие равновесия элемента оболочки

Уравнения равновесия. Рассмотрим равновесие элемента оболочки (рис. 16.14). Будем считать, что к срединной поверхности приложены внешние распределенные нагрузки (на единицу площади) q_x и q_z. Проектируя силы на направление осей x и z, находим

$$\frac{dN_x}{dx} + q_x = 0, \tag{92}$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{r}N_\theta + q_z = 0. \tag{93}$$

Условие равновесия для моментов приводит к соотношению, которое встречается при изгибе стержней:

$$\frac{dM_x}{dx} + Q = 0. \tag{94}$$

Дифференцируя уравнение (94) по x и принимая во внимание зависимость (93), находим

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{r}N_\theta = q_z. \tag{95}$$

Замечание. Следует помнить, что усилия и моменты в уравнениях равновесия относятся к единице длины соответствующих сечений.

Разрешающее дифференциальное уравнение. Оно получается из уравнения равновесия (95), если выразить силовые факторы через прогиб срединной поверхности $w(x)$. Замечая, что из соотношения (91) следует

$$N_\theta = \frac{Eh}{r} w + \mu N_x, \tag{96}$$

и используя зависимость (87), находим из уравнения (95) разрешающее уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \frac{Eh}{r^2} w = q_z - \frac{\mu}{r} N_x. \tag{97}$$

Для оболочки постоянной толщины с постоянными параметрами упругости разрешающее уравнение будет таким:

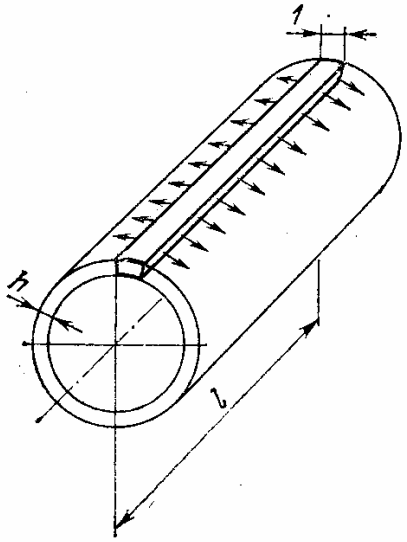


Рис. 16.15. Изгиб балки-полоски единичной ширины, выделенной из цилиндрической оболочки

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{1}{D}\left(q_z - \frac{\mu}{r} N_x\right), \tag{98}$$

где

$$4\beta^4 = \frac{Eh}{r^2 D} = \frac{12(1-\mu)^2}{r^2h^2}, \tag{99}$$

или

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{rh}}.$$

При обычном значении коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$ имеем

$$\beta = \frac{1{,}285}{\sqrt{rh}}. \tag{100}$$

Уравнение осесимметричной деформации цилиндрической оболочки (102) совпадает с уравнением изгиба балки на упругом основании (разд. 49). Такое совпадение имеет физическую основу. Рассматривая изгиб полоски единичной толщины, выделенной из оболочки (рис. 16.15), замечаем, что окружные усилия N_θ дают составляющую в плоскости изгиба (уравнение (95)). Эта составляющая оказывается связанной с величиной прогиба (соотношение (96)), и ее действие эквивалентно упругому основанию.

Напряжения в сечениях оболочки. Если известно значение прогиба оболочки $w(x)$, то силовые факторы определяются равенствами (87), (88) и (96). Осевое усилие (на единицу длины) равно

$$N_x = \frac{N}{2\pi r}, \tag{101}$$

где N — осевое усилие, действующее на оболочку. Перерезывающее усилие Q (на единицу длины) находится из соотношений (94) и (87):

$$Q = -D\frac{d^3w}{dx^3}. \tag{102}$$

В поперечном сечении оболочки нормальные напряжения распределяются по толщине стенки линейно (рис. 16.16):

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{xи} = \frac{N_x}{h} - \frac{12M_x}{h^3}z. \tag{103}$$

В продольном (меридиональном) сечении

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta 0} + \sigma_{\theta и} = \frac{N_\theta}{h} - \frac{12M_\theta}{h^3}z. \tag{104}$$

Отметим (см. соотношения (87) и (88)), что

$$M_\theta = \mu M_x. \tag{105}$$

Касательные напряжения существуют только в поперечном сечении

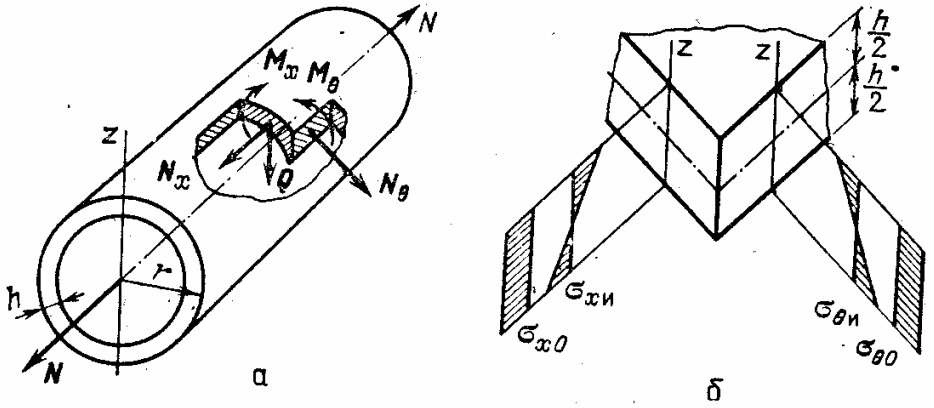


Рис. 16.16. Силовые факторы и напряжения в сечениях оболочки

и распределяются так же, как в стержне прямоугольного сечения:

$$\tau = \frac{Q}{h}\left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{h^2}\right). \tag{106}$$

Длинные оболочки. Цилиндрическая оболочка называется длинной, если

$$\beta l = \frac{1{,}285l}{\sqrt{rh}} > 3, \tag{107}$$

где l — длина оболочки.

Решение уравнения (98) для длинной оболочки следует принять в виде

$$w(x) = C_1 e^{-\beta x}\cos\beta x + C_2 e^{-\beta x}\sin\beta x + w_*(x), \tag{108}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из условий закрепления оболочки, $w_*(x)$ — частное решение уравнения (98).

Дифференцируя равенство (108), получаем следующие зависимости (штрих означает производную по x):

$$w'(x) = -C_1\beta e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) + C_2\beta e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) + w'_*(x), \quad (109)$$

$$w''(x) = 2C_1\beta^2 e^{-\beta x}\sin\beta x - 2C_2\beta^2 e^{-\beta z}\cos\beta x + w''_*(x), \quad (110)$$

$$w'''(x) = 2C_1\beta^3 e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) + 2C_2\beta^3 e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) + w'''_*(x). \quad (111)$$

Из структуры решения (108) видно, что первая часть, зависящая от условий закрепления при $x = 0$, имеет множитель $e^{-\beta x}$ и по мере возрастания x затухает (при $\beta x > 3$ ею можно пренебречь). Таким образом, в зоне закрепления оболочки имеется *краевой эффект*. Решение (108) описывает прогибы оболочки возле края $x = 0$. Для определения прогибов возле края оболочки $x = l$ используется то же решение, но для координаты

$$x_1 = l - x. \quad (112)$$

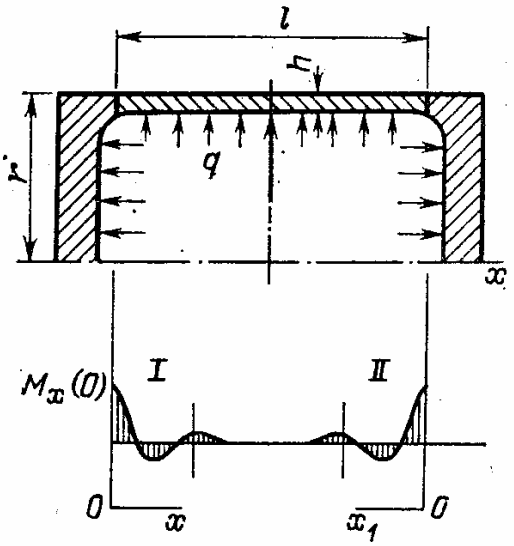


Рис. 16.17. Длинная оболочка под действием внутреннего давления; *I*, *II* — зоны краевого эффекта

Рассмотрим в качестве примера цилиндрическую оболочку под действием внутреннего давления q (рис. 16.17). Края оболочки приварены к жестким диафрагмам. Считая радиус внутренней поверхности оболочки r приближенно равным радиусу срединной поверхности, получим

$$q_z = q; \quad (113)$$

осевое усилие $N = \pi r^2 q$ и

$$N_x = \frac{N}{2\pi r} = \frac{qr}{2}. \quad (114)$$

Частное решение уравнения (98) будет постоянной величиной:

$$4\beta^4 w_* = \frac{1}{D}\left(q - \frac{\mu}{2}q\right),$$

или

$$w_* = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q. \quad (115)$$

Легко понять физический смысл частного решения. В оболочке, свободной от закрепления, под действием внутреннего давления q создаются окружные напряжения

$$\sigma_{\theta 0} = q\frac{r}{h}.$$

При действии осевого усилия напряжения в поперечном сечении

$$\sigma_{x0} = \frac{N_x}{h} = \frac{1}{2}q\frac{r}{h}.$$

Деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_{\theta 0} = \frac{w}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_x) = \frac{r\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q.$$

Следовательно, частное решение (115) представляет прогиб (перемещение) срединной поверхности оболочки, свободной от закрепления, под действием внешней нагрузки. Произвольные постоянные C_1 и C_2 найдем из условий при $x = 0$:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0. \tag{116}$$

Из уравнения (108) и (109) получаем

$$C_1 = -w^*(0) = -\frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh} q, \quad C_2 = C_1.$$

Для прогиба оболочки приходим к следующему равенству:

$$w(x) = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh} q\left[1 - e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x)\right]. \tag{117}$$

Изгибающий момент M_x (на единицу длины) найдем из соотношений (110):

$$M_x = Dw''(x) = = \frac{q\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{2\beta^2} e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x). \tag{118}$$

Осевое усилие постоянно по длине:

$$N_x = \frac{1}{2} qr.$$

Окружное усилие определяется по формуле (96):

$$N_\theta(x) = qr\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x)\right]. \tag{119}$$

При $\beta x > 3$ $(e^{-\beta x} < 1/20)$ можно считать, что

$$w(x) = w_*(x) = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh} q, \tag{120}$$

$$N_\theta(x) = qr,$$

т. е. влияние закрепления оболочки не сказывается. Расчетные соотношения справедливы и для края $x = l$, если расстояние x отсчитывать от этого края (замена x на x_1). Модель прочности оболочки содержит раздельную оценку общих и местных напряжений (напряжений в зоне краевого эффекта).

Условие прочности по общим напряжениям имеет вид

$$\frac{\sigma_b}{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{\theta 0}^2 - \sigma_{x0}\sigma_{\theta 0}}} \geqslant [n_0], \tag{121}$$

где $\sigma_{\theta 0} = N_\theta/h$, $\sigma_{x0} = N_x/h$, σ_b — предел прочности материала, $[n_0]$ — допускаемое значение запаса по общим напряжениям. Условие прочности для местных напряжений (в сечениях $x = 0$ и $x = l$)

$$\frac{\sigma_b}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x\sigma_\theta}} \geqslant [n_м], \tag{122}$$

где $[n_м]$ — допускаемое значение запаса по местным напряжениям; σ_x, σ_θ — наибольшие напряжения в оболочке при $z = \pm h/2$ (см. уравнения (103) и

(104)); обычно принимается

$$[n_м] \approx \frac{1}{1{,}5}[n_0].$$

Меньшее значение допускается потому, что за счет появления пластических деформаций изгибные напряжения уменьшаются.

Замечания. 1. Для оболочек из хрупких материалов следует принимать

$$[n_м] \approx [n_0].$$

2. Модель прочности учитывает однократное статическое нагружение. При повторных (циклических) нагружениях роль местных напряжений возрастает.

Краевой эффект и безмоментное напряженное состояние в длинных цилиндрических оболочках. Для длинной оболочки прогиб можно представить в виде

$$w = w_* + w_1 + w_2; \tag{123}$$

здесь w_* — прогиб оболочки при безмоментном напряженном состоянии,

$$w_1 = C_1 e^{-\beta x}\cos\beta x + C_2 e^{-\beta x}\sin\beta x, \tag{124}$$

$$w_2 = C_1^* e^{-\beta x}\cos\beta(l-x) + C_2^* e^{-\beta(1-x)}\sin\beta(l-x), \tag{125}$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условия закрепления при $x=0$; C_1^* и C_2^* — из краевых условий при $x=l$. Предполагается, что влияние условий закрепления при $x=0$ и $x=l$ не сказывается друг на друге. Решения w_1 и w_2 выражают *краевой эффект*. Для примера на рис. 16.17 имеем

$$w_* = \frac{r^2\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q.$$

Возможность представления (123) вытекает из того, что дифференциальное уравнение (97) содержит малый параметр при старшей производной (изгибная жесткость D для тонких оболочек является малой величиной). Если q_z и N_x — достаточно плавные функции и их производными можно пренебречь по сравнению с малыми функциями, то частное решение можно принять в виде

$$w_*(x) = \frac{1}{4\beta^4 D}\left(q_z - \frac{\mu}{r}N_x\right) = \frac{r^2}{Eh}\left(q_z - \frac{\mu}{r}N_x\right). \tag{126}$$

Прогиб $w_*(x)$ выражает безмоментное напряженное состояние, при котором $M_x \approx 0$, $M_\theta \approx 0$, $Q \approx 0$. Решение (123) представляет приближенное решение уравнения цилиндрической оболочки. Это решение называется асимптотическим, так как его точность возрастает при $h \to 0$. Приближенное решение позволяет проводить раздельное определение произвольных постоянных для краевых условий и дает общую приближенную формулу для частного решения (формула (126)).

Замечания. 1. Зоны возмущения возникают не только в зонах закрепления оболочки, но и в зонах, где приложены сосредоточенные воздействия.

2. Уравнение с малым параметром при старшей производной и краевой эффект для таких уравнений встречаются и в других задачах математической физики (например, в задачах теплопроводности).

Короткие оболочки. Для коротких оболочек ($\beta l < 3$) решение уравнения (98) удобно представить с помощью нормальных фундаментальных функций (функций Крылова). Решение уравнения (98) запишем в виде

$$w(x) = w(0)\,Y_1(x) + w'(0)\,Y_2(x) + w''(0)\,Y_3(x) + w'''(0)\,Y_4(x) + Y_*(x), \tag{127}$$

где функции Крылова равны

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x, \\ Y_2(x) &= \frac{1}{2\beta}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x + \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x), \\ Y_3(x) &= \frac{1}{2\beta^2}\operatorname{sh}\beta x \sin\beta x, \\ Y_4(x) &= \frac{1}{4\beta^3}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x - \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x); \end{aligned} \tag{128}$$

функция

$$Y_*(x) = \int_0^x Y_4(x - x_1)\frac{1}{D}\left(q_z(x_1) - \frac{\mu}{r}N_x(x_1)\right)dx_1 \tag{129}$$

выражает частное решение уравнения (98). Для коротких оболочек приближенное решение (123) непригодно, так как зоны краевого эффекта занимают всю длину оболочки. Модели прочности коротких оболочек основываются на решении (127).

При оценке прочности учитывается различная опасность равномерно распределенных напряжений по толщине стенки (напряжений от усилий) и изгибных напряжений, которые уменьшаются при появлении пластических деформаций.

53. Приближенные методы расчета прочности и устойчивости оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Вводные замечания. Срединная поверхность оболочек вращения может быть образована путем вращения отрезка кривой вокруг оси (рис. 16.18). Оболочки вращения (цилиндрические, конические, сферические, тороидальные и др.) имеют широкие технические применения (корпуса двигателей, летательных аппаратов, сосуды и т. п.). Элемент оболочки вращения показан на рис. 16.19 ($\mathbf{n}$ — вектор, нормальный к срединной поверхности). Плоскость, проходящая через точку A и ось вращения, называется меридиональной плоскостью; AA_1 — элемент кривой меридионального сечения; R_1 — радиус кривизны в точ-

ке A; O_1 — центр кривизны дуги меридионального сечения. Через нормаль к поверхности можно провести множество плоских сечений (среди них — два главных). Одним из главных сечений является меридиональное.

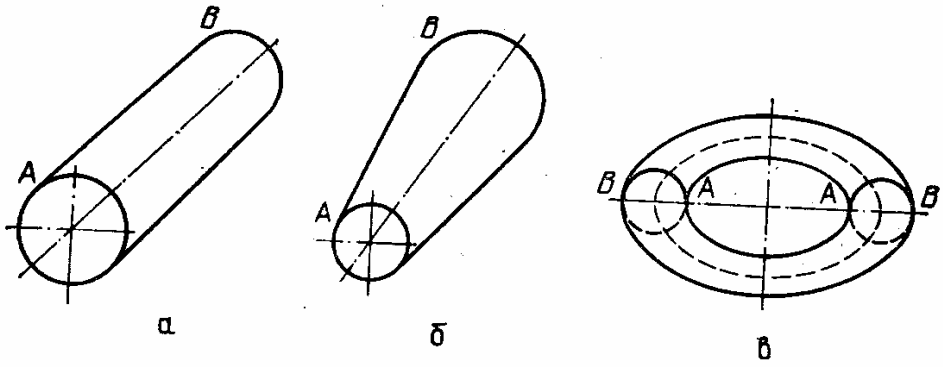


Рис. 16.18. Оболочки вращения и отрезки кривых, вращением которых они образуются

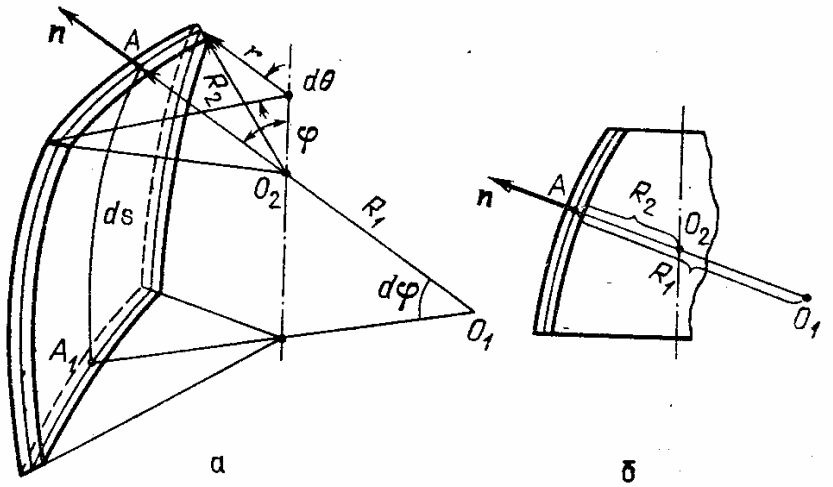


Рис. 16.19. Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки вращения

Второе главное сечение проходит через нормаль **n** и перпендикулярно меридиональной плоскости. Радиус кривизны плоской кривой в указанном сечении равен R_2, центр кривизны лежит на оси вращения в точке O_2.

Безмоментное напряженное состояние и условие равновесия элемента оболочки. В общем случае осесимметричного нагружения в оболочке действуют нормальные усилия N_1 и N_2, перерезывающее усилие Q, изгибающие моменты M_1 и M_2 (рис. 16.20). На некотором удалении от края и других зон возмущения в оболочке возникает безмоментное напряженное состояние, при котором изгибающими моментами и перерезывающей силой можно пренебречь. Ранее это было показано для цилиндрической оболочки, но такое явление происходит и в других оболочках вращения.

Рассмотрим условие равновесия элемента оболочки при безмоментном напряженном состоянии (рис. 16.21).

По граням элемента действуют (на единицу длины) усилия N_1 и N_2; на срединной поверхности распределены нормальные усилия (на единицу площади) q_n. В большинстве практических задач q_n — давление среды в мегапаскалях. Составим проекцию сил,

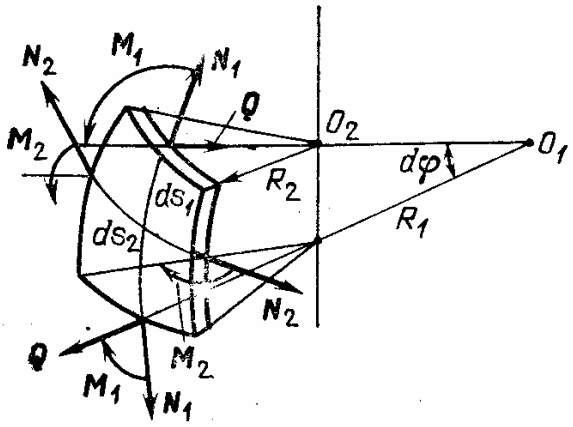


Рис. 16.20. Силовые факторы в сечениях оболочки вращения

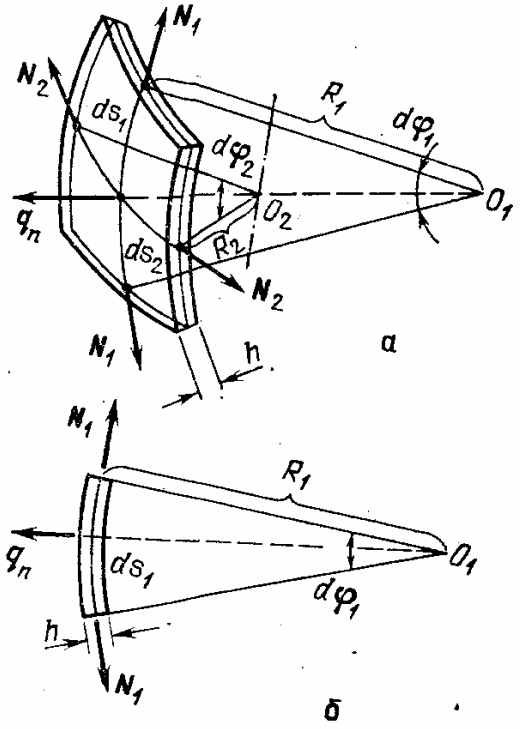


Рис. 16.21. Условие равновесия элемента оболочки при безмоментном напряженном состоянии: *а* — элемент оболочки; *б* — сечение в меридиональной плоскости

приложенных к элементу оболочки, на направление нормали n:

$$q_n\, ds_1\, ds_2 = 2N_1\, ds_2 \sin d\varphi_1 + 2N_2\, ds_1 \sin d\varphi_2. \qquad (130)$$

Так как

$$\sin d\varphi_1 \approx d\varphi_1, \quad \sin d\varphi_2 \approx d\varphi_2 \qquad (131)$$

и

$$d\varphi_1 = ds_1/R_1, \qquad d\varphi_2 = ds_2/R_2, \qquad (132)$$

то из условия (130) находим важное соотношение

$$N_1/R_1 + N_2/R_2 = q_n. \qquad (133)$$

Считая нормальные напряжения σ_1 и σ_2 равномерно распределенными по толщине оболочки h, получим $\sigma_1 h = N_1$, $\sigma_2 h = N_2$. Теперь из соотношения (132) следует, что

$$\sigma_1/R_1 + \sigma_2/R_2 = q_n/h. \qquad (134)$$

Уравнение (134) часто называют уравнением Лапласа.

Замечания. 1. Уравнение (134) и рис. 16.21 показывают, что при безмоментном напряженном состоянии оболочка противостоит внешнему давлению за счет кривизны элемента.

2. Напряжение σ_1 называется *меридиональным*, напряжение σ_2 — *кольцевым* или *окружным*. При осесимметричной деформации оболочек вращения напряжения σ_1 и σ_2 являются главными. Однако не следует считать, как это часто делается при анализе напряженного состояния, что σ_1 является наибольшим напряжением. Здесь индексы 1 и 2 присваиваются направлениям действия напряжений.

Общее условие равновесия произвольной части оболочки. Для определения действующих в оболочке усилий и напряжений необходимо рассмотреть равновесие части оболочки (рис. 16.22). Допустим, рассматривается часть оболочки, заполненной жидкостью, выделенная сечением A_1A_2. В соответствии с методом сечения в каждой точке поверхности должны быть приложены действующие усилия. При сечении «по металлу» прикладываются напряжения σ_1, при сечении «по жидкости» — давление p. Условие равновесия всех сил в направлении оси оболочки имеет вид

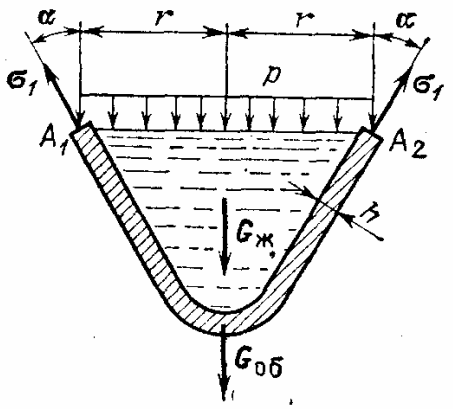


Рис. 16.22. Условие равновесия части оболочки

$$\sigma_1 h \cos\alpha \cdot 2\pi r = p\pi r^2 + G_{ж} + G_{об}, \quad (135)$$

где $G_{ж}$ — вес жидкости, $G_{об}$ — вес оболочки. Из уравнения (135) находим

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h\cos\alpha} + \frac{G_{ж} + G_{об}}{2\pi r h \cos\alpha}. \quad (136)$$

При составлении условия равновесия радиусы внутренней и средней поверхностей оболочки считались приблизительно одинаковыми.

Примеры. 1. *Цилиндрический сосуд под действием газообразной среды с давлением* p. Радиус цилиндрической оболочки равен r, толщина стенки h

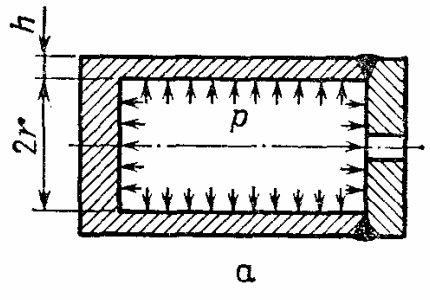


Рис. 16.23. Цилиндрический сосуд

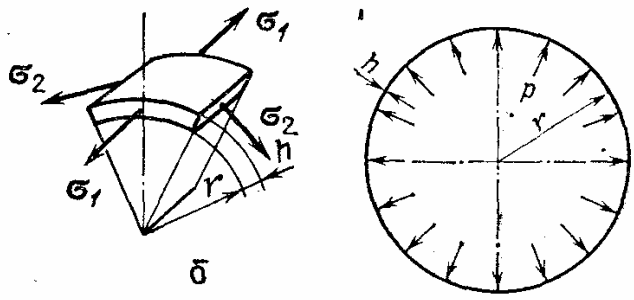


Рис. 16.24. Сферический сосуд

(рис. 16.23). В рассматриваемом случае главные радиусы кривизны равны $R_1 = \infty$, $R_2 = r$. Из уравнения (134) получаем кольцевое напряжение

$$\sigma_2 = p\frac{r}{h}. \quad (137)$$

Меридиональное напряжение находим из уравнения (136), пренебрегая весом среды и весом оболочки ($\alpha = 0$):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} p \frac{r}{h}. \tag{138}$$

В цилиндрической оболочке при действии внутреннего давления окружные напряжения в два раза больше, чем продольные (меридиональные). Этим, кстати, объясняется, почему в трубах при избыточном давлении трещины идут вдоль образующих.

2. *Сферический сосуд под действием газообразной среды с давлением p.* Радиус сферической оболочки равен r, толщина стенки h (рис. 16.24),

$$R_1 = R_2 = r, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

По формуле (134) получаем

$$\sigma = \frac{1}{2} p \frac{r}{h}. \tag{139}$$

Сопоставляя равенства (137) и (139), находим, что наибольшие напряжения в стенке сферического сосуда в два раза меньше, чем в сосуде цилиндрическом. Этим объясняется, что часто сосуды для хранения газообразной среды под давлением делают сферическими.

3. *Сосуд с тяжелой жидкостью* (рис. 16.25). Сосуд имеет цилиндрический и конический участки, заполнен тяжелой жидкостью с удельным весом γ.

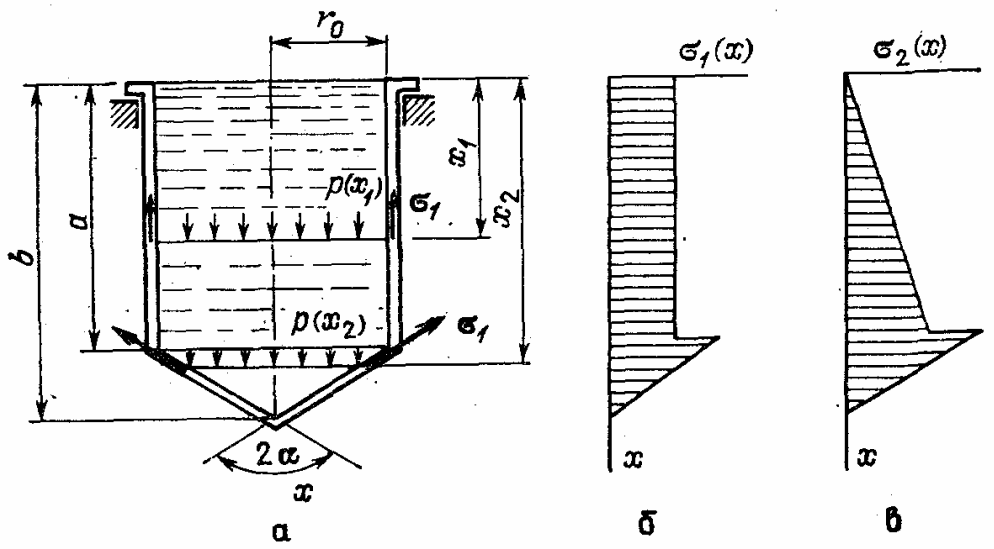


Рис. 16.25. Определение напряжений в стенках сосуда с тяжелой жидкостью

Рассмотрим сначала напряжения в цилиндрической части сосуда. Кольцевые напряжения по формуле (134) равны

$$\sigma_2(x_1) = p(x_1) \frac{r_0}{h} = \gamma x_1 \frac{r_0}{h}, \tag{140}$$

где $p(x_1) = \gamma x_1$ — давление жидкости на расстоянии x_1 от свободной поверхности. Продольное напряжение определим из уравнения (136). Пренебрегая весом оболочки, получим

$$\sigma_1(x_1) = \frac{1}{2} \gamma x_1 \frac{r_0}{h} + \frac{1}{2\pi r_0 h}\left[\pi r_0^2 (a - x_1)\gamma + \frac{1}{3}\pi r_0^2 (b - a)\gamma\right],$$

или

$$\sigma_1(x_1) = \frac{1}{2}\gamma a\frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}\gamma(b-a)\frac{r_0}{h}. \tag{141}$$

Продольные (меридиональные) напряжения в цилиндрической части сосуда постоянны по длине. Определим напряжения в конической части сосуда ($x_2 > a$). Из условия равновесия (136) имеем

$$\sigma_1(x_2) = \frac{1}{2}\gamma x_2\frac{r(x_2)}{h\cos\alpha} + \frac{1}{2\pi r(x_2)h\cos\alpha}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2(x_2)(b-x_2)\gamma.$$

Так как

$$r(x_2) = (b-x_2)\operatorname{tg}\alpha,$$

то

$$\sigma_1(x_2) = \frac{1}{2}\gamma x_2\frac{(b-x_2)\sin\alpha}{h\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{6h\cos^2\alpha}(b-x_2)^2\gamma. \tag{142}$$

Для конической части сосуда главные радиусы кривизны равны

$$R_1(x_2) = \infty, \quad R_2(x_2) = r(x_2)\frac{1}{\cos\alpha} = (b-x_2)\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Из уравнения (134) находим

$$\sigma_2(x_2) = p(x_2)\frac{R_2(x_2)}{h} = \frac{\gamma x_2}{h}(b-x_2)\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \tag{143}$$

В сечении $x_1 = 0$ будем иметь

$$\sigma_1(0) = \frac{1}{2}a\gamma\frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}(b-a)\gamma\frac{r_0}{h}, \quad \sigma_2(0) = 0.$$

В сечении $x_2 = a$

$$\sigma_1(a) = \frac{1}{2}a\gamma\frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}(b-a)\gamma\frac{r_0}{h}, \quad \sigma_2(a) = a\gamma\frac{r_0}{h}.$$

Примерное протекание напряжений $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ показано на рис. 16.25, *б*, *в*. В месте перехода от цилиндрической части сосуда к конической имеется скачок напряжений. Кроме того, в месте перехода возникает моментное напряженное состояние, и потому переходные зоны в оболочках подкрепляются кольцевыми поясами.

Приближенная модель прочности оболочки вращения при осесимметричном нагружении. При построении приближенной модели принимается, что основное напряженное состояние оболочки является безмоментным. Краевой эффект учитывается приближенно с помощью расчета «эквивалентной цилиндрической оболочки» (рис. 16.26). Напряжения в оболочке при безмоментном напряженном состоянии определяются на основе зависимостей (134) и (136).

Местные изгибные напряжения возникают в зонах крепления оболочки. Для определения моментного напряженного состояния возле сечения $x = 0$ оболочка вращения замещается полубесконечной цилиндрической оболочкой с радиусом

$$r = R_2(0). \tag{144}$$

Для расчета используется решение (124)

$$w = C_1 e^{-\beta_0 x} \cos \beta_0 x + C_2 e^{-\beta_0 x} \sin \beta_0 x, \qquad (145)$$

где при $\mu = 0{,}3$

$$\beta_0 = \frac{1{,}285}{\sqrt{R_2(0)\, h(0)}},$$

$R_2(0)$, $h(0)$ — второй главный радиус кривизны оболочки и толщина оболочки в сечении $x = 0$. Произвольные постоянные C_1 и C_2

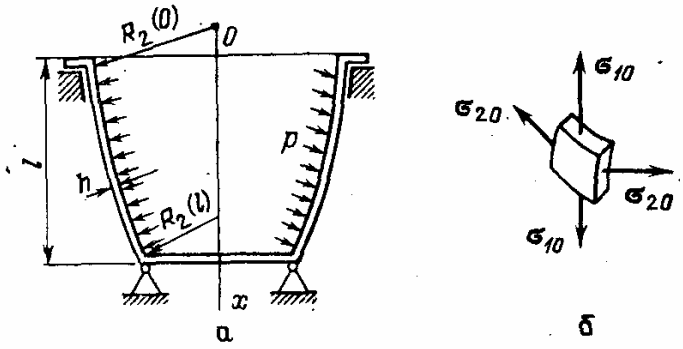


Рис. 16.26. Приближенная модель прочности оболочки вращения: *а* — схема оболочки; *б* — напряжения при безмоментном напряженном состоянии

определяются из условий закреплений края $x = 0$. Например, при заделке края эквивалентной цилиндрической оболочки

$$C_1 = C_2 = -\frac{R_2(0)}{Eh}(N_1(0) - \mu N_2(0)).$$

Для края при $x = l$ моментное напряженное состояние определяется из решения

$$w = C_1^* e^{-\beta_l (l-x)} \cos \beta_l (l - x) + C_2^* e^{-\beta_l (l-x)} \sin \beta_l (l - x), \qquad (146)$$

где при $\mu = 0{,}3$

$$\beta_l = \frac{1{,}285}{\sqrt{R_2(l)\, h(l)}}.$$

Модель прочности при статическом нагружении по общим (безмоментным) напряжениям

$$\frac{\sigma_b}{\sqrt{\sigma_{10}^2 + \sigma_{20}^2 - \sigma_{10}\sigma_{20}}} \geqslant [n_0], \qquad (147)$$

где σ_b — предел прочности материала, $[n_0]$ — допускаемое значение запаса по общим напряжениям — обычно принимается равным:

$$[n_0] = 1{,}3 - 2{,}5.$$

Модель прочности по местным напряжениям имеет вид

$$\frac{\sigma_b}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}} \geqslant [n_м], \qquad (148)$$

где σ_1, σ_2 — напряжения, учитывающие изгибную деформацию оболочки, $[n_м]$ — допускаемое значение запаса по местным напряжениям.

Приближенные модели устойчивости оболочки. Потеря устойчивости (внезапный рост прогибов и деформаций) может возникнуть в оболочках (рис. 16.27), если в них имеются значительные зоны, в которых действуют (общие) сжимающие напряжения. При внешнем давлении q в цилиндрической оболочке возникают сжимающие окружные напряжения

$$\sigma_2 = -q\frac{r}{h},$$

и, следовательно, при

$$q \geqslant q_{кр} \qquad (149)$$

в оболочке может возникнуть потеря устойчивости ($q_{кр}$ — величина внешнего давления, соответствующая потере устойчивости оболочки). По приближенной формуле Папковича (вывод формулы опускается)

$$q_{кр} = 0{,}92\,\frac{Eh^2}{lr}\sqrt{\frac{h}{r}}, \qquad (150)$$

где E — модуль упругости; r, h, l — радиус, толщина и длина оболочки (расстояние между закрепленными контурами). Приближенная модель устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении имеет вид

$$q \leqslant \frac{1}{[n_у]}\,0{,}92\,\frac{Eh^2}{lr}\sqrt{\frac{h}{r}}, \qquad (151)$$

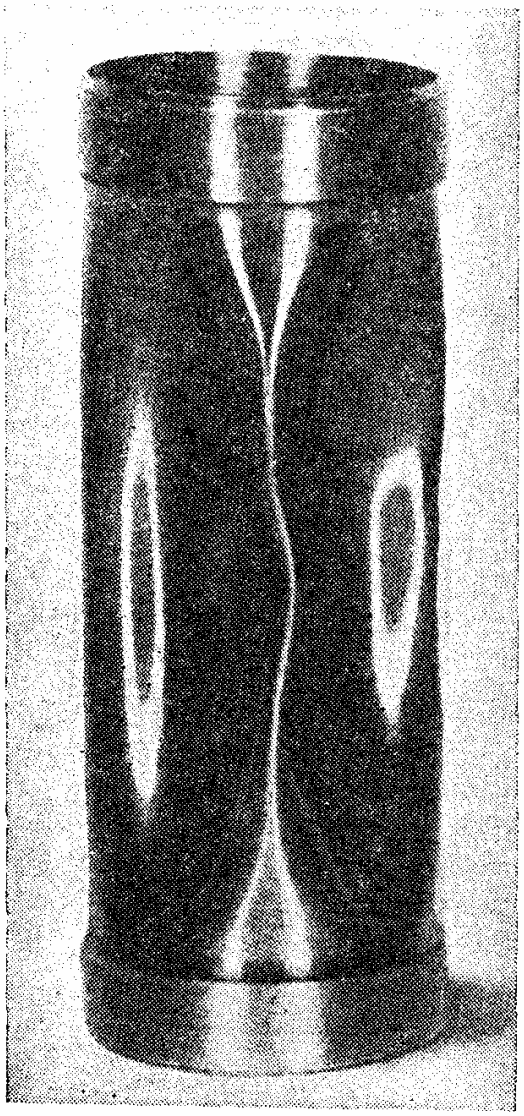


Рис. 16.27. Оболочка, потерявшая устойчивость при действии внешнего давления

где $[n_у]$ — допускаемое значение запаса устойчивости оболочки; обычно $[n_у] = 1{,}5-2{,}5$.

При недостаточном запасе устойчивости проводится подкрепление оболочки кольцевыми и продольными стержнями.

Стенки оболочки могут потерять устойчивость при сжимающих продольных напряжениях

$$\sigma_{1\,кр} = 0{,}6E\frac{h}{r}. \qquad (152)$$

Эта величина может служить оценкой для опасных (в смысле устойчивости) напряжений сжатия при изгибе тонкостенных оболочек.

ГЛАВА 17

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современные ЭВМ дают возможность широкого использования численных методов определения напряжений и деформаций в элементах конструкций сложной формы. Среди таких методов наибольшее практическое значение имеет метод конечных элементов, разработанный и усовершенствованный в последние годы.

54. Введение в метод конечных элементов

Связь вариационных методов и метода конечных элементов. В вариационных методах упругие смещения, возникающие в теле под нагрузкой, представлялись в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x, y, z), \quad v = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x, y, z), \quad w = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x, y, z), \quad (1)$$

где f_i, φ_i, ψ_i — заранее выбранные функции; a_i, b_i, c_i — неизвестные коэффициенты, определяемые из условия минимума полной потенциальной энергии системы.

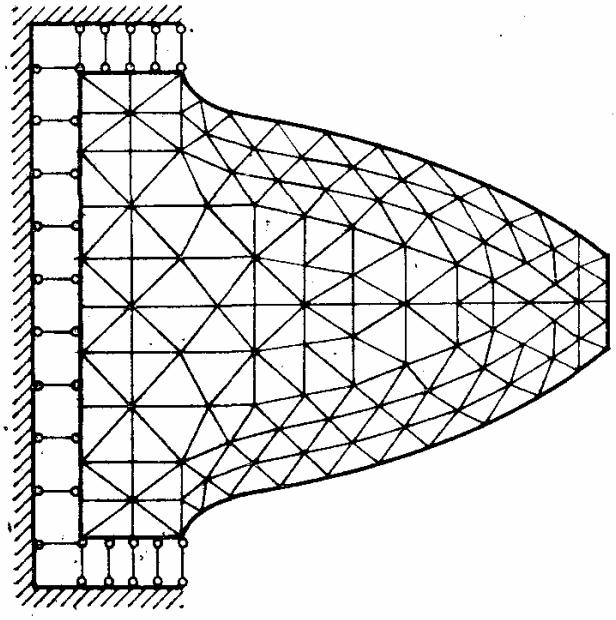


Рис. 17.1. Разбиение области на конечные элементы

Основные трудности при использовании вариационных методов состоят в выборе аппроксимирующих функций f_i, φ_i, ψ_i. Разумеется, что с помощью увеличения числа таких функций точность решения может быть повышена, однако учет местных особенностей напряженного состояния (концентрации напряжений) остается весьма трудным.

В методе конечных элементов тело разбивается на малые, но конечные элементы. Аппроксимация функций u, v, w проводится в каждом элементе отдельно. В качестве основных неизвестных принимаются смещения в узловых точках, сопрягающих отдельные конечные элементы (рис. 17.1).

Аппроксимация смещения внутри малой области позволяет использовать простейшие функции (линейные и квадратичные функции координат). Как и в вариационных методах, для получения разрешающей системы уравнений относительно неизвестных

смещений узлов используется начало возможных перемещений:

$$\int\limits_V \int \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV - \int\limits_V \int \{\delta u\}^T \{F\}\, dV - \int\limits_S \int \{\delta u\}^T \{p\}\, dS = 0, \quad (2)$$

где $\{F\}$, $\{p\}$ — векторы объемной и поверхностной нагрузки; $\{\delta\varepsilon\}$, $\{\delta u\}$ — вариации (малые отклонения) векторов деформаций и смещений; верхний индекс т означает транспонирование.

Основные этапы решения в методе конечных элементов.

1. Разбиение конструкций на элементы.
2. Выражение перемещений и деформаций в элементе через смещения граничных точек (узлов) элемента.
3. Составление разрешающих уравнений с помощью начала возможных перемещений.
4. Определение узловых смещений, деформаций и напряжений.

В качестве конечных элементов могут использоваться не обязательно малые элементы. Важно только, чтобы поведение элемента (части конструкции) достаточно точно описывалось смещениями его узлов. Например, в качестве конечного элемента можно использовать стержень и т. п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *Статически неопределимая ферма* (рис. 17.2). Считаем конечными элементами стержни; узлами элементов являются шарниры. Отличным от нуля будет узловое смещение u_1.

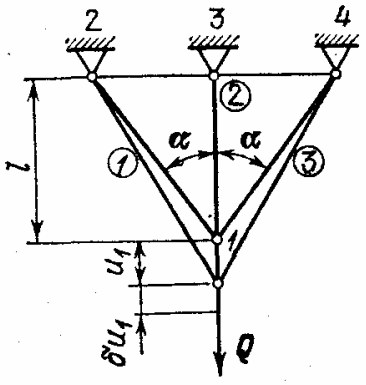


Рис. 17.2. Расчет статически неопределимой фермы методом конечных элементов

Деформация в элементе 2 равна

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{l} u_1.$$

Деформация в элементах 1 и 3 равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{l} u_1.$$

Напряжения в элементах

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{E \cos^2 \alpha}{l} u_1, \quad \sigma_2 = \frac{E}{l} u_1.$$

Начало возможных перемещений (2) запишем для системы в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{3} \int\limits_{V_n} \int \{\delta\varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\}\, dV - \int\limits_S \int \{\delta u\}^T \{p\}\, ds = 0. \quad (3)$$

В этом равенстве интеграл по объему тела рассматривается как сумма интегралов по объему каждого элемента. Так как

$$\delta\varepsilon_1 = \delta\varepsilon_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{l} \delta u_1, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{1}{l} \delta u_1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{3}\int\int\int_{V_n}\{\delta\varepsilon_n\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_n\}\,dV = 2\frac{\cos^2\alpha}{l}\,\delta u_1\,\frac{E\cos^2\alpha}{l}\,u_1\,\frac{l}{\cos\alpha}\,F + \frac{1}{l}\,\delta u_1\,\frac{E}{l}\,u_1 lF,$$

где F — площадь сечения стержней. По физическому смыслу

$$\int\int_S \{\delta u\}^{\mathrm{T}}\{p\}\,dS = \delta u_1 Q$$

представляет возможную работу внешних сил при вариации смещения узла 1. В соответствии с равенством (3)

$$\delta u_1\left(\frac{EF}{l}(1+2\cos^3\alpha)\,u_1 - Q\right) = 0, \text{ или } \delta u_1(K_{11}u_1 - Q) = 0,$$

где $K_{11} = \dfrac{EF(1+2\cos^2\alpha)}{l}$. Так как $\delta u_1 \neq 0$, то получаем

$$u_1 = \frac{Q}{K_{11}} = \frac{Ql}{EF}\,\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}.$$

Усилия в стержнях будут равны

$$N_1 = N_3 = \sigma_1 F = \frac{E\cos^2\alpha}{l}\,\frac{Ql}{EF}\,\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}\,F = Q\,\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha},$$

$$N_2 = \sigma_2 F = \frac{E}{l}\,\frac{Ql}{EF}\,\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}\,F = Q\,\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}.$$

По физическому смыслу K_{11} представляет усилие, которое следует приложить в узле 1 для единичного смещения узла ($u_1 = 1$). Величина K_{11} называется *коэффициентом жесткости*.

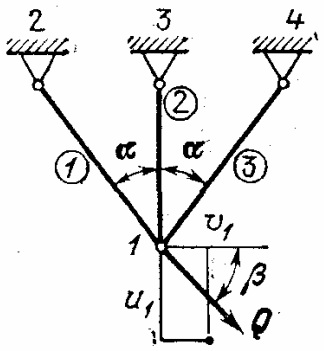


Рис. 17.3. Расчет статически неопределимой фермы под действием произвольной силы методом конечных элементов

Пример 2. *Статически неопределимая ферма под действием произвольной нагрузки* (рис. 17.3). Смещение узла 1 имеет составляющие u_1 и v_1. Для определения деформаций в стержнях находим проекцию полного смещения узла 1 на направления стержней и относим эту величину к его длине l:

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1(\cos\alpha + v_1\sin\alpha)}{l}\cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{l}u_1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}v_1,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_1}{l},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{u_1(\cos\alpha - v_1\sin\alpha)}{l}\cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{l}u_1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}v_1.$$

Напряжения в стержне

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = E\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = E\varepsilon_3. \tag{4}$$

Используя начало возможных перемещений (уравнение (3)), получим

$$\left(\delta u_1\frac{\cos^2\alpha}{l} + \delta v_1\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)\left(u_1\frac{\cos^2\alpha}{l} + v_1\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)EF\,\frac{l}{\cos\alpha} +$$

$$+\,\delta u_1\frac{1}{l}\frac{u_1}{l}EFl + \left(\delta u_1\frac{\cos^2\alpha}{l} - \delta v_1\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)\left(u_1\frac{\cos^2\alpha}{l} - v_1\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)\times$$

$$\times\,EF\,\frac{l}{\cos\alpha} - Q_u\delta u_1 - Q_v\delta v_1 = 0, \tag{5}$$

где

$$Q_u = Q\sin\beta, \quad Q_v = Q\cos\beta. \tag{6}$$

Собирая члены при одинаковых вариациях, найдем

$$\delta u_1\left\{\left(\frac{2\cos^3\alpha EF}{l}+\frac{EF}{l}\right)u_1 - Q_u\right\} + \delta v_1\left(\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{l}v_1 - Q_v\right) = 0, \tag{7}$$

или

$$\begin{Bmatrix}\delta u_1\\ \delta v_1\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\left\{[K]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}Q_u\\ Q_v\end{Bmatrix}\right\} = 0, \tag{8}$$

где матрица жесткости

$$[K] = \frac{EF}{l} = \begin{bmatrix}1+2\cos^3\alpha & 0\\ 0 & 2\sin^3\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}. \tag{9}$$

В силу произвольности вариаций из уравнения (8) получаем

$$[K]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}Q_u\\ Q_v\end{Bmatrix} = 0. \tag{10}$$

Зависимости (10) позволяют определить смещение и затем деформации и напряжения в стержнях.

55. Основные уравнения метода конечных элементов

Аппроксимация перемещений внутри элемента. Ограничимся рассмотрением плоской задачи (например, растяжение листа с отверстием и т. п.).

Область тела разбивается на малые, но конечные элементы, в частности треугольного типа (рис. 17.4). Упругие перемещения в пределах n-го элемента будем считать линейными функциями координат

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \tag{11}$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \tag{12}$$

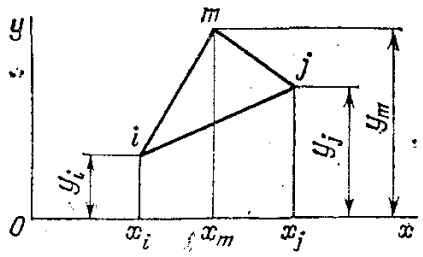


Рис. 17.4. Конечный элемент при решении плоской задачи

Неизвестные параметры α_1, α_2, ..., α_6 выразим через смещения узлов.

Применяя равенство (11) для узлов i, j, m, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i &= u_i,\\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j &= u_j,\\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m &= u_m.\end{aligned} \tag{13}$$

В матричной форме имеем

$$\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}u_i\\ u_j\\ u_m\end{Bmatrix}. \tag{14}$$

Определяя из этого уравнения α_1, α_2, α_3, представим равенство (11) в таком виде:

$$u(x, y)=(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m, \quad (15)$$

коэффициенты равны

$$a_i=(x_jy_m-x_my_i)\frac{1}{2\Delta}, \quad b_i=(y_j-y_m)\frac{1}{2\Delta}, \quad c_i=(x_m-x_j)\frac{1}{2\Delta}. \quad (16)$$

Остальные коэффициенты a_j, ..., c_m получаются из равенств (16) с помощью круговой перестановки индексов i, j, m. Например, $a_j=(x_my_i-x_iy_m)/(2\Delta)$ и т. д. Для смещений вдоль оси y будем иметь

$$\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}v_i\\ v_j\\ v_m\end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Формула для v аналогична (15):

$$v(x, y)=(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m. \quad (18)$$

Равенства (15) и (18) выражают смещения точек треугольного конечного элемента через смещения его вершин (узлов).

В матричной форме уравнения (15) и (18) представим так:

$$\{u_n\}=\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\{[\Phi_i], [\Phi_j], [\Phi_m]\}\begin{Bmatrix}U_i\\ U_j\\ U_m\end{Bmatrix}, \quad (19)$$

где матрицы

$$[\Phi_i]=(a_i+b_ix+c_iy)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=f_i(x, y)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \ldots \quad (20)$$

и векторы смещений узлов

$$U_i=\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix}, \quad U_j=\begin{Bmatrix}u_j\\ v_j\end{Bmatrix}, \quad U_m=\begin{Bmatrix}u_m\\ v_m\end{Bmatrix}. \quad (21)$$

По физическому смыслу матрица формы $[\Phi_i]$ выражает перемещения точек элемента в случае, когда компоненты смещения узла i равны единице ($u_i=1$, $v_i=1$), а смещения других узлов отсутствуют. В соотношении (19) вектор-строка и вектор-столбец имеют блочную структуру; в более компактной форме зависимость (19) можно записать следующим образом:

$$\underset{1\times1}{\{u_n\}}=\underset{1\times3}{[\Phi_n]}\underset{3\times1}{\{U_n\}}, \quad (22)$$

где

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}. \tag{23}$$

В равенстве (22) и в некоторых случаях в дальнейшем указаны числа строк и столбцов в блоках (верхние цифры) и числа строк и столбцов в самой матрице или векторе (нижние цифры).

Замечание. Главное преимущество при разбиении матрицы на блоки состоит в следующем: в дальнейшем блоки могут рассматриваться как обычные элементы матрицы. При умножении матриц (вектор также рассматривается как матрица) «внутренние» числа, указывающие размерности матриц и их блоков (попарно одинаковые), пропадают! Например, в равенстве (22) такими числами являются 3 в нижней строке и 2 в верхней. Крайние числа показывают числа строк и столбцов в той матрице и ее блоках, которые получаются в результате перемножения.

Деформации и напряжения внутри элемента. В плоской задаче связь деформаций и перемещений в n-м элементе устанавливается известными соотношениями (см. разд. 9):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{24}$$

Запишем эти равенства в векторной форме:

$$\{\varepsilon_n\} = [D]\{u_n\}, \tag{25}$$

где вектор деформаций в n-м элементе

$$\{\varepsilon_n\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \quad \{u_n\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{26}$$

и матрица дифференцирования

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Если учесть соотношение (22), то

$$\{\varepsilon_n\} = [D][\Phi_n]\{U_n\} = [B_n]\{U_n\}, \tag{28}$$

где матрица

$$[B_n] = [D][\Phi_n]. \tag{29}$$

Получим теперь равенство (29) непосредственно из соотношений (15) и (18). Дифференцируя, находим

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m, \quad \varepsilon_y = c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m, \\ \gamma_{xy} = c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m. \end{gathered} \tag{30}$$

В матричной форме имеем

$$\{\varepsilon_n\} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \tag{31}$$

причем матрица

$$[B_n] = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}. \tag{32}$$

В дальнейшем матрицу $[B_n]$ удобно представить в блочной форме:

$$[B_n] = [[B_i], [B_j], [B_m]] = \underset{1\times 3}{[\overset{3\times 2}{B_n}]}. \tag{33}$$

Каждый блок матрицы относится к определенному узлу.

Соотношения упругости для плоской задачи:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

или

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \tag{34}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.$$

Последние уравнения представим в матричной форме:

$$\{\sigma\} = [A](\{\varepsilon\} - \{\alpha T\}), \tag{35}$$

где матрица

$$[A] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{vmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{36}$$

Вектор температурной деформации

$$\{\alpha T\} = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{37}$$

Учитывая формулу (28), получим

$$\underset{1\times 1}{\{\sigma\}} = \underset{1\times 1}{[A]}\left(\underset{1\times 3}{[B_n]}\underset{3\times 1}{\{U_n\}} - \underset{1\times 1}{\{\alpha T\}}\right); \tag{38}$$

в последнем равенстве снова указана блочная структура матриц, приспособленная к принятой структуре матрицы $[B_n]$.

Вариационное уравнение метода конечных элементов. Применяя начало возможных перемещений для всего тела, запишем

$$\int\limits_V\int\int \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dV - \int\limits_V\int\int \{\delta u\}^T\{F\}\,dV - \int\limits_S\int\{\delta u\}^T\{p\}\,dS = 0, \quad (39)$$

где V и S — объем и поверхность тела.

Векторы объемной и поверхностной нагрузки

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Интеграл по всему объему равен сумме интегралов по объемам элементов:

$$\sum_{n=1}^{N_э}\left(\int\limits_{V_n}\int\int \{\delta\varepsilon_n\}^T\{\sigma_n\}\,dV - \int\limits_{V_n}\int\int \{\delta u_n\}^T\{F\}\,dV - \int\limits_{S_n\in S}\int\{\delta u_n\}^T\{p\}dS\right) = 0, \quad (41)$$

где $N_э$ — число элементов.

Последний интеграл распространяется только на участки поверхности элементов, принадлежащие внешней поверхности тела ($S_n \in S$). Из равенства (28) вытекает

$$\{\delta\varepsilon_n\} = [B_n]\{\delta U_n\} \quad (42)$$

и для транспонированного вектора

$$\{\varepsilon_n\}^T = \{\delta U_n\}^T[B_n]^T. \quad (43)$$

С помощью соотношения (22) находим

$$\{\delta u_n\} = [\Phi_n]\{\delta U_n\}, \quad (44)$$

и далее

$$\{\delta u\}^T = \{\delta U_n\}^T[\Phi_n]^T. \quad (45)$$

Учитывая соотношения (43), (45) и (35), запишем уравнение (41) в таком виде:

$$\sum_{n=1}^{N_э}\{\delta U_n\}^T\left(\left(\int\limits_{V_n}\int\int [B_n]^T[A][B_n]\,dV\right)\{U_n\} - \int\limits_{V_n}\int\int [B_n]^T[A]\{\alpha T\}\,dV - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{V_n}\int\int [\Phi_n]^T\{F\}\,dV - \int\limits_{S_n\in S}\int [\Phi_n]^T\{p\}\,dS\right) = 0. \quad (46)$$

Уравнение (46) представляет вариационное уравнение метода конечных элементов для плоской задачи.

Матрица жесткости элемента. В основном вариационном уравнении (46) элемент представлен матрицей жесткости

$$\underset{3\times3}{[K^n]} = \int\limits_{V_n}\int\int \underset{3\times1}{[B_n]^T}\,\underset{1\times1}{[A]}\,\underset{1\times3}{[B_n]}\,dV. \quad (47)$$

Отметим, что при транспонировании матрицы числа строк и столбцов меняются местами.

В развернутой форме получим

$$[K^{(n)}] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{im}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jm}] \\ [K_{mi}] & [K_{mj}] & [K_{mm}] \end{bmatrix}, \tag{48}$$

где квадратные подматрицы — блоки n-го элемента (индекс n для краткости опускается):

$$[K_{ij}] = \int\limits_V \int\int [B_i]^{\mathrm{T}} [A] [B_j] \, dV. \tag{49}$$

Матрица $[K_{ij}]$ содержит компоненты усилий в i-м узле при единичных смещениях j-го узла при условии, что остальные узлы смещений не имеют.

Узловые нагрузки. В уравнении (46) внешние воздействия приводятся к эквивалентным нагрузкам, приложенным к узлам элемента. Если элемент примыкает к внешней поверхности тела ($S_n \in S$), то распределенная нагрузка дает следующий вектор статически эквивалентных узловых усилий:

$$\{Q_p^{(n)}\} = \int\limits_{S_n \in S} \int [\Phi_n]^{\mathrm{T}} \{p\} \, dS. \tag{50}$$

Для внутренних границ элементов $\{Q_p^{(n)}\} = 0$. Вклад массовых сил и температурных воздействий в узловые усилия составляет

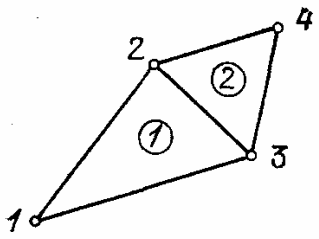


Рис. 17.5. Формирование матрицы жесткости для двух элементов

$$\{Q_F^{(n)}\} = \int\limits_{V_n} \int\int [\Phi_n]^{\mathrm{T}} \{F\} \, dV, \tag{51}$$

$$\{Q_T^{(n)}\} = \int\limits_{V_n} \int\int [B_n]^{\mathrm{T}} [A] \{\alpha T\} \, dV. \tag{52}$$

Отметим, что узловые нагрузки не зависят от искомых смещений и могут считаться заданными.

Разрешающая система линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ). Уравнение (46) представим в следующей записи:

$$\sum_{n=1}^{N_э} \{\delta U_n^{\mathrm{T}}\} \left([K^{(n)}] \{U_n\} - \{Q^{(n)}\} \right) = 0, \tag{53}$$

где суммарный вектор узловых усилий равен

$$\{Q^n\} = \{Q_T^{(n)}\} + \{Q_F^{(n)}\} + \{Q_p^{(n)}\}. \tag{54}$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера плоское тело, разбитое на два конечных элемента (рис. 17.5). Для указанного тела

уравнение (53) в развернутой форме будет таким:

$$\begin{aligned}
&\{\delta U_1\}^T\left([K_{11}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{12}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{13}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_1^{(1)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_2\}^T\left([K_{21}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{22}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{23}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_2^{(1)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_3\}^T\left([K_{31}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{32}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{33}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_3^{(1)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_2\}^T\left([K_{22}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{23}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{24}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_2^{(2)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_3\}^T\left([K_{32}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{33}^{(2)}\{U_3\}+[K_{34}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_3^{(2)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_4\}^T\left([K_{42}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{43}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{44}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_4^{(2)}\}\right)=0. \qquad (55)
\end{aligned}$$

В уравнении (55) вектор $\{U_i\}$ содержит компоненты смещения u_i, v_i узла i ($i=1, 2, 3, 4$).

Теперь запишем уравнение (55) в другой форме, суммируя все члены, содержащие вариацию смещения данного узла:

$$\begin{aligned}
&\{\delta U_1\}^T\left([K_{11}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{12}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{13}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_1^{(1)}\}\right)+\\
&+\{\delta U_2\}^T\left([K_{21}^{(1)}]\{U_1\}+([K_{22}^{(1)}]+[K_{22}^{(2)}])\{U_2\}+([K_{23}^{(1)}]+[K_{23}^{(2)}])\{U_3\}+\right.\\
&\left.+[K_{24}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_2^{(1)}\}-\{Q_2^{(2)}\}\right)+\{\delta U_3\}^T\left([K_{31}^{(1)}]\{U_1\}+\right.\\
&+([K_{32}^{(1)}]+[K_{32}^{(2)}])\{U_2\}+([K_{33}^{(1)}]+[K_{33}^{(2)}])\{U_3\}+[K_{34}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_3^{(1)}\}-\\
&\left.-\{Q_3^{(2)}\}\right)+\{\delta U_4\}^T\left([K_{42}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{43}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{44}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_4^{(2)}\}\right)=0. \qquad (56)
\end{aligned}$$

Вариации смещения узлов могут быть совершенно произвольными, и равенство (56) возможно только в том случае, когда выражения при вариациях обращаются в нули. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых смещений:

$$\begin{aligned}
&[K_{11}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{12}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{13}^{(1)}]\{U_3\}=0,\\
&[K_{21}^{(1)}]\{U_1\}+([K_{22}^{(1)}]+[K_{22}^{(2)}])\{U_2\}+([K_{23}^{(1)}]+[K_{23}^{(2)}])\{U_3\}+\\
&\qquad+[K_{24}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_2\}=0,\\
&[K_{31}^{(1)}]\{U_1\}+([K_{32}^{(1)}]+[K_{32}^{(2)}])\{U_2\}+([K_{33}^{(1)}]+[K_{33}^{(2)}])\{U_3\}+\\
&\qquad+[K_{34}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_3\}=0,\\
&[K_{42}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{43}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{44}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_4\}=0,
\end{aligned} \qquad (57)$$

где $\{Q_i\}$ — вектор усилий, действующий на узел i со стороны всех примыкающих к узлу элементов. Например,

$$\{Q_2\}=\{Q_2^{(1)}\}+\{Q_2^{(2)}\}.$$

Уравнения (57) представим в матричной форме:

$$[K]\{U\}=\{Q\}, \qquad (58)$$

где векторы узловых смещений и усилий равны

$$\{U\} = \underset{1\times N}{\begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix}}, \qquad \{Q\} = \underset{1\times N}{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{Bmatrix}}, \tag{59}$$

где N — общее число узлов.

Записанное в общей форме уравнение (58) является основным разрешающим уравнением метода конечных элементов. Матрица $[K]$ называется *матрицей жесткости конструкции.*

Матрица $[K]$ является квадратной матрицей $N \times N$, элементы которой квадратные матрицы. Каждая строчка матрицы соответствует узлу и содержит кроме смещения соответствующего узла еще и смещения других узлов элементов, примыкающих к данному узлу.

Строчка матрицы для плоской задачи содержит два линейных уравнения относительно компонентов смещений.

В общем случае можно записать для i-й строчки основного уравнения (58) следующее выражение, вытекающее из уравнения (53):

$$\sum_{n\in i} \left(\left[K_i^{(n)} \right] \{U_n\} - \{Q^{(n)}\} \right) = 0. \tag{60}$$

Символ $n \in i$ означает, что в уравнение входят только элементы, примыкающие к i-му узлу; матрица $\left[K_i^{(n)}\right]$ содержит только одну строчку матрицы $[K^{(n)}]$, относящуюся к узлу с номером i. Например, для второго уравнения (57) получим из равенства (60) при $i = 2$, $n = 1, 2$:

$$\left[\left[K_{21}^{(1)} \right] \left[K_{22}^{(1)} \right] \left[K_{23}^{(1)} \right] \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} - \{Q_2^{(1)}\} + \left[\left[K_{22}^{(2)} \right] \left[K_{23}^{(2)} \right] \left[K_{24}^{(2)} \right] \right] \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} - \{Q_2^{(2)}\} = 0,$$

что совпадает со вторым уравнением (57).

Замечания. 1. Основная система уравнений метода конечных элементов (58) обладает положительно определенной симметричной матрицей ленточной структуры. Для численного решения часто используется метод блочного исключения Гаусса, метод Холецкого и др.

2. Описанный вариант метода является простейшим. Применяются более сложные элементы с большим числом узлов и обобщенных узловых смещений. В качестве конечного элемента можно использовать участки пластинок, оболочек и т. п.